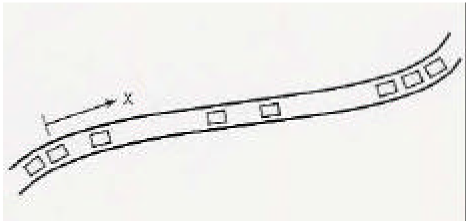
3. ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΗΣ ΘΕΩΡΙΑ ΚΥΚΛΟΦΟΡΙΑΚΗΣ ΡΟΗΣ

3.1 Τοποθέτηση του Προβλήματος

Ως εφαρμογή της εξίσωσης διατήρησης της μάζας για οιονεί μονοδιάστατα Συνεχή Μέσα που αναπτύξαμε στο Κεφ. 2.3 θα σκιαγραφήσουμε παρακάτω τη θεωρία που περιγράφει τη ροή οχημάτων στην απλή περίπτωση, όπου τα οχήματα οδεύουν κατά μήκος μίας οδικής αρτηρίας με μια μόνο λωρίδα κυκλοφορίας.



Η θεωρία που εν συντομία αναπτύσσουμε στο κεφάλαιο αυτό αναπτύχθηκε από τους Lighthill and Witham[1] και Richards[2].

Ενώ στην πραγματικότητα έχουμε να κάνουμε με έναν αριθμό διακριτών οχημάτων που ανά πάσα στιγμή οδεύουν πάνω στον αυτοκινητόδρομο, από τη σκοπιά της Μηχανικής του Συνεχούς Μέσου, είμαστε αναγκασμένοι να διατυπώσουμε μαθηματικές προτάσεις στη βάση μιας μέσης τιμής του πλήθους των οχημάτων που αναμένεται να βρίσκονται σε ένα τυπικό μήκος της οδού (πρβλ. Κεφ. 1.3.1). Το ίδιο επίσης ισχύει και για την ταχύτητα των οχημάτων, που αν και θα διαφέρει κάπως από όχημα σε όχημα, υποκαθίσταται με μια μέση τιμή, χαρακτηριστική της θέσης και της χρονικής στιγμής που μελετάμε. Π.χ. αν θέλουμε να πραγματοποιήσουμε μέσους όρους πάνω σε δείγμα $<n>=20$ οχημάτων, τότε στην περίπτωση βαρειάς κυκλοφορίας το αντίστοιχο δειγματοληπτικό μήκος θα ήταν περί τα L=100 m, ενώ στην περίπτωση ελαφριάς κυκλοφορίας ίσως και L=1. km, ο δε αντίστοιχος δειγματοληπτικός χρόνος περί το T=1. min. Η υπόθεση του Συνεχούς στην περίπτωση της κυκλοφοριακής ροής είναι ικανοποιητική για βαρεία κυκλοφορία ή για μεγάλες αποστάσεις επί της οδού. Παρ' όλα αυτά δίνει εντυπωσιακά αποτελέσματα που περιγράφουν ικανοποιητικά τις εμπειρικές παρατηρήσεις ακόμα και σε άλλες ακραίες περιπτώσεις.

Το πρόβλημα της κυκλοφοριακής ροής περιγράφεται από τις εξής ποσότητες:

γραμμική πυκνότητα οχημάτων, $\rho_\ell = \rho_\ell(x,t)$, με διαστάσεις $[\rho_\ell] = $ οχ/ km

- *(μέση)* **ταχύτητα οχημάτων** $v_\ell = v_\ell(x,t)$, με διαστάσεις $[v_\ell] = \mathrm{km/hr}$.

Για λόγους απλούστευσης στο συμβολισμό στη συνέχεια θα παραλείψουμε το κάτω δείκτη ℓ που υποδηλώνει ότι το αντίστοιχο συνεχές είναι γραμμωτό.

Επειδή στο πρόβλημα που θεωρούμε, κατά μήκος της οδού που μελετάμε, δεν υπάρχουν ούτε είσοδοι ούτε έξοδοι οχημάτων, η αλλαγή της πυκνότητας

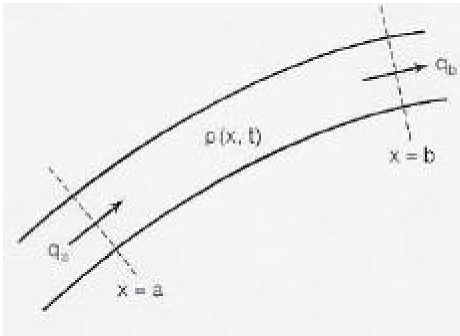
[1] M.J. Lighthill and G.B. Whitham, On kinematic waves: I. Flood measurements in long rivers; II. Theory of traffic flow on long crowded roads. Proc. Roy. Soc. A., 229, 281-345 (1955).
[2] P.I. Richards. Shock waves on the highway. Oper. Res. 4, 42-51 (1956) .

