ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΤΟΥ ΣΥΝΕΧΟΥΣ ΜΕΣΟΥ
Σχολή Πολιτικών Μηχανικών, Εξ. Διδ. 04
Καθηγητής Ι. Βαρδουλάκης
Τομέας Μηχανικής Σ.Ε.Μ.Φ.Ε.
Δευτέρα 30 Αυγούστου 2004

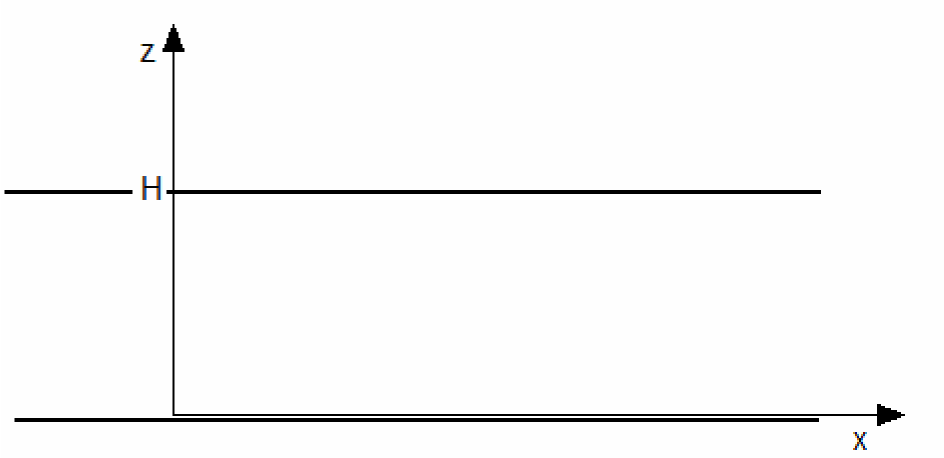
Όνομα Φοιτητή: ....
Εξάμηνο:..
Αρ. Φοιτ. Ταυτ.:...

	Θέμα 1	Θέμα 2	Θέμα 3

ΘΕΜΑ 1
Δίδεται το πεδίο ταχύτητας ροής ενός ρευστού,

$$v_x = U(t)\left(\frac{z}{H} - \left(\frac{z}{H}\right)^2\right)$$

$$v_y = v_z = 0$$



1. Να διερευνηθεί άν η ροή είναι ισόχωρη ή όχι.

2. Να διερευνηθεί άν η ροή είναι αστρόβιλη ή όχι και υπολογισθεί ο στροβιλισμός της ροής.

3. Να υπολογισθεί ο λόγος της μέγιστης προς τη μέση ταχύτητα ροής.

4. Έστω $U(t) = U_0 = \sigma\tau\alpha\theta.$ και μ το ιξώδες του ρευστού. Για στρωτή ροή να υπολογισθούν οι θέσεις και η ένταση της αναπτυσσόμενης μέγιστης διατμητικής τάσης.

<u>Λύση</u>

1) Γενικώς θα αναλύσουμε τη βαθμίδα της ταχύτητας grad($\vec{v}$) σε ένα συμμετρικό τανυστή, που περιγράφει το **ρυθμό της παραμόρφωσης** και σε έναν αντισυμμμετρικό τανυστή που περιγράφει το **στροβιλισμό**,

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = D_{ij} + W_{ij}$$

όπου οι δείκτες $i, j = 1,2,3$ αντιστοιχούν στις καρτεσιανές συντεταγμένες $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$ και

$$D_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)$$

$$W_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)$$

Ομοίως ορίζουμε και τον αποκλίνοντα του ρυθμού της παραμόρφωσης

$$D_{ij} = \frac{1}{3} D\, \delta_{ij} + D'_{ij}$$

όπου D είναι το **ίχνος** του $[\overline{D}]$

$$D = D_{11} + D_{22} + D_{33}$$

που περιγράφει την αλλαγή του όγκου του ρευστού.

Άρα, με δεδομένα

$$v_x = U(t)\left(\frac{z}{H} - \left(\frac{z}{H}\right)^2\right)$$

$$v_y = v_z = 0$$

έχουμε

$$D = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

Άρα η ροή είναι ισόχωρη.

