ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΤΟΥ ΣΥΝΕΧΟΥΣ ΜΕΣΟΥ

Σχολή Πολιτικών Μηχανικών, Εξ. Διδ. 04

Καθηγητής Ι. Βαρδουλάκης, Σ.Ε.Μ.Φ.Ε.

8:30 π.μ., Πέμπτη 8 Ιουλίου 2004

ΘΕΜΑ 1:

Δίδεται η περιγραφή μίας κίνησης ενός μονοδιάστατου Συνεχούς κατά Lagrange

$$x = X^{L}(\xi, t) = \xi + \frac{\xi^2}{1+\sqrt{t}} - \xi^2 \ , \ t \geq 0$$

1. Να υπολογισθούν οι μαθηματικές εκφράσεις τhς ταχύτητας $v = v^{L}(\xi, t)$ και της επιτάχυνσης $a = a^{L}(\xi, t)$ του υλικού σημείου σε περιγραφή κατά Lagrange.

2. Να υπολογισθούν η βαθμίδα παραμόρφωσης $F = F(\xi, t)$ καθώς και μετατόπιση $u = u^{L}(\xi, t)$ και η τροπή κατά Green $G = G(\xi, t)$ ως προς την αρχική απεικόνιση ($t = 0$) του εν λόγω Συνεχούς.

Λύση 1^{ου} Θέματος:

- **Περιγραφή της κίνησης κατά Lagrange**

$$x = X^L(\xi,t) = \xi + \frac{\xi^2}{1+\sqrt{t}} - \xi^2 \;,\; t \geq 0 \quad , \quad XL(\xi, t) := \xi + \frac{\xi^2}{1+\sqrt{t}} - \xi^2$$

Η **ταχύτητα** του υλικού σημείου είναι

$$v^L(\xi,t) = \left.\frac{\partial X^L}{\partial t}\right|_{\xi} \quad , \quad vL(\xi, t) := -\frac{1}{2}\frac{\xi^2}{(1+\sqrt{t})^2\sqrt{t}}$$

Η **επιτάχυνση** του υλικού σημείου

$$a^L(\xi,t) = \frac{\partial v^L}{\partial t} = \frac{\partial^2 X^L}{\partial t^2} \quad , \quad aL(\xi, t) := \frac{1}{4}\frac{\xi^2(3\sqrt{t}+1)}{t^{(3/2)}(1+\sqrt{t})^3}$$

Η βαθμίδα παραμόρφωσης

$$F = \frac{\partial X^L}{\partial \xi} \quad , \quad F(\xi, t) := 1 + \frac{2\xi}{1+\sqrt{t}} - 2\xi$$

Η **μετατόπιση** του υλικού σημείου μετράται σε σχέση με την αρχική του θέση

$$u^L(\xi,t) = X^L(\xi,t) - X^L(\xi,0) \;,\; uL(\xi, t) := \frac{\xi^2}{1+\sqrt{t}} - \xi^2$$

Η τροπή **κατά Green**

$$G = \frac{\partial u^L}{\partial \xi} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u^L}{\partial \xi}\right)^2 \quad , \quad G(\xi, t) := 2\,\frac{\xi\sqrt{t}\,(-1-\sqrt{t}+\xi\sqrt{t})}{(1+\sqrt{t})^2}$$

ΘΕΜΑ 2:

Υποθέτουμε ότι κάτω από κανονικές συνθήκες η εμπειρική σχέση ταχύτητας-πυκνότητας κυκλοφοριακής ροής δίδεται κατά προσέγγιση από τις εξής σχέσεις:

$$v = V(\rho) = v_{max}\left(1 - \frac{\rho}{\rho_{max}}\right)$$

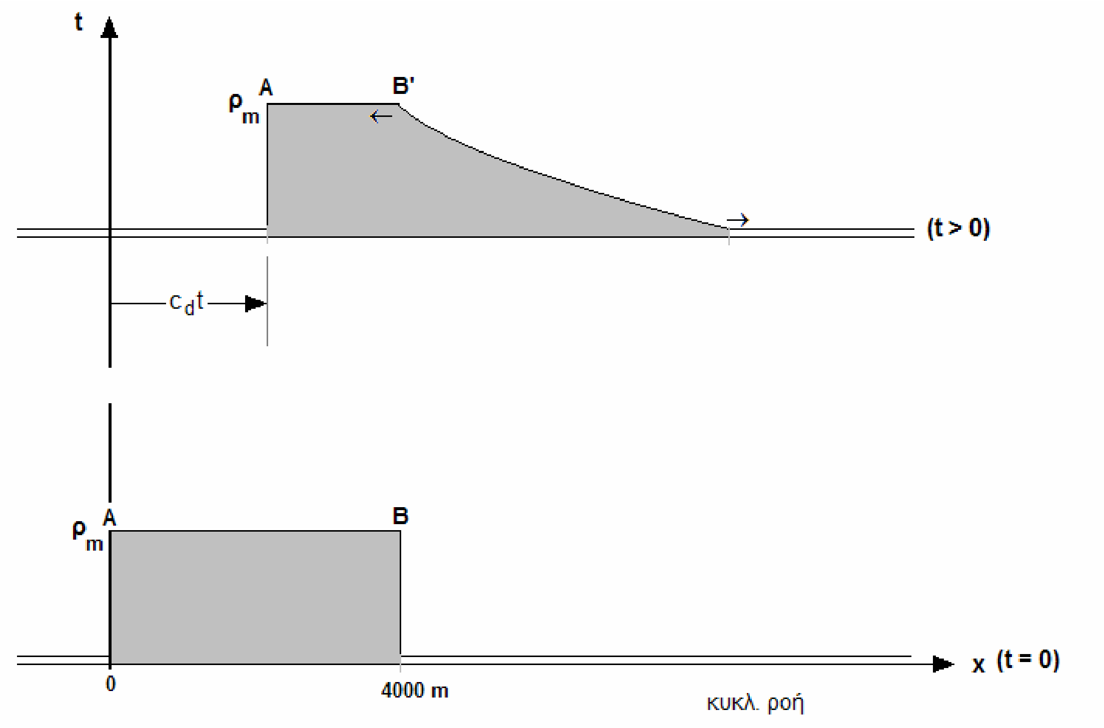
$$v_{max} = 120.\frac{km}{hr} \quad , \quad \rho_{max} = 200.\frac{cars}{km} \tag{1}$$

