ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΤΟΥ ΣΥΝΕΧΟΥΣ ΜΕΣΟΥ
Σχολή Πολιτικών Μηχανικών, Εξ. Διδ. 04
Καθηγητής Ι. Βαρδουλάκης, Σ.Ε.Μ.Φ.Ε.
12:00 μ.- 15:00 μ.μ., Τετάρτη 17 Αυγούστου 2003
Γκ. 104, 105, 18, 20, 107, 207, 308

Θέμα 1:

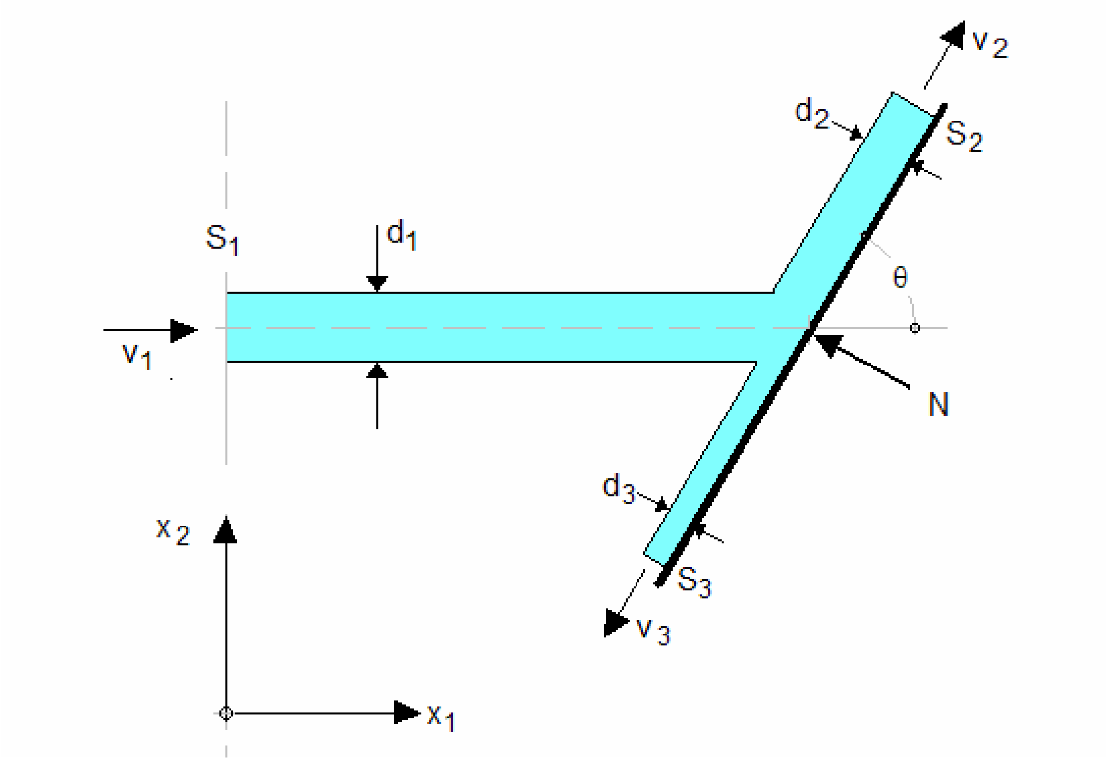
Δίδεται το πεδίο ταχυτήτων σε δυο διαστάσεις

$v_x = (1+t)x \quad , \quad v_y = (2+t)y$

Βρείτε την εξίσωση της γραμμής ροής που τη χρονική στιγμή $t=0$ διέρχεται από το σημείο $P(1,2)$.

Θέμα 2.

Ενας διδιάστατος πίδακας ύδατος προσκρούει πάνω σε ένα επίπεδο πέτασμα υπό γωνία θ ($0<\theta\le 90^o$). Το πλάτος του πίδακα είναι d_1 και η ταχύτητά του είναι v_1. Να βρεθεί η γωνία θ, για την οποία τα πάχη των δύο στρωμάτων ύδατος, d_2 και d_3 στα οποία διασπάται ο πίδακας και τα οποία ρέουν παράλληλα προς το πέτασμα ικανοποιούν τη σχέση, $d_2 = 2d_3$. Επίσης να υπολογισθεί στη περίπτωση αυτή η ορθή δύναμη N, που ασκείται επί του πετάσματος ανά μονάδα μήκους καθέτως προς το επίπεδο του σχήματος. Δίδονται: $v_1 = 15.\,m/s$ και $d_1 = 25.\,cm$. Η επίδραση της βαρύτητας και του ιξώδους του ύδατος θεωρούνται αμελητέες.