2) Με δεδομένο ότι

$$[\overline{W}] = \begin{bmatrix} 0 & W_{12} & W_{13} \\ W_{21} & 0 & W_{23} \\ W_{13} & W_{23} & 0 \end{bmatrix}$$

έχουμε ότι ο πίνακας του στροβιλισμού έχει ένα μόνο σημαντικό στοιχείο,

$$[\overline{W}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\omega \\ 0 & 0 & 0 \\ \omega & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

όπου

$$\omega = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial z}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}U(t)\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{H} - \left(\frac{z}{H}\right)^2\right)$$

$$= -\frac{1}{2}U(t)\left(\frac{1}{H} - \frac{2z}{H^2}\right)$$

$$= -\frac{U(t)}{2H}\left(1 - 2\frac{z}{H}\right)$$

Σημειωτέον ότι στα σύνορα $z = 0$ και $z = H$ ο στροβιλισμός παίρνει αντίστοιχα τις τιμές

$$\omega = \mp\frac{U(t)}{2H}$$

Άρα η ροή δεν έναι αστρόβιλη.

3) Η **μέγιστη ταχύτητα** ροής βρίσκεται από τη σχέση

$$\frac{dv_x}{dz} = 0 \quad \Rightarrow \quad U(t)\left(\frac{1}{H} - \frac{2z}{H^2}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad z = \frac{H}{2}$$

και

$$v_{x,max} = v(H/2,t) = \frac{1}{4}U(t)$$

Η **μέση ταχύτητα** ροής είναι,

$$\bar{v}(t) = \frac{1}{H}\int_0^H v_x(z,t)dz = \frac{1}{H}U(t)\int_0^H \left(\frac{z}{H} - \frac{z^2}{H^2}\right)dz$$

$$= \frac{1}{H}U(t)\left[\frac{1}{2}\frac{z^2}{H} - \frac{1}{3}\frac{z^3}{H^2}\right]_0^H$$

$$= \frac{1}{H}U(t)\frac{H}{6} \quad \Rightarrow \quad \bar{v}(t) = \frac{1}{6}U(t)$$

Οπότε,

$$\frac{v_{x,max}}{\bar{v}} = \frac{\frac{1}{4}U(t)}{\frac{1}{6}U(t)} = 1.5$$

4) Συμφώνως με τον καταστατικό νόμο του Νεύτωνα για **ιξώδη ή συνεκτικά ρευστά** έχουμε ότι,

$$\underline{\tau = \mu\,\gamma}$$

όπου εν προκειμένω

$$\gamma = \frac{\partial v_x}{\partial z} = \frac{U_0}{H}\left(1 - 2\frac{z}{H}\right)$$

Ο ρυθμός διάτμησης παίρνει ακρότατες τιμές στα σύνορα $z = 0$ και $z = H$,

$$\gamma = \pm\frac{U_0}{H}$$

Άρα η ένταση της αναπτυσσόμενης μέγιστης διατμητικής τάσης είναι,

$$|\tau| = \mu\frac{U_0}{H}$$

ΘΕΜΑ 2

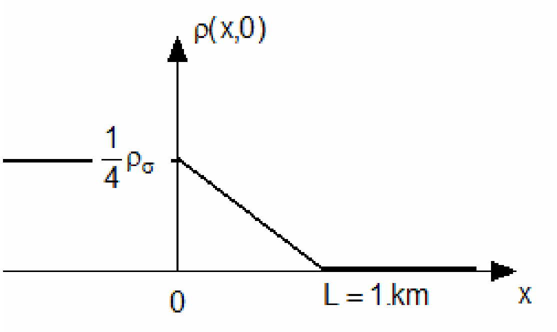
Θεωρούμε ένα πρόβλημα κυκλοφοριακής ροής, που εν προκειμένω περιγράφεται από τη συνάρτηση,

$$q = Q(\rho) = 4Q_m \frac{\rho}{\rho_\sigma}\left(1 - \frac{\rho}{\rho_\sigma}\right)$$

όπου $Q_m = 1500\ \text{cars/hr}$ και $\rho_\sigma = 150\ \text{cars/km}$.

Δίδεται η αρχική συνθήκη($t = t_0 = 0$):

$$\rho(x,0) = \begin{cases} \frac{1}{4}\rho_\sigma & x < 0 \\ \frac{1}{4}\rho_\sigma (L - x) & 0 < x < L = 1.\text{km} \\ 0 & L < x \end{cases}$$



1. Να <u>σχεδιασθούν</u> στο επίπεδο (x,t), υπό κλίμακα οι χαρακτηριστικές γραμμές στο διάστημα $-1.\text{km} \le x \le 2.\text{km}$ με διαμέριση $\Delta x = 250.\text{m}$.