Για τη χρονική στιγμή $(t = 0)$ δίδεται η (αρχική) κατανομή της πυκνότητας,

$$\rho(x,0) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \rho_m & 0 \le x \le 4.km \\ 0 & x > 4.km \end{cases} \tag{2}$$

όπου ρ_m είναι η **βέλτιστη πυκνότητα** κυκλοφοριακής ροής**.**

Για την παραπάνω αρχική συνθήκη, εξ. (1), να υπολογισθεί αριθμητικά ο χρόνος $(t = t_1$ σε min) και ο τόπος $(x = x_1$ σε km), όπου το κύμα εκτόνωσης θα συναντήσει για πρώτη φορά το επερχόμενο κρουστικό μέτωπο $(A \leftarrow B')$.



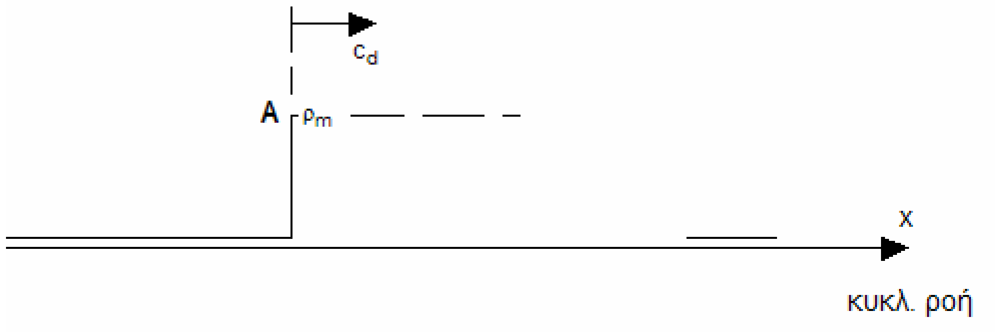
<u>Υπόδειξη</u>:

Να γίνει χρήση της μεθόδου των Χαρακτηριστικών Γραμμών.

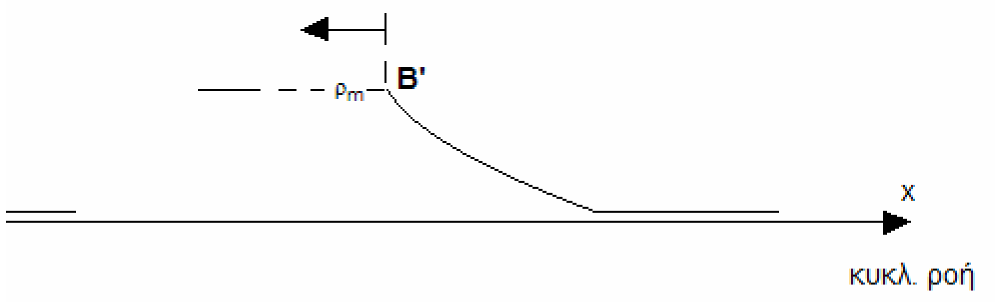
Αρχικά το κρουστικό κύμα στα αριστερά της κατανομής μεταδίδεται με σταθερή ταχύτητα c_d. **Μόνο αυτή η φάση μας ενδιαφέρει εδώ**.

Εδώ να αντιμετωπιστεί η αρχική[1] φάση της μετατόπισης του κρουστικού κύματος, που αφορά στην απότομη πύκνωση στα αριστερά της αρχικής κατανομής (σχ. (α), σημείο A).

Στη συνέχεια να αντιμετωπιστεί η εκτόνωση της πύκνωσης στα δεξιά της αρχικής κατανομής (σχ. (β), σημείο B′)



(α)



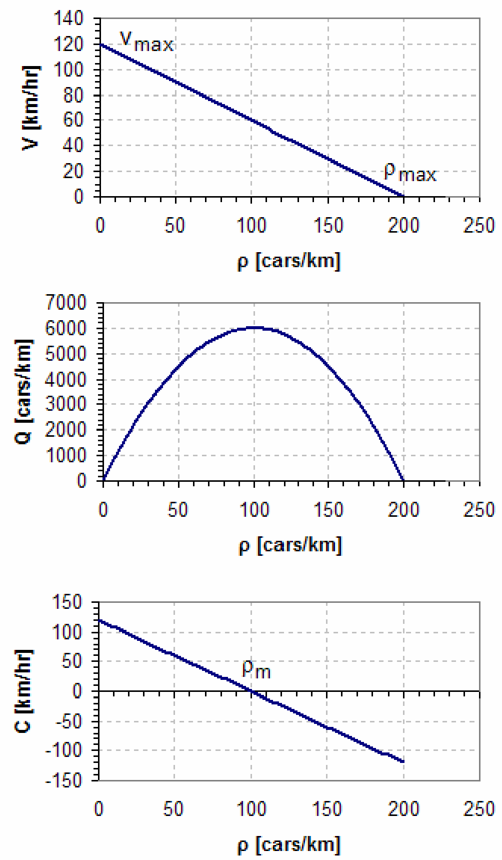
(β)

[1] Αν επιθυμεί, ο φοιτητής θα μπορούσε να ασχοληθεί και με την τελική φάση του φαινομένου, όπου η ταχύτητα του κρουστικού κύματος μεταβάλλεται με το χρόνο.

