ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΤΟΥ ΣΥΝΕΧΟΥΣ ΜΕΣΟΥ
Σχολή Πολιτικών Μηχανικών, Εξ. Διδ. 04
Καθηγητής Ι. Βαρδουλάκης, Σ.Ε.Μ.Φ.Ε.
8:30 π.μ., Τρίτη 15 Ιουλίου 2003

ΘΕΜΑ 1:

Για ένα μονοδιάστατο Συνεχές δίδεται η κίνηση των υλικών σημείων:

$$x = \chi^L(\xi, t) = \frac{\xi}{1+\xi t} \quad , \quad t \geq 0 .$$

Να προσδιορισθούν: α) Η ταχύτητα και επιτάχυνση σε περιγραφή κατά Lagrange.
β) Να δοθεί η περιγραφή της κίνησης , της ταχύτητας και της επιτάχυνσης κατά Euler.

Απαντήσεις

1. Περιγαφή κατά Lagrange της ταχύτητας,

$$v^L(\xi,t) = \left.\frac{\partial \chi^L}{\partial t}\right|_\xi = \xi\left(-\frac{1}{(1+\xi t)^2}\xi\right) = -\frac{\xi^2}{(1+\xi t)^2} = -x^2$$

και της επιτάχυνσης

$$a^L(\xi,t) = \frac{\partial v^L}{\partial t} = -\xi^2 \frac{-2}{(1+\xi t)^3}\xi = \frac{2\xi^3}{(1+\xi t)^3}$$

Με τη χρήση του Maple 7:

restart;

chiL(xi,t):=xi/(1+xi*t);

$$\mathrm{chiL}(\xi, t) := \frac{\xi}{1+\xi\, t}$$

vL(xi,t):=diff(chiL(xi,t),t);

$$\mathrm{vL}(\xi, t) := -\frac{\xi^2}{(1+\xi\, t)^2}$$

al(xi,t):=diff(vL(xi,t),t);

$$\mathrm{al}(\xi, t) := 2\,\frac{\xi^3}{(1+\xi\, t)^3}$$

2. Περιγραφή κατά Euler της ταχύτητας:

$$x = \chi^L(\xi,t) = \frac{\xi}{1+\xi t} \quad , \quad t \geq 0 \quad \Rightarrow \quad (1+\xi t)x = \xi$$

$$\xi(1-xt) = x \quad \Rightarrow \quad \xi = \chi^E(x,t) = \frac{x}{1-xt}$$

$$v^E(x,t) = v^L(\chi^E(x,t),t) = -x^2$$

$$a^E(x,t) = a^L(\chi^E(x,t),t) = -2x^3$$

chiE(x,t):=x/(1-x*t);

$$\mathrm{chiE}(x, t) := \frac{x}{1 - x\,t}$$

ve(x,t):=simplify(subs(xi=x/(1-x*t),-xi^2/(1+xi*t)^2));

$$\mathrm{ve}(x, t) := -x^2$$

ae(x,t):=simplify(subs(xi=x/(1-x*t),-2*xi^3/(1+xi*t)^3));

$$\mathrm{ae}(x, t) := -2\,x^3$$

ΘΕΜΑ 2:

Η θεωρία κυκλοφοριακής ροής βασίζεται στην εξισώση

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial x}=0 \qquad (1)$$

1. Χαρακτηρίσατε στα πλαίσια της Μηχανικής του Συνεχούς Μέσου την εξίσωση αυτή και περιγράψατε μαθηματικά πώς και κάτω από ποιές προϋποθέσεις προκύπτει αυτή η εξίσωση.

2. Υποθέτουμε ότι κάτω από κανονικές συνθήκες η εμπειρική σχέση ταχύτητας-πυκνότητας κυκλοφοριακής ροής είναι κατά προέγγιση η εξής:

$$V=v_{max}\left(1-\frac{\rho}{\rho_{max}}\right) \quad , \quad v_{max}=80.\frac{km}{hr} \quad , \quad \rho_{max}=150.\frac{cars}{km} \qquad (2)$$

Να υπολογισθούν η πυκνότητα κυκλοφοριακής ροής ρ_m και η ροή q_m, που αντστοιχούν στη βέλτιστη ροή οχημάτων.