<u>Θέμα 3.</u>

Θεωρούμε ότι στο πρόβλημα κυκλοφοριακής ροής

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + C(\rho)\frac{\partial \rho}{\partial x} = 0$$

η σχέση ταχύτητας-πυκνότητας

$$V(\rho) = v_{max}\left(1 - \frac{\rho}{\rho_{max}}\right)$$

Να υπολογισθεί και να σχεδιασθεί την κατανομή της πυκνότητας $\rho = \rho(x,t)$ για την παρακάτω αρχική συνθήκη

$$\rho(x,0) = \begin{cases} 0.25 \cdot \rho_{max} & x < 0 \\ \\ 0.5 \cdot \rho_{max} & x > 0 \end{cases}$$

για τη χρονική στιγμή $t = 2.\,\text{min}$

Λύσεις

<u>Θέμα 1</u>:

Αναγνωρίζουμε τα χαρακτηριστικά του υγρού και του πεδίου ροής. Η ροή είναι μή μόνιμη και διδιάστατη. Οι σχέσεις που ισχύουν για το ρευστό είναι:

- Εξίσωση συνέχειας: $$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \qquad (1)$$
- Εξίσωση γραμμής ροής: $$\frac{dx}{u}=\frac{dy}{v} \qquad (2)$$

Η εξίσωση συνέχειας $\nabla \cdot V = 0$ δεν ικανοποιείται. Αυτό δεν σημαίνει ότι δεν είναι μία ροή πραγματικού ρευστού. Μάλλον σημαίνει ότι δεν είναι ένα ασυμπίεστο ρευστό. Θα υποθέσουμε ότι το πρόβλημα είναι μία αυστηρώς μαθηματική άσκηση.

(α) Για να βρούμε την εξίσωση της γραμμής ροής, αντικαθιστούμε την κατάλληλη ταχύτητα στην εξίσωση (2) και έχουμε:

$$\frac{dx}{(1+t)x}=\frac{dy}{(2+t)y} \quad \Rightarrow \quad (2+t)\ln x=(1+t)\ln y+\ln c$$

Για να υπολογίσουμε τη σταθερά, χρησιμοποιούμε την αρχική συνθήκη:

$$0=\ln 2+\ln c$$

Τακτοποιώντας τους όρους και παίρνοντας τους αντιλογαρίθμους έχουμε:

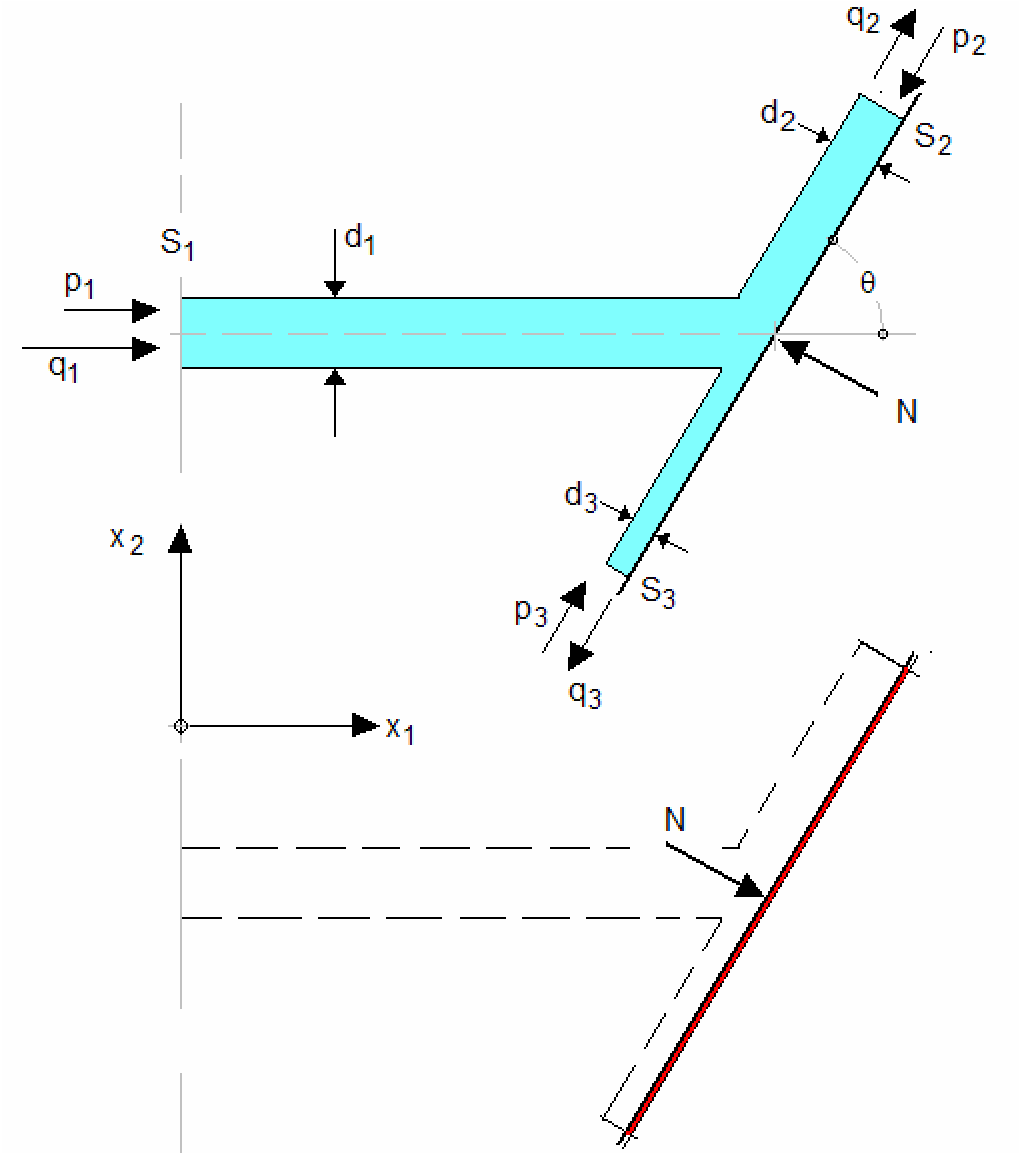
$$\ln x^{2+t}=\ln y^{1+t}-\ln 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{y^{1+t}}{x^{2+t}}=2$$