Λύση 2^{ου} Θέματος:

Δίδεται η γραμμική καταστατική σχέση ταχύτητας – πυκνότητας

$$V(\rho) = v_{max}\left(1 - \frac{\rho}{\rho_{max}}\right)$$



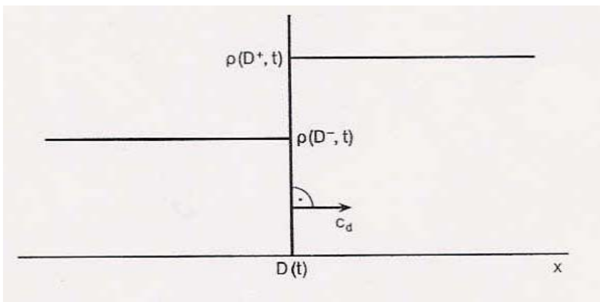
Παρατηρούμε τώρα ότι στη βάση αυτής της καταστατικής σχέσης έχουμε,

$$Q(\rho) = \rho V(\rho) = v_{max}\left(\rho - \frac{\rho^2}{\rho_{max}}\right)$$

$$C(\rho) = \frac{dQ}{d\rho} = v_{max}\left(1 - 2\frac{\rho}{\rho_{max}}\right)$$

$$\rho_m = \frac{1}{2}\rho_{max}$$

Η συνθήκη Rankine-Hugoniot για την ταχύτητα μετάδοσης του κρουστικού κύματος είναι,



$$c_d = \frac{[q]}{[\rho]}$$

$$[\rho] = \rho^+ - \rho^- \quad , \quad [q] = q^+ - q^-$$

Εμπροκειμένω έχουμε:

$$[\rho] = \rho^+ - \rho^- = \rho_m - 0 = \rho_m = \frac{1}{2}\rho_{max}$$

και

$$[q] = q^+ - q^- = v_{max}\left(\rho_m - \frac{\rho_m^2}{\rho_{max}}\right) - 0 = v_{max}\left(\frac{1}{2}\rho_{max} - \frac{\frac{1}{4}\rho_{max}^2}{\rho_{max}}\right) = \frac{1}{4}v_{max}\rho_{max}$$

Οπότε

$$c_d = \frac{\frac{1}{4}v_{max}\rho_{max}}{\frac{1}{2}\rho_{max}} = \frac{1}{2}v_{max} = 60.\ km/hr \quad (*)$$

<u>Δίκτυο Χ.Γ.</u>: Πάνω στο άξονα x (t=0) και για:

1) $x < 0$: Οι Χ.Γ. είναι ευθείες με κλίση,

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} = \frac{1}{C(0)} = \frac{1}{v_{max}} = \frac{1}{120\ km/hr} = \frac{60}{120}\frac{min}{km} = 0.5\frac{min}{km}$$

2) $0 < x < 4km$: Οι Χ.Γ. είναι κατακόρυφες ευθείες,

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} = \frac{1}{C(\rho_m)} = \frac{1}{0}$$

3) $x > 4km$: Οι Χ.Γ. είναι ευθείες με κλίση,

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} = \frac{1}{C(0)} = \frac{1}{v_{max}} = 0.5\frac{min}{km}$$

Οι Χ.Γ. της οικογένειας (1) και της οικογένειας (2) τέμνονται κατά μήκος της γραμμής ζωής του κρουστικού κύματος, η οποία αρχικά (δηλ. εφ'οσον ισχύει η παραπάνω σχέση (*)) είναι επίσης ευθεία γραμμή μέ κλίση

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} = \frac{1}{c_d} = \frac{1}{60\frac{km}{hr}} = \frac{60}{60}\frac{min}{km} = 1.\frac{min}{km}$$

4) Στο σημείο Prandtl $P(4.km\,,0.min)$ οι Χ.Γ. είναι δέσμη ευθειών που ξεκινάνε με κλίση κατακόρυφη (=οικογ. (2)) και τελειώνουν με τη κλίση της οικογένειας (1).

Θεωρούμε το σημείο $A(4.km\,,4.min)$ όπου η κατακόρυφη Χ.Γ. από το πέρας της πύκνωσης τέμνει τη γραμμή ζωής του κρουστικού κύματος. Για το σχεδιασμό της κατανομής της πυκνότητας στο χρόνο αυτό διαλέγουμε τις εξής Χ.Γ. της δέσμης εκτόνωσης,

- (ΧΓ) με κλίση: $\dfrac{\Delta t}{\Delta x} = \dfrac{1}{C_1} = \dfrac{4}{1}\dfrac{min}{km} \quad \Rightarrow \quad C_1 = 0.25 \cdot 60 \dfrac{km}{hr} = 15.\dfrac{km}{hr}$

Η κλίση αυτής της ΧΓ αντιστοιχεί σε ταχύτητα μετάδωσης κύματος,

$$C = v_{max}\left(1 - 2\frac{\rho}{\rho_{max}}\right) \quad \Rightarrow$$

$$\rho = \frac{\rho_{max}}{2}\left(1 - \frac{C}{v_{max}}\right) = \frac{200}{2}\frac{cars}{km}\left(1 - \frac{15}{120}\right) = 87.5\frac{cars}{km}$$