των οχημάτων εξαρτάται μόνο από τη χωρική μεταβολή της **κυκλοφοριακής ροής**,

$$\boxed{q = \rho\, v} \qquad (1)$$

και υπακούει στο νόμο διατήρησης της μάζας:

$$\int_a^b \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dx + q(b) - q(a) = 0 \qquad (2)$$



Αν δεχθούμε ότι η συνάρτηση πυκνότητας είναι συνεχής, δηλαδή αν δεχθούμε ότι δεν δημιουργούνται ισχυρές ασυνέχειες, η παραπάνω εξίσωση διατήρησης μπορεί να γραφεί σε τοπική μορφή:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v) = 0 \qquad (2bis)$$

Οπως θα δούμε παρακάτω (Κεφ. 3.7) αυτή η παραδοχή συνέχειας που οδηγεί από τις Εξ.(1) και (2) στην Εξ. (2bis) δεν είναι πάντοτε δυνατή.

3.2 Καταστατική Σχέση Πυκνότητας – Ταχύτητας

Η διέπουσα το πρόβλημα Εξ. (2) περιέχει δύο αγνώστους, την πυκνότητα ρ και τη ταχύτητα v. Για να μπορέσουμε να λύσουμε το πρόβλημα, χρειαζόμαστε και άλλη μία επιπλέον σχέση που να συνδέει τις αγνώστους του προβλήματος. Η σχέση αυτή μεταξύ ρ και v είναι μία εμπειρική σχέση της μορφής

$$v = V(\rho) \qquad (3)$$

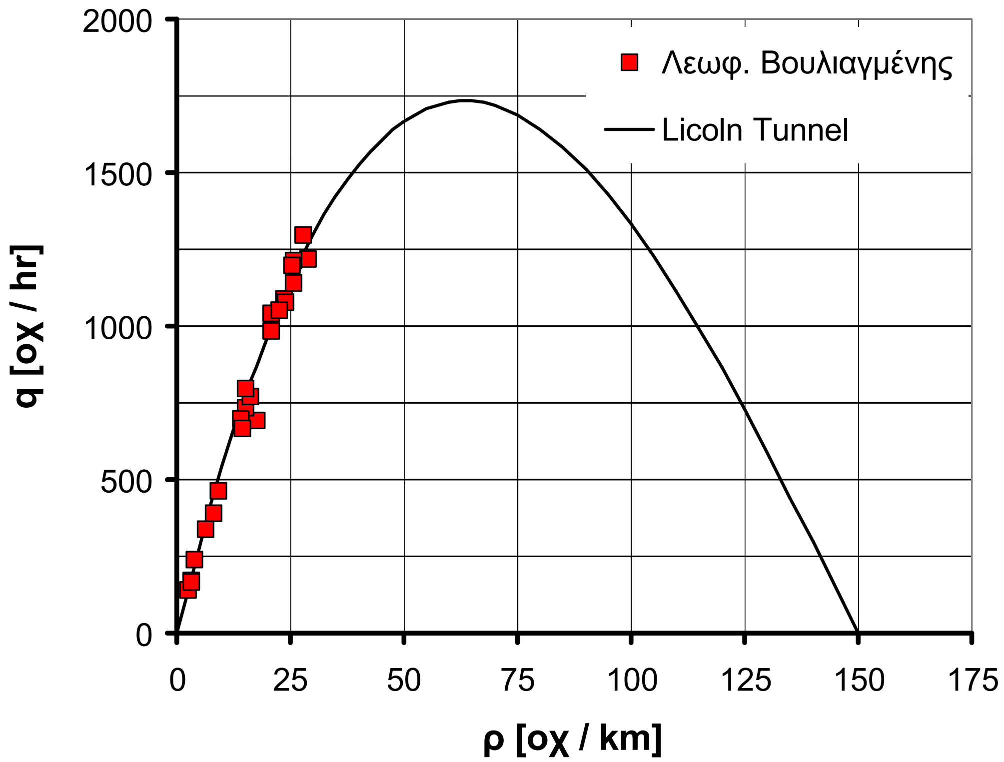
που πρέπει να προσδιορισθεί μετά από παρατηρήσεις και μετρήσεις σε χαρακτηριστικές οδικές αρτηρίες. Μια τέτοια σχέση, λέγεται **καταστατική εξίσωση**, διότι περιγράφει την κατάσταση του Συνεχούς Μέσου που μελετάμε. Η καταστατική σχέση μεταξύ ταχύτητας και πυκνότητας στο προκείμενο πρόβλημα ερμηνεύεται φυσικά ως εξής: Οι οδηγοί των οχημάτων προσαρμόζουν την ταχύτητα του οχήματος στην πυκνότητα της κυκλοφορίας που αντιλαμβάνονται στην περιοχή τους. Π.χ. αν υποθέσουμε ότι το όριο ταχύτητας (ταχύτητα σχεδιασμού) είναι $v_0 = 60$ km/hr τότε σε χαμηλές πυκνότητες αυτή θα είναι και η (μέση) ταχύτητα των οχημάτων. Οσο αυξάνει η πυκνότητα, τόσο μειώνεται η ταχύτητα κυκλοφοριακής ροής. Υπάρχει, τέλος, μία οριακή πυκνότητα $\rho = \rho_\sigma$, όπου παρατηρείται **κυκλοφοριακή συμφόρηση** και η ταχύτητα μηδενίζεται.