2. Για την ίδια διαμέριση να <u>σχεδιασθεί</u> υπό κλίμακα η κατανομή της πυκνότητας κυκλοφοριακής ροής στο διάστημα $-1.\text{km} \le x \le 2.\text{km}$ για τη χρονική στιγμή, $t = t_1 = 3.\text{min}$.

<u>Λύση</u>

Η κυκλοφοριακή ροή συνδέεται με την ταχυτητα ως εξής:

$$q = Q(\rho) = \rho\, V(\rho)$$

Οπότε με δεδομένη

$$Q = 4Q_m \frac{\rho}{\rho_\sigma}\left(1 - \frac{\rho}{\rho_\sigma}\right) \quad , \qquad Q(\rho) := 40\,\rho - \frac{4}{15}\rho^2$$

$$v = V(\rho) = \frac{Q(\rho)}{\rho} = 4\frac{Q_m}{\rho_\sigma}\left(1 - \frac{\rho}{\rho_\sigma}\right) \quad , \qquad V(\rho) := 40 - \frac{4}{15}\rho$$

Η διαφορική εξίσωση που διέπει το πρόβλημα της κυκλοφοριακής ροής είναι η εξής,

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + C(\rho)\frac{\partial \rho}{\partial x} = 0}$$

όπου

$$c = C(\rho) = \frac{dQ}{d\rho} = 4\frac{Q_m}{\rho_\sigma}\left(1 - 2\frac{\rho}{\rho_\sigma}\right) \quad , \qquad C(\rho) := 40 - \frac{8}{15}\rho$$