Η Χ.Γ. αυτή τέμνει τον χρονικό ορίζοντα $t = 4.min$ στο σημείο

$$\alpha(5.km\,,4.min)$$

- (Χ.Γ.) με κλίση: $\dfrac{\Delta t}{\Delta x} = \dfrac{1}{C_1} = \dfrac{2}{1}\dfrac{min}{km} \quad \Rightarrow \quad C_1 = 0.5 \cdot 60 \dfrac{km}{hr} = 30.\dfrac{km}{hr}$

$$\rho = \frac{200}{2}\frac{cars}{km}\left(1 - \frac{30}{120}\right) = 75.\frac{cars}{km} \quad , \quad \beta(6.km\,,4.min)$$

- (Χ.Γ.) με κλίση: $\dfrac{\Delta t}{\Delta x} = \dfrac{1}{C_1} = \dfrac{1}{1}\dfrac{min}{km} \quad \Rightarrow \quad C_1 = 1.\cdot 60 \dfrac{km}{hr} = 60.\dfrac{km}{hr}$

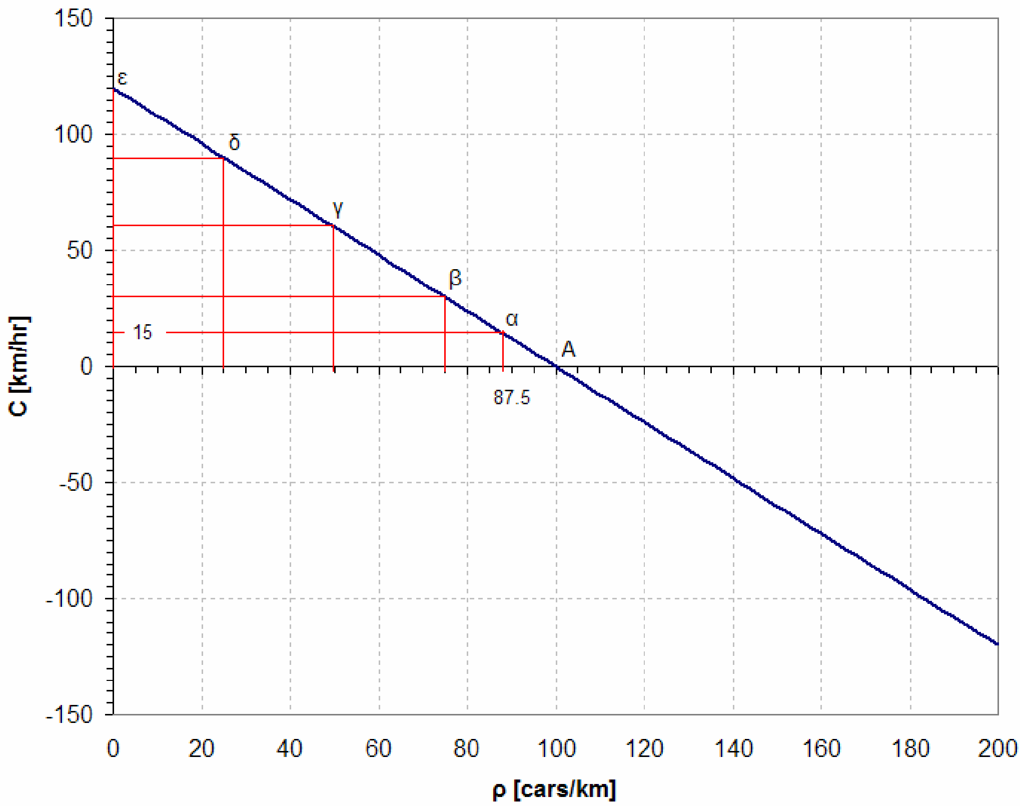
$$\rho = \frac{200}{2}\frac{cars}{km}\left(1-\frac{60}{120}\right) = 50.\frac{cars}{km} \quad , \quad \gamma(8.km\,,4.min)$$

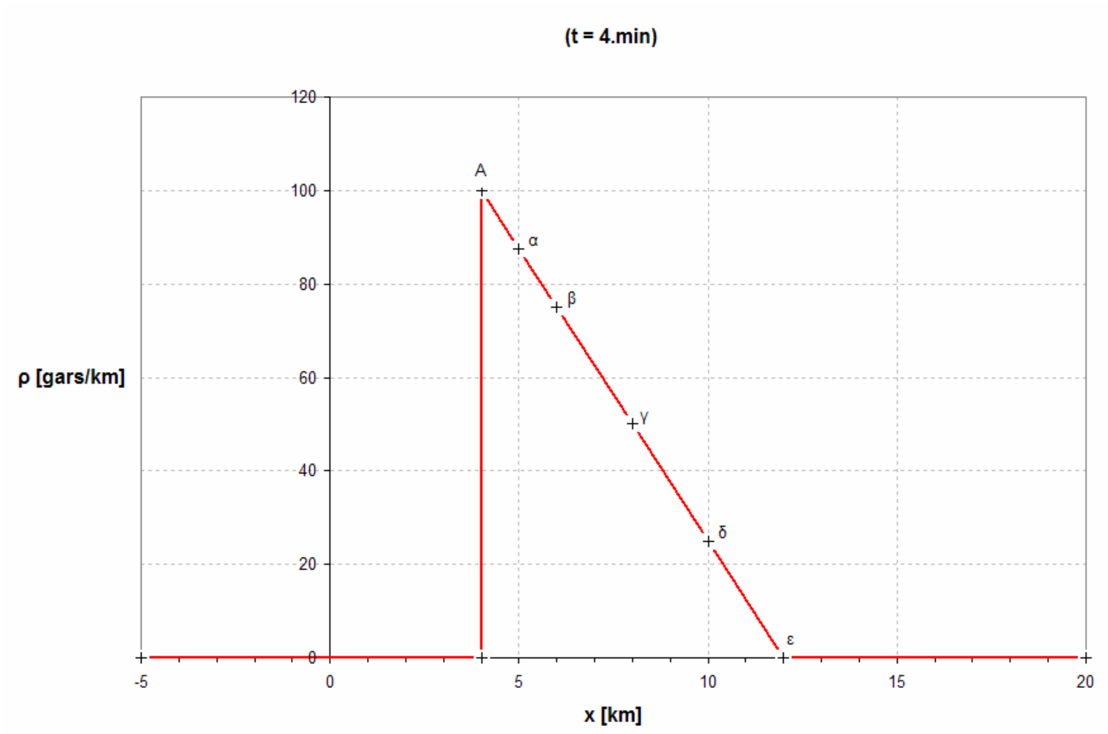
- (Χ.Γ.) με κλίση: $\frac{\Delta t}{\Delta x} = \frac{1}{C_1} = \frac{2}{3}\frac{min}{km} \quad \Rightarrow \quad C_1 = 1.5\cdot 60\frac{km}{hr} = 90.\frac{km}{hr}$