3. Με βάση την καταστατική σχέση (2), η Εξ. (1) μεσχηματίζεται στην εξίσωση κυκλοφοριακής ροής. Να διατυπωθεί εν προκειμένω η εξίωση αυτή και να χαρακτηρισθεί.

4. Με ποιά ταχύτητα μεταδίδονται γραμμικά κύματα πυκνότητας στη κατάσταση βέλτιστης ροής.

<u>Απαντήσεις</u>

1. Η εξισώση

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial x}=0 \qquad (1)$$

είναι μία εξίσωση διατήρησης της μάζας σε ένα Συνεχές Μέσο εφοδισμένο με πυκνότητα $\rho(x,t)$ και ταχύτητα $v(x,t)$ των υλικών του σημείων. Η εξίσωση αυτή προκύπτει από την αρχή διατήρηση της μάζας,

$$m(t)=\int_a^b \rho(x,t)\,dx$$

$$\dot{m}=\frac{dm}{dt}=0 \quad \Rightarrow \quad \int_a^b\left[\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(\rho v)\right]dx=0$$

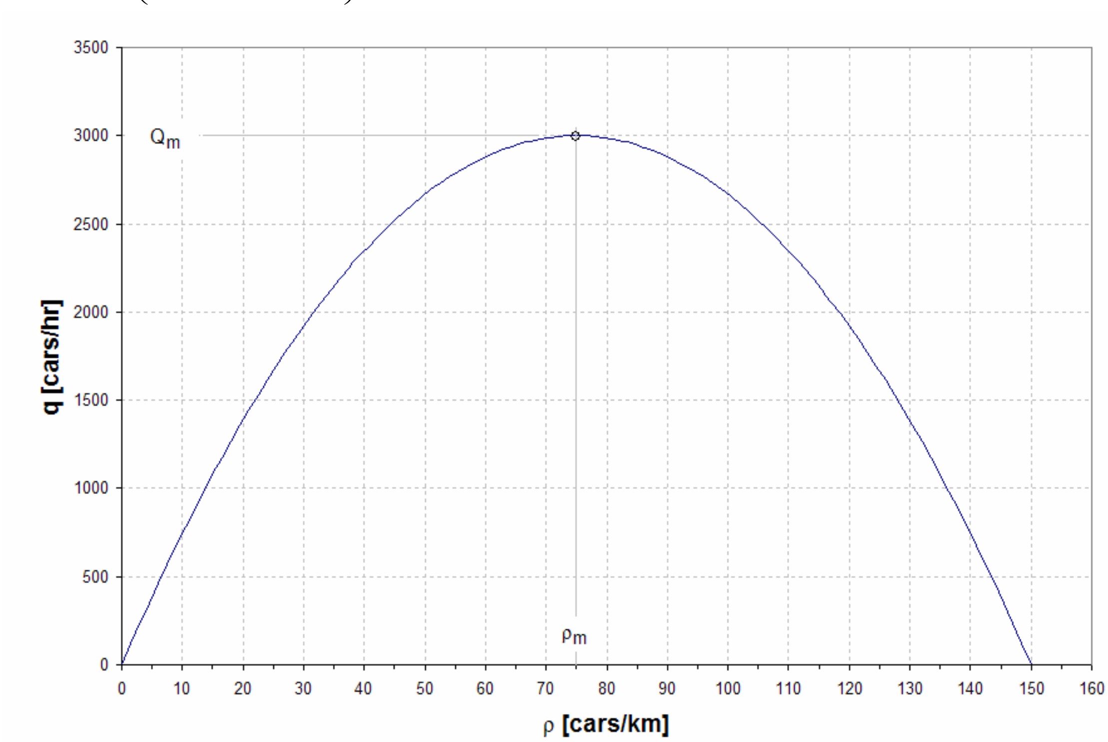
Αν δεχθούμε πώς η παραπάνω καθολική έκφραση της αρχής διατήρησης της μάζας ισχύει γιά κάθε υποδίαστημα $(c,d) \subset [a,b]$ τότε από αυτή προκύπτει η τοπική έκφραση της αρχής διατήρησης της μάζας, Εξ. (1). Αρα προϋπόθεση για την συνεπαγωγή αυτή είναι στο θεωρούμενο διάστημα η συναρτήσεις $\rho(x,t)$ και $v(x,t)$ να είναι παραγωγίσιμες (και κατά συνέπεια συνεχείς).