ή

$$y=\left(2x^{2+t}\right)^{\frac{1}{1+t}}$$

Θέμα 2:

Θεωρούμε τον όγκο αναφοράς του ρευστού μεταξύ των διατομών (1) , (2) και (3)



Στην είσοδο (1) η διατομή είναι S_1, η πίεση p_1 και η ταχύτητα $\vec{v}^{(1)} = v_1\vec{e}_1$

Οι αντίστοιχες τιμές στις εξόδους είναι :

(2) S_2, p_2 και $\vec{v}^{(2)} = v_2 \cos\theta\, \vec{e}_1 + v_2 \sin\theta\, \vec{e}_2$

(3) S_3, p_3 και $\vec{v}^{(3)} = -v_3 \cos\theta\, \vec{e}_1 - v_3 \sin\theta\, \vec{e}_2$

Οι παροχές στις διατομές εισόδου και εξόδου είναι αντιστοίχως

$$q_n^{(1)} = \rho \vec{v}^{(1)} \cdot (-\vec{e}_1) = -\rho v_1$$

$$q_n^{(2)} = \rho \vec{v}^{(2)} \cdot (\cos\theta\, \vec{e}_1 + \sin\theta\, \vec{e}_2) = \rho v_2$$

$$q_n^{(3)} = \rho \vec{v}^{(3)} \cdot (-\cos\theta\, \vec{e}_1 - \sin\theta\, \vec{e}_2) = \rho v_3$$

Οι αντίσοιχες συνολικές παροχές στις αντίστοιχες θέσεις είναι:

$$Q_1 = \rho v_1 d_1$$

$$Q_2 = \rho v_2 d_2$$

$$Q_3 = \rho v_3 d_3$$

Οπότε από την εξίσωση *συνεχείας της ροής* έχουμε

$$Q_1 = Q_2 + Q_3 \quad \Rightarrow \quad v_1 d_1 = v_2 d_2 + v_3 d_3 \qquad (1)$$

Για την εκτροπή της ροής ο σωλήνας ασκεί στο συγκεκριμένο όγκο αναφοράς του ρευστού την δύναμη (*δράση-actio*)

$$\vec{A} = -N\sin\theta\, \vec{e}_1 - N\cos\theta\, \vec{e}_2$$

η οποία υπολογίζεται από την εξίσωση ***ποσότητας κινήσεως***

$$\boxed{\int_{(\partial V)} q_n v_i dS = \int_{(V)} f_i dV - \int_{(\partial V)} p n_i dS}$$

- $$\int_{(\partial V)} q_n v_i dS = \begin{cases} q_n^{(1)} v_1^{(1)} S_1 + q_n^{(2)} v_1^{(2)} S_2 + q_n^{(3)} v_1^{(3)} S_3 \\ = -\rho v_1^2\, d_1 + \rho v_2^2 \cos\theta\, d_2 - \rho v_3^2 \cos\theta\, d_3 \\ q_n^{(1)} v_2^{(1)} S_1 + q_n^{(2)} v_2^{(2)} S_2 + q_n^{(3)} v_2^{(3)} S_3 \\ = 0 + \rho v_2^2 \sin\theta\, d_2 - \rho v_3^2 \sin\theta\, d_3 \end{cases}$$