$$\rho = \frac{200}{2}\frac{cars}{km}\left(1-\frac{90}{120}\right) = 25.\frac{cars}{km} \quad , \quad \delta(10.km\,,4.min)$$

- (Χ.Γ.) με κλίση: $\frac{\Delta t}{\Delta x} = \frac{1}{C_1} = \frac{1}{2}\frac{min}{km} \quad \Rightarrow \quad C_1 = 2.\cdot 60\frac{km}{hr} = 120.\frac{km}{hr}$

$$\rho = \frac{200}{2}\frac{cars}{km}\left(1-\frac{120}{120}\right) = 0.\frac{cars}{km} \quad , \quad \delta(12.km\,,4.min)$$





<u>Παρατήρηση</u>[2]: Για χρόνους μεγαλύτερους του $t = 4.\mathrm{min}$, η γραμμή ζωής του κρουστικού κύματος δεν είναι ευθεία. Αυτό φαίνεται από τον παρακάτω υπολογισμό:

Κατ' αρχή εισάγουμε νέες αδιάστατες εξ. μεταβλητές,

$$x^* = \frac{x}{\ell_c}$$

$$t^* = \frac{v_c t}{\ell_c}$$

Επιλέγουμε ως μήκος σύγκρισης το αρχικό μήκος της πύκνωσης,

$$\ell_c = 4.\mathrm{km}$$

και ως ταχύτητα αναφοράς την μέγιστη ταχύτητα κυκλοφορίας,

[2] Προαιρετικό ερώτημα

$$v_c = v_{max} = 120.kM/hr$$

Οι Χ.Γ. της δέσμης εκτόνωσης έχουν την εξής εξίσωση,

$$t^* = m(x^* - 1) \quad \Rightarrow \quad \frac{dt^*}{dx^*} = m = \frac{1}{c^*} = \frac{1}{\left(1 - 2\frac{\rho}{\rho_{max}}\right)}$$

Η Χ.Γ. μεταφέρει αναλλοίωτη τη πυκνότητα,

$$\rho = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{m}\right)\rho_{max}$$

Παρατηρούμε δε ότι τα όρια της δέσμης είναι,

$$\infty > m \geq 1 \quad \Leftrightarrow \quad \rho_m > \rho \geq 0$$

Τα αντίστοιχα άλματα είναι,

$$[\rho] = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{m}\right)\rho_{max} - 0$$

$$[q] = v_{max}\left(\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{m}\right)\rho_{max} - \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{m}\right)^2 \rho_{max}^2\right) - 0 = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{m^2}\right)v_{max}\rho_{max}$$

Οπότε,

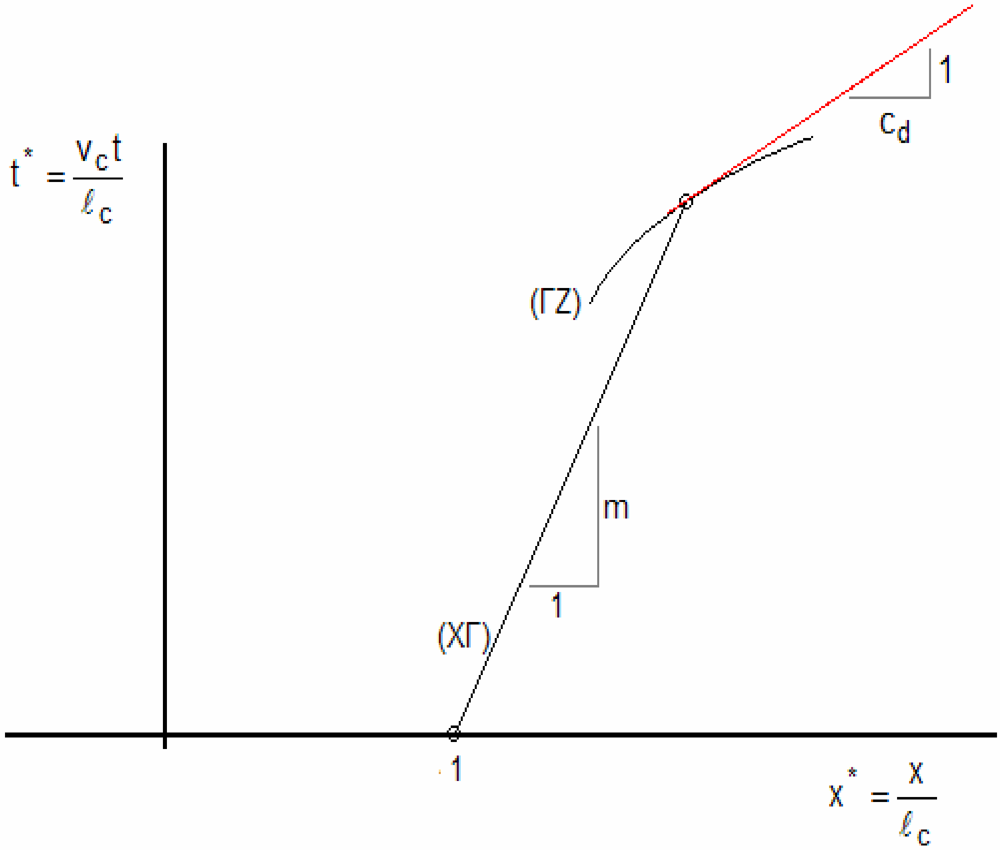
$$c_d = \frac{[q]}{[\rho]} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{m}\right)v_{max}$$