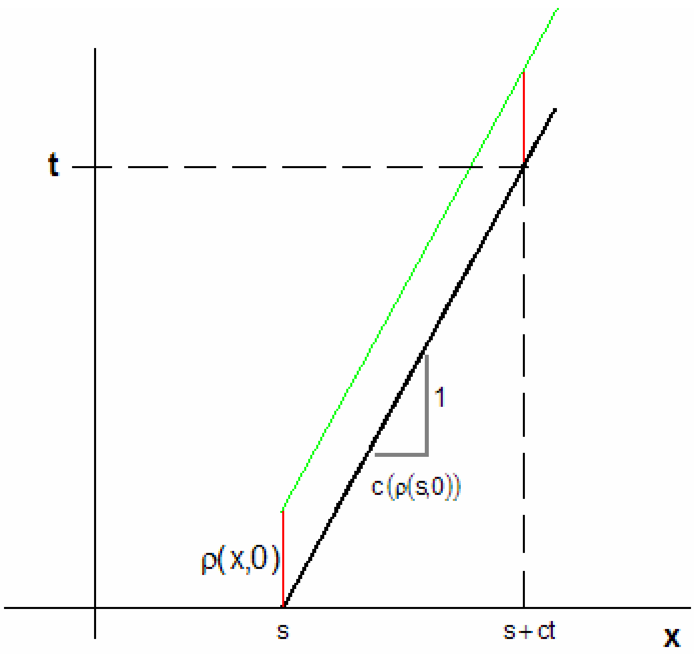
Με βάση την αρχική συνθήκη

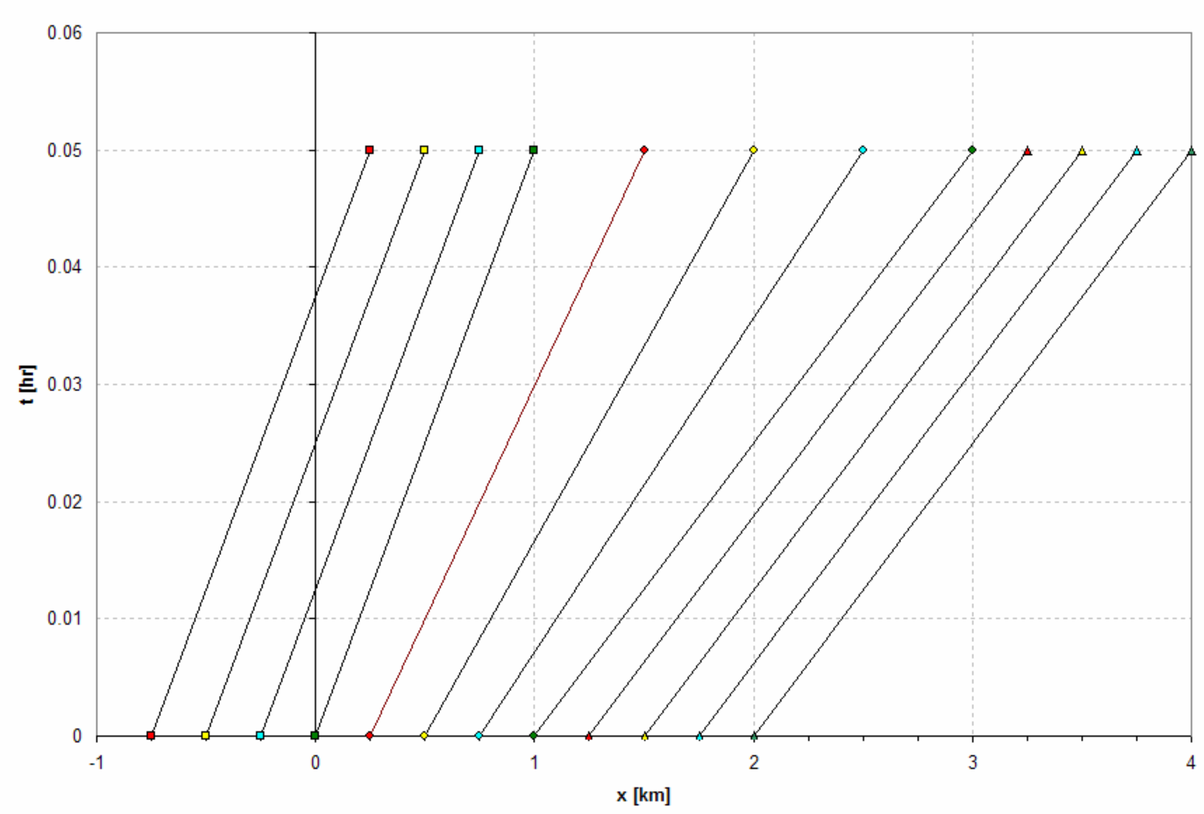
$$\rho(x,0) = \begin{cases} \frac{1}{4}\rho_\sigma & x < 0 \\ \frac{1}{4}\rho_\sigma (L - x) & 0 < x < L = 1.km \\ 0 & L < x \end{cases}$$