- $$\int_{(V)} f_i dV = 0$$

- $$-\int_{(\partial V)} p n_i dS = -\begin{cases} p_1(-1)S_1 + p_2\cos\theta\, S_2 + p_3(-\cos\theta)S_3 + N\sin\theta \\ = -p_1 d_1 + p_2 d_2\cos\theta - p_3 d_3\cos\theta + N\sin\theta \\ \\ p_1(0)S_1 + p_2\sin\theta S_2 + p_3(-\sin\theta)S_3 + N(-\cos\theta) \\ = p_2 d_2\sin\theta - p_3 d_3\sin\theta - N\cos\theta \end{cases}$$

Με την παρατήρηση ότι,

$$p_1 = p_2 = p_3 = p_{ref} = 0 \tag{2}$$

παίρνουμε

$$-\int_{(\partial V)} p n_i dS = \begin{cases} -N\sin\theta \\ \\ N\cos\theta \end{cases} \quad \int_{(\partial V)} q_n v_i dS = \begin{cases} q_n^{(1)} v_1^{(1)} S_1 + q_n^{(2)} v_1^{(2)} S_2 + q_n^{(3)} v_1^{(3)} S_3 \\ = -\rho v_1^2\, d_1 + \rho v_2^2 \cos\theta\, d_2 - \rho v_3^2 \cos\theta\, d_3 \\ \\ q_n^{(1)} v_2^{(1)} S_1 + q_n^{(2)} v_2^{(2)} S_2 + q_n^{(3)} v_2^{(3)} S_3 \\ = 0 + \rho v_2^2 \sin\theta\, d_2 - \rho v_3^2 \sin\theta\, d_3 \end{cases}$$

'Αρα

$$\underset{+}{(\rightarrow)}: \quad -\rho v_1^2 d_1 + \rho v_2^2 d_2\cos\theta - \rho v_3^2 d_3\cos\theta = -N\sin\theta \tag{3}$$

$$\underset{+}{(\uparrow)}: \quad \rho v_2^2 d_2\sin\theta - \rho v_3^2 d_3\sin\theta = N\cos\theta \;\Rightarrow\; \rho v_2^2 d_2 - \rho v_3^2 d_3 = N\cot\theta \tag{4}$$

Οπότε η Εξ. (3) δίνει:

$$\rho v_1^2 d_1 = (\rho v_2^2 d_2 - \rho v_3^2 d_3)\cos\theta + N\sin\theta$$

$$= N\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta} + N\sin\theta = N\frac{\cos^2\theta + \sin^2\theta}{\sin\theta} = N\frac{1}{\sin\theta}$$

$$\Rightarrow \underline{N = \rho v_1^2 d_1 \sin\theta} \tag{5}$$

Η Εξ. (4) γράφεται,

$$\rho v_2^2 d_2 - \rho v_3^2 d_3 = \rho v_1^2 d_1\cos\theta \quad \Rightarrow \quad \underline{v_2^2 d_2 - v_3^2 d_3 = v_1^2 d_1\cos\theta} \tag{6}$$

Σύνοψη:

$$v_2 d_2 + v_3 d_3 = v_1 d_1 \tag{1}$$

$$v_2^2 d_2 - v_3^2 d_3 = v_1^2 d_1 \cos\theta \qquad (6)$$

Η εξίσωση B**ernoulli** μεταξύ των διατομών

(1) και (2): $p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$

(1) και (3): $p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_3 + \frac{1}{2}\rho v_3^2$

οπότε λόγω της Εξ. (2)

$$v_2 = v_3 = v_1 \qquad (7)$$

Εξ. (1): $d_2 + d_3 = d_1$

Εξ. (6): $d_2 - d_3 = d_1 \cos\theta$

$$d_2 = \frac{1}{2} d_1 (1 + \cos\theta)$$

$$d_3 = \frac{1}{2} d_1 (1 - \cos\theta)$$

Γιά

$$d_3 = 0.5 d_2 \quad \Rightarrow \quad \cos\theta = \frac{1}{3} \quad , \quad \theta = 70.53^o$$

$$\sin\theta = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$N = \frac{2\sqrt{2}}{3}\rho v_1^2 d_1 = 0.943 \cdot 10^3 \frac{kg}{m^3} \cdot \left(15\frac{m}{s}\right)^2 \cdot 0.25m = 53.\frac{kN}{m}$$

Θέμα 3.