Η γραμμή ζωής του κρουστικού κύματος έχει κλίση,

$$\frac{dt}{dx}=\frac{1}{c_d} \quad \Rightarrow \quad \frac{dt^*}{dx^*}=\frac{1}{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{m}\right)}$$

όπου από την αντίστοιχη Χ.Γ. έχουμε ότι,

$$m=\frac{t^*}{x^*-1}$$



Άρα

$$\frac{dt^*}{dx^*}=\frac{1}{\frac{1}{2}\left(1+\frac{x^*-1}{t^*}\right)} \quad \Rightarrow \quad \frac{dx^*}{dt^*}-\frac{1}{2t^*}x^*=\frac{t^*-1}{2t^*}$$

Η παραπάνω εξίσωση είναι γραμμική

$$\frac{dx^*}{dt^*}+P(t^*)x^*=Q(t^*)$$

όπου

$$P(t^*)=-\frac{1}{2t^*} \quad , \quad Q(t^*)=\frac{t^*-1}{2t^*}$$

Οπότε με

$$\int Pdt^*=-\frac{1}{2}\int\frac{dt^*}{t^*}=-\frac{1}{2}\ln t^*=\ln\left(\frac{1}{\sqrt{t^*}}\right) \quad \Rightarrow \quad e^{-\int Pdt^*}=\sqrt{t}$$

και

$$x^*=e^{-\int Pdt^*}\left(A+\int e^{\int Pdt^*}Qdt^*\right) \quad \Rightarrow \quad x^*=\sqrt{t^*}\left(A+\int\frac{1}{\sqrt{t^*}}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2t^*}\right)dt^*\right)$$

```
> restart;
```

$$\int\frac{1}{\sqrt{t^*}}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2t^*}\right)dt^*$$

```
> f(t):=(1/2)*(1-1/t)/sqrt(t);
```

$$f(t):=\frac{1}{2}\frac{1-\frac{1}{t}}{\sqrt{t}}$$

```
> T(t):= int( f(t), t );
```

$$T(t):=\sqrt{t}+\frac{1}{\sqrt{t}}$$

$$x^*=\sqrt{t^*}\left(A+\sqrt{t^*}+\frac{1}{\sqrt{t^*}}\right)=A\sqrt{t^*}+t^*+1$$

Η γραμμή ζωής του κρουστικού κύματος περνάει από το σημείο Α με συντεταγμένες

$$x = 4.km \quad \Rightarrow x^* = 1$$

$$t = 4.min \quad \Rightarrow t^* = \frac{4.min \cdot 120.km/(60.min)}{4.km} = 2$$

Άρα η σταθερά ολοκλήρωσης είναι, $1 = A\sqrt{2} + 2 + 1 \quad \Rightarrow \quad A = -\sqrt{2}$

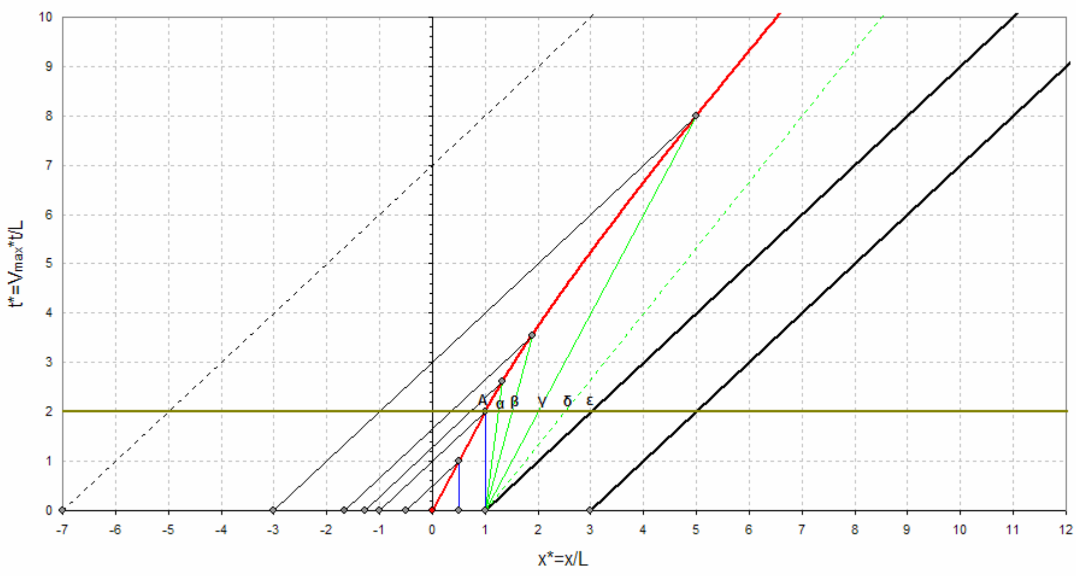
και ως εκ τούτου, $x^* = 1 + t^* - \sqrt{2t^*} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{2t^*} = 1 + t^* - x^*$