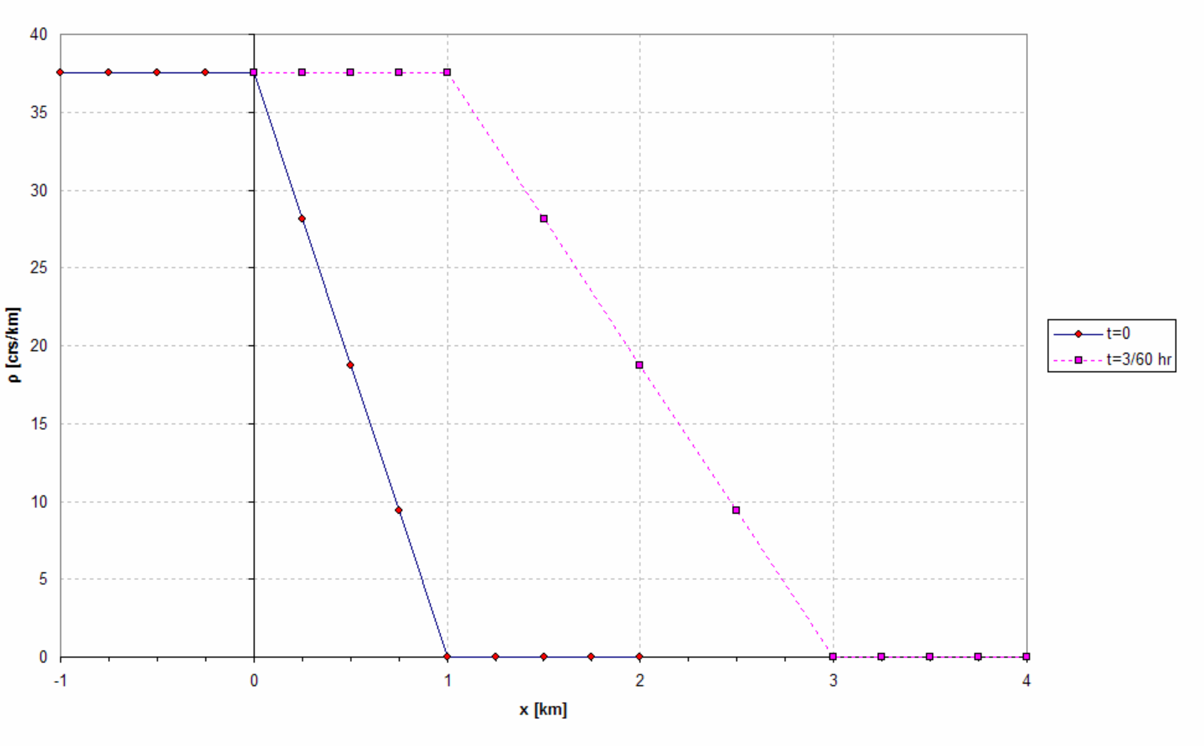
έχουμε ότι,

$$c_1 = C\left(\frac{1}{4}\rho_\sigma\right) = 4\frac{Q_m}{\rho_\sigma}\left(1-2\frac{\frac{1}{4}\rho_\sigma}{\rho_\sigma}\right) = 2\frac{Q_m}{\rho_\sigma}$$

Qm	1500	crs/hr	
ρσ	150	crs/km	
L	1	km	
t	0.05	hr	
s	ρ(x,0)	c	x=s+c*t
[km]	[crs/km]	[km/hr]	[km]
-1	37.5	20	0
-0.75	37.5	20	0.25
-0.5	37.5	20	0.5
-0.25	37.5	20	0.75
0	37.5	20	1
0.25	28.125	25	1.5
0.5	18.75	30	2
0.75	9.375	35	2.5
1	0	40	3
1.25	0	40	3.25
1.5	0	40	3.5
1.75	0	40	3.75
2	0	40	4




0.06
0.05
0.04
0.03
0.02
0.01
0
t [hr]
-1
0
1
2
3
4
x [km]


40
35
30
25
20
15
10
5
0
ρ [crs/km]
-1
0
1
2
3
4
x [km]
t=0
t=3/60 hr

ΘΕΜΑ 3

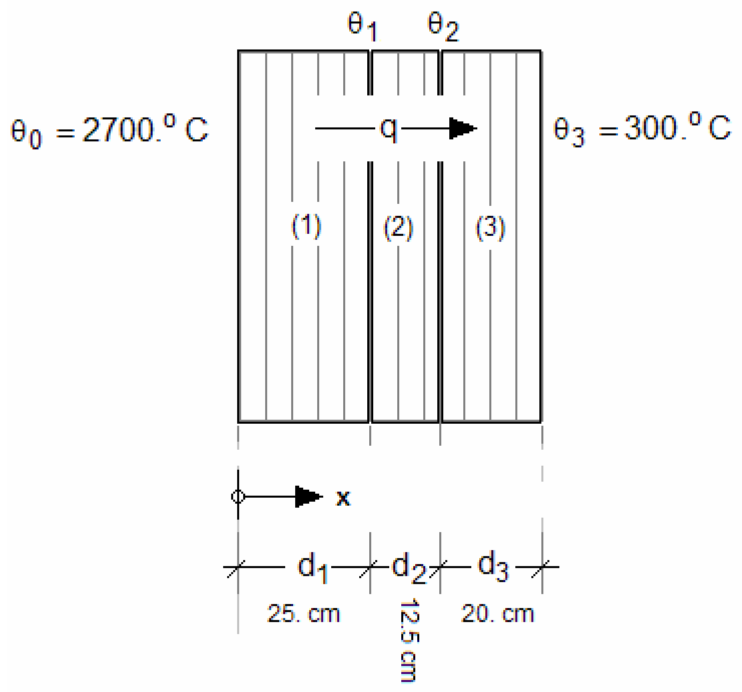
Θεωρούμε το τοίχωμα ενός κλίβανου. Αυτό αποτελείται από τρείς στρώσεις:

(1) Πυρότουβλα, με πάχος $d_1 = 25.\text{cm}$ και συντελεστή θερμικής αγωγιμότητας $k_{F1} = 105 \dfrac{\text{cal}}{\text{hr} \cdot \text{dm} \cdot {}^{o}\text{C}}$.