Δίδεται η σχέση ταχύτητας-πυκνότητας

$$V(\rho) = v_{max}\left(1 - \frac{\rho}{\rho_{max}}\right)$$

οπότε,

$$Q(\rho) = \rho V(\rho) = v_{max}\left(\rho - \frac{\rho^2}{\rho_{max}}\right)$$

$$C(\rho) = \frac{dQ}{d\rho} = v_{max}\left(1 - 2\frac{\rho}{\rho_{max}}\right)$$

Θεωρούμε την συνθήκη Rankine Hugoniot πού συνδέει τις τιμές της πυκνότητας και ταχύτητας εκατέρωθεν της ασυνέχειας με την ταχύτητα μετάδοσης της

$$\boxed{c_d = \frac{[q]}{[\rho]}}$$

Η συνθήκη Rankine-Hugoniot σημαίνει ότι όταν εκατέρωθεν μιας 'επιφάνειας' (γραμμής εν προκειμένω) $x = D(t)$ εμφανίζονται άλματα στην πυκνότητα και στη ροή, τότε η 'επιφάνεια' αυτή κινείται με ταχύτητα c_d.

Οπότε έχουμε

$$c_d = \frac{[Q(\rho)]}{[\rho]} = \left(1 - \frac{[\rho^2]}{\rho_{max}[\rho]}\right)v_{max}$$

Με δεδομένη την αρχική κατανομή

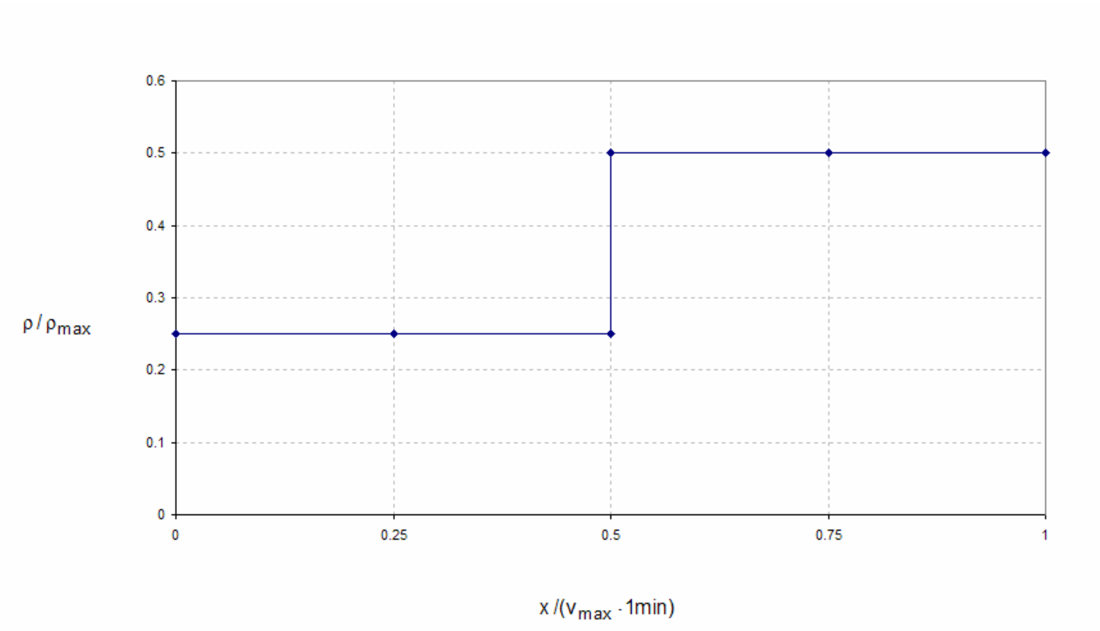
$$\rho(x,0) = \begin{cases} \rho^- = 0.25 \cdot \rho_{max} & x < 0 \\ \rho^+ = 0.5 \cdot \rho_{max} & x > 0 \end{cases}$$

και

- $\rho^{-} = 0.25\rho_{max} \quad \Rightarrow \quad (\rho^{-})^2 = 0.0625\rho_{max}^2$
- $\rho^{+} = 0.5\rho_{max} \quad \Rightarrow \quad (\rho^{+})^2 = 0.25\rho_{max}^2$
- $[\rho] = 0.25\rho_{max}$
- $[\rho^2] = 0.1875\rho_{max}^2$
- $c_d = \left(1 - \dfrac{0.1875}{0.25}\right)v_{max} = 0.25\,v_{max}$

Οπότε για τη χρονική στιγμή $t = 2.\min$ το κρουστικό κύμα έχει διανυσει την απόσταση,

$$x = c_d t = 0.25 v_{max} t = 0.25 v_{max} \cdot (2.\min) = 0.5\,(v_{max} \cdot 1\min)$$



ΘΕΜΑ 2:

Η θεωρία κυκλοφοριακής ροής βασίζεται στην εξίσωση

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} = 0 \qquad (1)$$

1. Χαρακτηρίσατε στα πλαίσια της Μηχανικής του Συνεχούς Μέσου την εξίσωση αυτή και περιγράψατε μαθηματικά πώς και κάτω από ποιές προϋποθέσεις προκύπτει αυτή η εξίσωση.