ή

$$2t^* = x^{*2} - 2(1+t^*)x^* + (1+t^*)^2 \quad , \quad (t^* > x^* - 1)$$

$$t^{*2} - 2x^*t^* + (x^* - 1)^2 = 0 \qquad \boxed{\Rightarrow \quad t^* = x^* + \sqrt{2x^* - 1}}$$

$$t^* = \frac{1}{2}\left(2x^* \pm \sqrt{4x^{*2} - 4(1-x^*)^2}\right) = x^* \pm \sqrt{2x^* - 1}$$



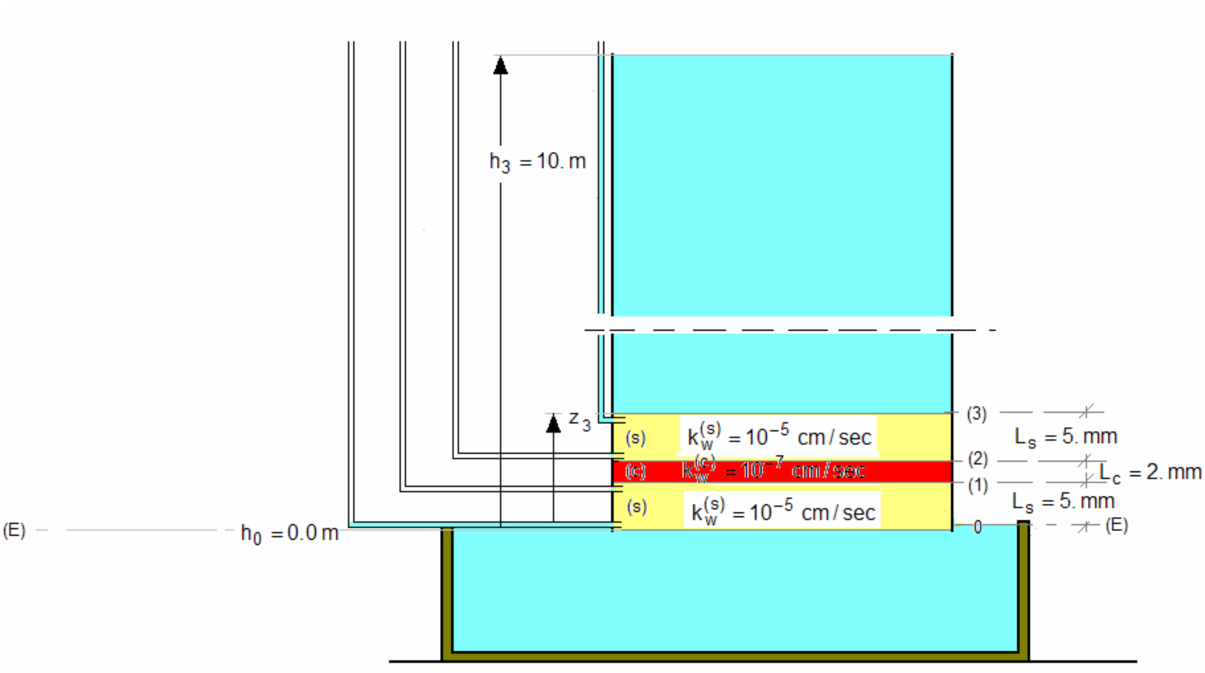
ΘΕΜΑ 3:

Ένα εδαφικό δείγμα τοποθετείται κατακόρυφα σε μια κατάλληλη πειραματική συσκευή, η οποία επιβάλει ροή ύδατος δια μέσου αυτού με κατεύθυνση από πάνω προς τα κάτω. Η στάθμη του ύδατος στο πάνω και στο κάτω άκρο του δείγματος διατηρείται σταθερή στις θέσεις $H_0 = 0.5\text{m}$ και $H_3 = 10.\,\text{m}$ από το επίπεδο αναφοράς ($(E): z = 0$). Το δοκίμιο αποτελείται από τρεις ισοπαχείς στρώσεις από δύο διαφορετικά εδαφικά υλικά με τα εξής χαρακτηριστικά:

(ιλύς s): $k_w^{(s)} = 10^{-5}\ \text{cm/sec}$, $L_s = 5.\,\text{mm}$

(άργιλος c): $k_w^{(c)} = 10^{-7}\ \text{cm/sec}$, $L_c = 2.\,\text{mm}$

Να υπολογισθεί η ειδική παροχή ύδατος q διαμέσου του εδαφικού δοκιμίου σε lt/hr ανά $1.\,\text{m}^2$ επιφανείας κάθετης στη ροή, $[q] = \dfrac{\text{lt/hr}}{\text{m}^2}$.



Λύση 3^{ου} Θέματος:

Ο νόμος του Darcy στην περίπτωση που εξετάζουμε παίρνει την εξής μορφή

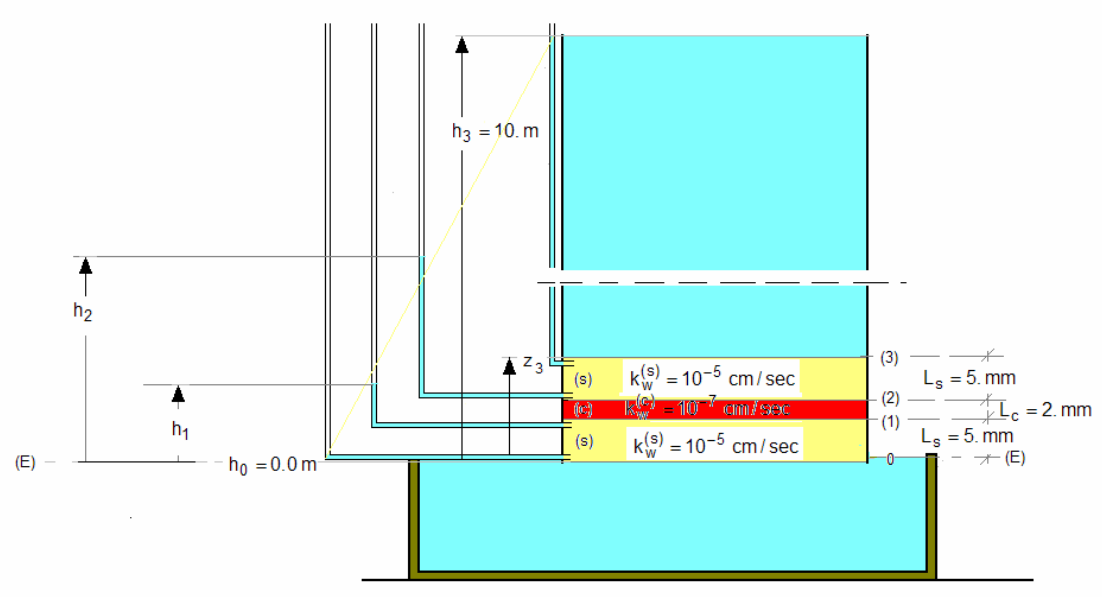
$$q_z = -k_w \frac{dh}{dz}$$

όπου έχουμε εισάγει το λεγόμενο υδραυλικό ύψος ως το άθροισμα του γεωδαιτικού ύψους και του πιεζομετρικού ύψους:

$$h = z + \frac{p_w}{\gamma_w}$$

Σημείωση:

Το αρνητικό πρόσημο στον παραπάνω τύπο για την παροχή σημαίνει ότι η ροή είναι προς τα κάτω, αντίθετα στον άξονα z.



- Ροή διαμέσου του κάτω στρώματος ιλύος:

$$q_z = -q_1$$

$$q_1 = k_w^{(s)} \frac{h_1 - h_0}{L_s} = 10^{-5} \frac{cm}{s} \frac{h_1 - 0.0m}{5.mm}$$

$$= 10^{-7} \frac{m}{s} \frac{1}{5 \cdot 10^{-3} m} h_1 = 2. \cdot 10^{-5} \frac{1}{s} h_1$$

- Ροή διαμέσου του στρώματος αργίλου:

$q_z = -q_2$

$$q_2 = k_w^{(c)} \frac{h_2 - h_1}{L_c} = 10^{-7} \frac{cm}{s} \frac{h_2 - h_1}{2.mm}$$

$$= 10^{-9} \frac{m}{s} \frac{1}{2 \cdot 10^{-3} m}(h_2 - h_1) = 5 \cdot 10^{-7} \frac{1}{s}(h_2 - h_1)$$

- Ροή διαμέσου του πάνω στρώματος ιλύος:

$q_z = -q_3$

$$q_3 = k_w^{(s)} \frac{h_3 - h_2}{L_s} = 10^{-5} \frac{cm}{s} \frac{10.m - h_2}{5.mm}$$

$$= 10^{-7} \frac{m}{s} \frac{1}{5 \cdot 10^{-3} m}(10.m - h_2) = 2. \cdot 10^{-5} \frac{1}{s}(10.m - h_2)$$

Συνέχεια της ροής: Προσδιορισμός του υδραυλικού ύψους στις διεπιφάνειες

$$q_1 = q_2 \quad \Rightarrow \quad 2. \cdot 10^{-5} \frac{1}{s} h_1 \quad = 5 \cdot 10^{-7} \frac{1}{s}(h_2 - h_1)$$

$$h_1 = 0.025\,(h_2 - h_1)$$

$$1.025 h_1 = 0.025 h_2$$

$$h_1 = \frac{0.025}{1.025} h_2 = 0.0244 h_2$$

$$q_2 = q_3 \quad \Rightarrow \quad 5\cdot 10^{-7}(h_2 - h_1) = 2.\cdot 10^{-5}\,\frac{1}{s}(10.m - h_2)$$

$$0.05\,(h_2 - h_1) = 20.m - 2h_2$$

$$2h_2 + 0.05(h_2 - 0.0244h_2) = 20.m$$

$$h_2 = \frac{20.m}{2.0487} = 9.762 \quad m$$

και,

$$h_1 = 0.024h_2 = 0.238m$$

Παροχή:

$$q_1 = 2.\cdot 10^{-5}\,\frac{1}{s}h_1 = 2.\cdot 10^{-5}\,\frac{1}{s}0.234m = 0.4762\cdot 10^{-5}\,\frac{m}{s}$$

$$q_2 = 5\cdot 10^{-7}\,\frac{1}{s}(h_2 - h_1) = 5\cdot 10^{-7}\,\frac{1}{s}(9.762m - 0.238m) = 0.4762.\cdot 10^{-5}\,\frac{m}{s} \quad (!)$$

$$q_3 = 2.\cdot 10^{-5}\,\frac{1}{s}(10.m - h_2) = 2.\cdot 10^{-5}\,\frac{1}{s}(10.m - 9.762m) = 0.4762\cdot 10^{-5}\,\frac{m}{s} \quad (!)$$

$$q = q_1 = q_2 = q_3 = 0.4762\cdot 10^{-5}\,\frac{m}{s}$$

$$= 0.4762\cdot 10^{-5}\,\frac{m^3/s}{m^2} = 0.4762\cdot 10^{-5}\,\frac{10^3 lt/(1/(60\cdot 60)hr)}{m^2} =$$

$$= 17.14\,\frac{lt/hr}{m^2}$$