2. Η παροχή, δίδεται από τη σχέση:

$$q = Q(\rho) = \rho v = \rho V(\rho) = \rho v_{max}\left(1 - \frac{\rho}{\rho_{max}}\right)$$

$$= v_{max}\rho_{max}\left(\frac{\rho}{\rho_{max}} - \left(\frac{\rho}{\rho_{max}}\right)^2\right)$$

$$= 1200\left(\frac{\rho}{150} + \left(\frac{\rho}{150}\right)^2\right) \quad [\text{cars}/\text{hr}]$$



$$\frac{dQ}{d\rho} = v_{max}\left(1 - 2\frac{\rho}{\rho_{max}}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \rho = \rho_m = \frac{1}{2}\rho_{max} = 75.\frac{\text{cars}}{\text{km}}$$

$$Q_m = Q(\rho_m) = \rho_{max}v_{max}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}\rho_{max}v_{max}$$

$$= \frac{1}{4}\cdot 150 \cdot 80 = 3000.\frac{\text{cars}}{\text{km}}$$

3. Εξίσωση κυκλοφοριακής ροής:

Από την εξίσωση διατήρησης της μάζας και τη καταστατική σχέση για τη ταχύτητα παίρνουμε

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial q}{\partial x}=0 \quad , \quad q=Q(\rho) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{dQ}{d\rho}\frac{\partial \rho}{\partial x}=0$$

την εξίσωση κυκοφοριακής ροής,

$$\underline{\frac{\partial \rho}{\partial t}+c\frac{\partial \rho}{\partial x}=0}$$

όπου

$$c=C(\rho)=\frac{dQ}{d\rho}=v_{max}\left(1-2\frac{\rho}{\rho_{max}}\right)$$

Αρα, μεταβολές στην πυκνότητα κυκλοφοριακής ροής υπακούουν σε μια οιονεί γραμμική διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους ως προς x και t. Στη θεωρία διαφορικών εξισώσεων μια τέτοια εξίσωση ταξινομείται ως εξίσωση **υπερβολικού τύπου**, και περιγράφει φυσικά φαινόμενα που έχουν κυματικό χαρακτήρα τα δε αντίστοιχα κύματα λέγονται είτε **υπερβολικά ή κινηματικά.** Η ποσότητα c είναι η ταχύτητα μεταδόσεως των μικρών διαταρχών πυκνότητας.

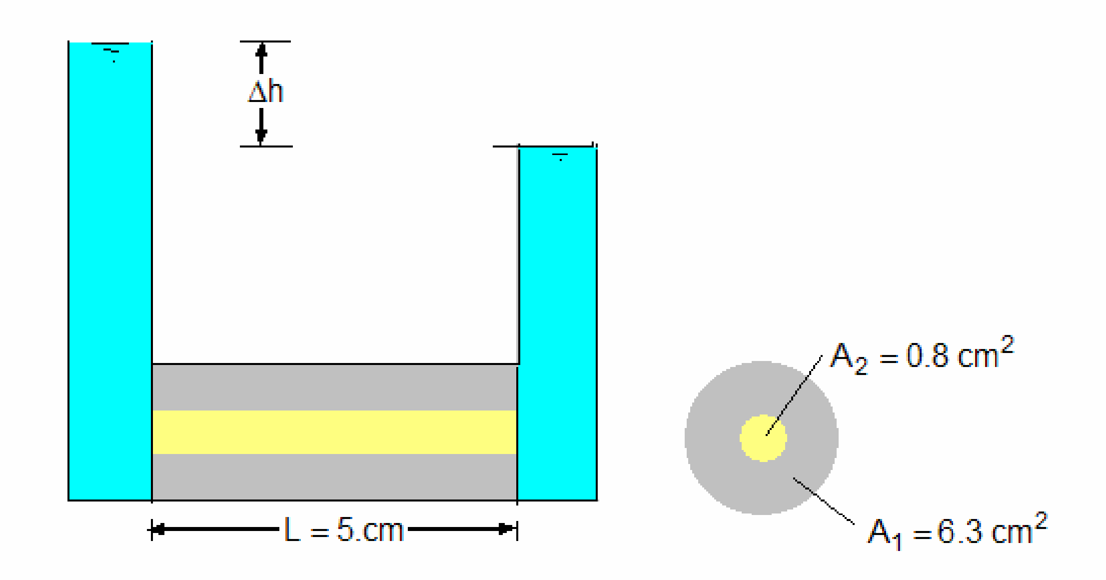
4. Παρατηρούμε ότι για

$$\rho=\rho_m \quad \Rightarrow \quad c=c_m=0$$

Αρα στη κατάσταση βέλτιστης ροής μικρές διαταραχές της πυκνότητας δεν μεταδίδονται.