2. Υποθέτουμε ότι κάτω από κανονικές συνθήκες η εμπειρική σχέση ταχύτητας-πυκνότητας κυκλοφοριακής ροής είναι κατά προέγγιση η εξής:

$$V = v_{max}\left(1 - \frac{\rho}{\rho_{max}}\right) \quad , \quad v_{max} = 80.\frac{km}{hr} \quad , \quad \rho_{max} = 150.\frac{cars}{km} \qquad (2)$$

   Να υπολογισθούν η πυκνότητα κυκλοφοριακής ροής ρ_m και η ροή q_m, που αντστοιχούν στη βέλτιστη ροή οχημάτων.

3. Με βάση την καταστατική σχέση (2), η Εξ. (1) μετασχηματίζεται στην εξίσωση κυκλοφοριακής ροής. Να διατυπωθεί εν προκειμένω η εξίσωση αυτή και να χαρακτηρισθεί.

4. Με ποιά ταχύτητα μεταδίδονται γραμμικά κύματα πυκνότητας στη κατάσταση βέλτιστης ροής.

<u>Απαντήσεις</u>

1. Η εξισώση

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} = 0 \qquad (1)$$

είναι μία εξίσωση διατήρησης της μάζας σε ένα Συνεχές Μέσο εφοδισμένο με πυκνότητα $\rho(x,t)$ και ταχύτητα $v(x,t)$ των υλικών του σημείων. Η εξίσωση αυτή προκύπτει από την αρχή διατήρηση της μάζας,

$$m(t) = \int_a^b \rho(x,t)\,dx$$

$$\dot{m} = \frac{dm}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_a^b \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v)\right] dx = 0$$

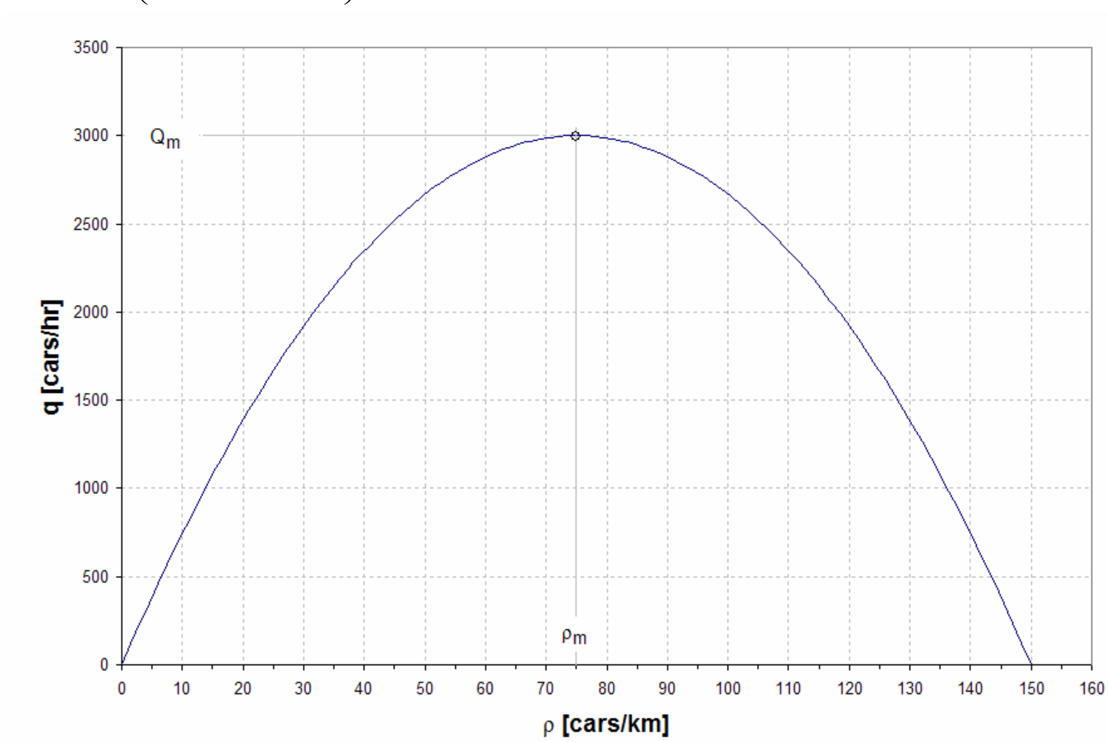
Αν δεχθούμε πώς η παραπάνω καθολική έκφραση της αρχής διατήρησης της μάζας ισχύει <u>γιά κάθε</u> υποδιάστημα $(c,d) \subset [a,b]$ τότε από αυτή προκύπτει η τοπική έκφραση της αρχής διατήρησης της μάζας, Εξ. (1). Αρα προϋπόθεση για την συνεπαγωγή αυτή είναι στο θεωρούμενο διάστημα οι συναρτήσεις $\rho(x,t)$ και $v(x,t)$ να είναι παραγωγίσιμες (και κατά συνέπεια συνεχείς).