(2) Μονωτικά τούβλα, με πάχος $d_2 = 12.5\text{cm}$ και συντελεστή θερμικής αγωγιμότητας $k_{F2} = 12 \dfrac{\text{cal}}{\text{hr} \cdot \text{dm} \cdot {}^{o}\text{C}}$.

(3) Ερυθρά τούβλα, με πάχος $d_3 = 20.\text{cm}$ και συντελεστή θερμικής αγωγιμότητας $k_{F3} = 75 \dfrac{\text{cal}}{\text{hr} \cdot \text{dm} \cdot {}^{o}\text{C}}$.

Η εσωτερική θερμοκρασία του κλίβανου είναι $\theta_0 = 2700.{}^{o}\text{C}$ ενώ η εξωτερική θερμοκρασία του διατηρείται σταθερή στην τιμή $\theta_3 = 300.{}^{o}\text{C}$. Να υπολογισθεί η θερμική απώλεια q σε $\text{kcal}/(\text{m}^2\text{hr})$ διαμέσου του τοιχώματος του κλίβανου.



Λύση

Ο νόμος του Fourier για μονοδιάστατη ροή θερμότητας έχει ως εξής,

$$q_x = -k_F \frac{\partial \theta}{\partial x}$$

Στην παραπάνω έκφραση του νόμου του Fourier, k_F είναι ο **συντελεστής θερμικής αγωγιμότητας** του υλικού.

Για μόνιμη ροή θερμότητας έχουμε

$$\nabla^2 \theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2\theta}{dx^2} = 0$$

ή

$$\theta = c_1 + c_2 x$$

Σε κάθε μία στρώση η θερμοκρασία θα μεταβάλλεται γραμμικά:

(1): $\theta^{(1)} = \theta_0 + (\theta_1 - \theta_0)\dfrac{x}{d_1} \quad , \quad 0 \le x < d_1 \quad \Rightarrow$

$$q^{(1)} = -k_{F1} \frac{\theta_1 - \theta_0}{d_1}$$

(2): $\theta^{(2)} = \theta_1 + (\theta_2 - \theta_1)\dfrac{x - d_1}{d_2} \quad , \quad d_1 < x < d_1 + d_2 \quad \Rightarrow$

$$q^{(2)} = -k_{F2} \frac{\theta_2 - \theta_1}{d_2}$$

(3): $\theta^{(2)} = \theta_2 + (\theta_3 - \theta_2)\dfrac{x - d_1 - d_2}{d_3} \quad , \quad d_1 + d_2 < x \le d_1 + d_2 + d_3 \quad \Rightarrow$

$$q^{(3)} = -k_{F3} \frac{\theta_3 - \theta_2}{d_3}$$

Επειδή θερμότητα ούτε χάνεται ούτε παράγεται στις διεπιφάνειες , εχουμε ότι,

$q^{(1)} = q^{(2)} \quad (x = d_1)$ και $q^{(2)} = q^{(2)} \quad (x = d_1 + d_2)$

Άρα

$$q = q^{(1)} = q^{(2)} = q^{(3)} \quad \Rightarrow$$

$$\theta_1 - \theta_0 = -q\frac{d_1}{k_{F1}}$$

$$\theta_2 - \theta_1 = -q\frac{d_2}{k_{F2}}$$

$$\theta_3 - \theta_2 = -q\frac{d_3}{k_{F3}}$$

Οπότε

$$(\theta_1 - \theta_0) + (\theta_2 - \theta_1) + (\theta_3 - \theta_2) = -q\sum_{i=1}^{3}\frac{d_i}{k_{Fi}} \quad \Rightarrow$$

$$q = \frac{\theta_0 - \theta_1}{\sum_{i=1}^{3}\frac{d_i}{k_{Fi}}} = \frac{2700^{o}C - 300^{o}C}{\left(\frac{2.5}{105} + \frac{1.25}{12} + \frac{2}{75}\right)\frac{dm}{cal/(hr \cdot dm \cdot {}^{o}C)}}$$

$$= \frac{2400^{o}C}{0.1546\,\frac{dm^2 hr^{o}C}{cal}}$$

$$= \frac{2400}{0.1546}\frac{10^{-3}kcal}{(0.1m)^2 hr} = 1551.96\frac{kcal}{m^2 \cdot hr}$$