ΘΕΜΑ 3:

Ο πειραματικός σωλήνας του σχήματος, κυλινδρικής διατομής, περιέχει σύνθετο πορώδες υλικό μήκους $L = 5.cm$ και ύδωρ με διαφορά υδραυλικού ύψους Δh. Το σύνθετο υλικό αποτελείται από τον εξωτερικό κοίλο κυκλικό κύλινδρο με συντελεστή διαπερατότητας $k_w^{(1)} = 10^{-4}\,\dfrac{cm}{s}$ και εμβαδόν διατομής $A_1 = 6.3\,cm^2$ και από τον εσωτερικό κύλινδρο με συντελεστή διαπερατότητας $k_w^{(2)} = 10^{-2}\,\dfrac{cm}{s}$ και εμβαδόν διατομής $A_2 = 0.8\,cm^2$. Η συνολική, μόνιμη παροχή του ύδατος είναι $Q = 0.4\,\dfrac{lt}{min}$.



1. Να υπολογισθεί η πτώση υδραυλικού ύψους Δh κατά μήκος του δοκιμίου.

2. Να υπολογισθούν σε ποσοστά της συνολικής παροχής οι μερικές παροχές Q_2 και Q_1 διαμέσου του διαπερατού πυρήνα (2) και του σχετικά λιγότερο διαπερατού περιβάλλοντος αυτόν κοίλου κυλίνδρου (1), αντιστοίχως.

<u>Απαντήσεις</u>

1. Παρατηρούμε ότι η πτώση πιέσεως κατά μήκο και των δύο σωλήνων είναι κοινή (δίαταξη παράλληλη), οπότε βασει του νόμου του Darcy έχουμε:

$$\frac{Q_1}{A_1} = k_w^{(1)}\frac{\Delta h}{L}$$

$$\frac{Q_2}{A_2} = k_w^{(2)} \frac{\Delta h}{L}$$

με δεδομένη τη συνολική παροχή

$$Q = Q_1 + Q_2$$

Αρα,

$$Q = \left(A_1 k_w^{(1)} + A_2 k_w^{(2)}\right)\frac{\Delta h}{L} \quad \Rightarrow \quad \underline{\Delta h = \frac{QL}{A_1 k_w^{(1)} + A_2 k_w^{(2)}}}$$

Με βάση τα δεδοέν παίρνουμε:

$$Q = 0.4\frac{lt}{min} = 0.4\frac{1000cm^3}{60\,sec} = 6.67\frac{cm^3}{s}$$

$$\Delta h = \frac{6.67\frac{cm^3}{s}\cdot 5.cm}{6.3cm^2\cdot 10^{-4}\frac{cm}{s} + 0.8cm^2\cdot 10^{-2}\frac{cm}{s}}$$
$$= \frac{33.33}{0.00063 + 0.008}cm = \frac{33.33}{0.00863} = 3862.5cm$$

$$= 3.86m$$

2. Οπότε οι μερικές παροχές είναι,

$$Q_1 = A_1 k_w^{(1)}\frac{\Delta h}{L} = 6.3cm^2\cdot 10^{-4}\frac{cm}{s}\frac{3862.5cm}{5.cm} = 0.487\frac{cm}{s}$$
$$= 0.487\frac{60}{1000}\frac{lt}{min} = 0.0292\frac{lt}{min} \quad \Rightarrow \quad Q_1/Q = 7.3\%$$

$$Q_2 = A_2 k_w^{(2)}\frac{\Delta h}{L} = 0.8cm^2\cdot 10^{-2}\frac{cm}{s}\frac{3862.5cm}{5.cm} = 6.18\frac{cm}{s}$$
$$= 6.18\frac{60}{1000}\frac{lt}{min} = 0.3708\frac{lt}{min} \quad \Rightarrow \quad Q_2/Q = 92.7\%$$