2. Η παροχή, δίδεται από τη σχέση:

$$q = Q(\rho) = \rho v = \rho V(\rho) = \rho v_{max}\left(1 - \frac{\rho}{\rho_{max}}\right)$$

$$= v_{max}\rho_{max}\left(\frac{\rho}{\rho_{max}} - \left(\frac{\rho}{\rho_{max}}\right)^2\right)$$

$$= 1200\left(\frac{\rho}{150} + \left(\frac{\rho}{150}\right)^2\right) \quad [cars/hr]$$



$$\frac{dQ}{d\rho} = v_{max}\left(1 - 2\frac{\rho}{\rho_{max}}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \rho = \rho_m = \frac{1}{2}\rho_{max} = 75.\frac{cars}{km}$$

$$Q_m = Q(\rho_m) = \rho_{max}v_{max}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}\rho_{max}v_{max}$$

$$= \frac{1}{4}\cdot 150 \cdot 80 = 3000.\frac{cars}{km}$$

3. Εξίσωση κυκλοφοριακής ροής:

Από την εξίσωση διατήρησης της μάζας και τη καταστατική σχέση για τη ταχύτητα παίρνουμε

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial q}{\partial x}=0 \quad , \quad q=Q(\rho) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{dQ}{d\rho}\frac{\partial \rho}{\partial x}=0$$

την εξίσωση κυκλοφοριακής ροής,

$$\underline{\frac{\partial \rho}{\partial t}+c\frac{\partial \rho}{\partial x}=0}$$

όπου

$$c=C(\rho)=\frac{dQ}{d\rho}=v_{max}\left(1-2\frac{\rho}{\rho_{max}}\right)$$

Αρα, μεταβολές στην πυκνότητα κυκλοφοριακής ροής υπακούουν σε μια οιονεί γραμμική διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους ως προς x και t. Στη θεωρία διαφορικών εξισώσεων μια τέτοια εξίσωση ταξινομείται ως εξίσωση **υπερβολικού τύπου**, και περιγράφει φυσικά φαινόμενα που έχουν κυματικό χαρακτήρα τα δε αντίστοιχα κύματα λέγονται είτε **υπερβολικά ή κινηματικά.** Η ποσότητα c είναι η ταχύτητα μεταδόσεως των μικρών διαταρχών πυκνότητας.

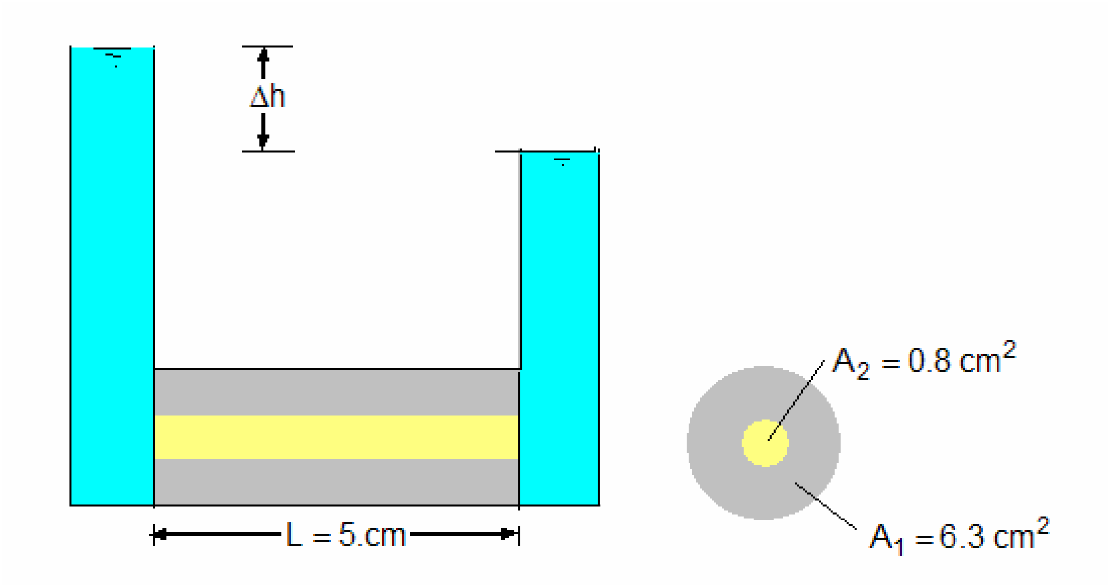
4. Παρατηρούμε ότι για

$$\rho=\rho_m \quad \Rightarrow \quad c=c_m=0$$

Αρα στη κατάσταση βέλτιστης ροής μικρές διαταραχές της πυκνότητας δεν μεταδίδονται.

ΘΕΜΑ 3:

Ο πειραματικός σωλήνας του σχήματος, κυλινδρικής διατομής, περιέχει σύνθετο πορώδες υλικό μήκους $L = 5.cm$ και ύδωρ με διαφορά υδραυλικού ύψους Δh. Το σύνθετο υλικό αποτελείται από τον εξωτερικό κοίλο κυκλικό κύλινδρο με συντελεστή διαπερατότητας $k_w^{(1)} = 10^{-4}\,\dfrac{cm}{s}$ και εμβαδόν διατομής $A_1 = 6.3\ cm^2$ και από τον εσωτερικό κύλινδρο με συντελεστή διαπερατότητας $k_w^{(2)} = 10^{-2}\,\dfrac{cm}{s}$ και εμβαδόν διατομής $A_2 = 0.8\ cm^2$. Η συνολική, μόνιμη παροχή του ύδατος είναι $Q = 0.4\,\dfrac{lt}{min}$.



1. Να υπολογισθεί η πτώση υδραυλικού ύψους Δh κατά μήκος του δοκιμίου.

2. Να υπολογισθούν σε ποσοστά της συνολικής παροχής οι μερικές παροχές Q_2 και Q_1 διαμέσου του διαπερατού πυρήνα (2) και του σχετικά λιγότερο διαπερατού περιβάλλοντος αυτόν κοίλου κυλίνδρου (1), αντιστοίχως.

<u>Απαντήσεις</u>

1. Παρατηρούμε ότι η πτώση πιέσεως κατά μήκος και των δύο σωλήνων είναι κοινή (διάταξη παράλληλη), οπότε βάσει του νόμου του Darcy έχουμε:

$$\frac{Q_1}{A_1} = k_w^{(1)} \frac{\Delta h}{L}$$

$$\frac{Q_2}{A_2} = k_w^{(2)} \frac{\Delta h}{L}$$

Με δεδομένη τη συνολική παροχή

$$Q = Q_1 + Q_2$$

παίρνουμε,

$$Q = \left(A_1 k_w^{(1)} + A_2 k_w^{(2)}\right) \frac{\Delta h}{L} \quad \Rightarrow \quad \underline{\Delta h = \frac{QL}{A_1 k_w^{(1)} + A_2 k_w^{(2)}}}$$

Με βάση τα αριθμητικά δεδομένα παίρνουμε:

$$Q = 0.4 \frac{\text{lt}}{\text{min}} = 0.4 \frac{1000\text{cm}^3}{60\,\text{sec}} = 6.67 \frac{\text{cm}^3}{\text{s}}$$

$$\Delta h = \frac{6.67 \dfrac{\text{cm}^3}{\text{s}} \cdot 5.\text{cm}}{6.3\text{cm}^2 \cdot 10^{-4} \dfrac{\text{cm}}{\text{s}} + 0.8\text{cm}^2 \cdot 10^{-2} \dfrac{\text{cm}}{\text{s}}}$$

$$= \frac{33.33}{0.00063 + 0.008}\text{cm} = \frac{33.33}{0.00863} = 3862.5\text{cm}$$

$$= 38.6\text{m} \; (\approx 3.9 \text{ atm})$$

2. Οπότε οι μερικές παροχές είναι,

$$Q_1 = A_1 k_w^{(1)} \frac{\Delta h}{L} = 6.3\text{cm}^2 \cdot 10^{-4} \frac{\text{cm}}{\text{s}} \frac{3862.5\text{cm}}{5.\text{cm}} = 0.487 \frac{\text{cm}^3}{\text{s}}$$

$$= 0.487 \frac{60}{1000} \frac{\text{lt}}{\text{min}} = 0.0292 \frac{\text{lt}}{\text{min}} \quad \Rightarrow \quad Q_1 / Q = 7.3\%$$

$$Q_2 = A_2 k_w^{(2)} \frac{\Delta h}{L} = 0.8\text{cm}^2 \cdot 10^{-2} \frac{\text{cm}}{\text{s}} \frac{3862.5\text{cm}}{5.\text{cm}} = 6.18 \frac{\text{cm}^3}{\text{s}}$$

$$= 6.18 \frac{60}{1000} \frac{\text{lt}}{\text{min}} = 0.3708 \frac{\text{lt}}{\text{min}} \quad \Rightarrow \quad Q_2 / Q = 92.7\%$$