Δεχόμενοι την παραπάνω καταστατική σχέση (3), μπορούμε να απαλείψουμε την ταχύτητα από τις Εξ. (2) και (3) εισάγοντας την κυκλοφοριακή ροή q ως εξαρτημένη μεταβλητή:

$$\boxed{q = Q(\rho) = \rho\, V(\rho)} \tag{4}$$

- ***Εμπειρικές Σχέσεις Ταχύτητας Πυκνότητας***

Κατά καιρούς έχουν προταθεί διάφορα καταστατικά μοντέλα για την κυκλοφοριακή ροή (π.χ. τα μοντέλα Underwood kai Greenberg[3]), που βασίζονται σε μετρήσεις και αντίστοιχη στατιστική επεξεργασία δεδομένων. Το παρακάτω γράφημα αφορά σε μια σύγκριση της καμπύλης (q,ρ), που προέκυψε από κυκλοφοριακές μετρήσεις που έγιναν στη σήραγγα Lincoln της Νέας Υόρκης[4] με πρόσφατες μετρήσεις στη Λεωφόρο Βουλιαγμένης (16-11-95) από ομάδα του Ε.Μ.Π.[5].



[3] Ι.Μ Φραντζεσκάκης - Γ.Α. Γιαννόπουλος. *Σχεδιασμός των Μεταφορών και Κυκλοφοριακή Τεχνική.* Παρατηρητής 1986.
[4] A.J. Roberts. *A One-Dimensional Introduction to Continuum Mechanics*. World Scientific, 1994.
[5] Σπουδαστική Εργασία των κ.κ. Π. Βαρελλή, και Σ. Καπετανάκη υπό την επίβλεψη των Καθηγ. κ. κ. Αμπακούμκιν και Α. Σταθόπουλου του Τομέα Μεταφορών και Συγκοινωνιακής Υποδομής Ε.Μ.Π.

Τα εμπειρικά δεδομένα μπορούν να αναχθούν σε ένα απλό πολυωνυμικό νόμο,

$$q = Q(\rho) = 60\,\rho - \frac{3}{5}\rho^2 + \frac{1}{750}\rho^3 \qquad \text{(4bis)}$$

Μια τέτοια καταστατική σχέση ροής-πυκνότητας παρουσιάζει ένα μέγιστο

$$\frac{dQ}{d\rho} = 0 \quad \Rightarrow \quad \rho_m \approx 63.4\ \text{οχ/km} \quad , \quad q_m \approx 1732\ \text{οχ/hr}$$

Αυτό το μέγιστο είναι από σκοπιάς σχεδιασμού η **βέλτιστη ροή οχημάτων** και αντιστοιχεί στη **βέλτιστη πυκνότητα ροής** ρ_m , που ναι μεν αντιστοιχεί σε μέγιστη ροή οχημάτων αλλά και σε μία αρκετά χαμηλή μέση ταχύτητα οχημάτων ,

$$v = \frac{q}{\rho} \quad \Rightarrow \quad v_m = \frac{1732\ \text{οχ}/\text{hr}}{63.4\ \text{οχ}/\text{km}} = 27.3\ \text{km/hr}$$

3.3 Εξίσωση Κυκλοφοριακής Ροής

Με βάση τις παραπάνω παρατηρήσεις μπορούμε τώρα να διατυπώσουμε τη διαφορική εξίσωση που διέπει το πρόβλημα της κυκλοφοριακής ροής. Από τις εξισώσεις (1) ως (3) έχουμε:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} Q(\rho) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{dQ}{d\rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} = 0$$

Θέτοντας

$$c = C(\rho) = \frac{dQ}{d\rho} \qquad (5)$$

τελικά λαμβάνουμε

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + C(\rho)\frac{\partial \rho}{\partial x} = 0} \qquad (6)$$

Αρα, μεταβολές στην πυκνότητα κυκλοφοριακής ροής υπακούουν σε μια οιονεί γραμμική διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους ως προς x και t. Στη θεωρία διαφορικών εξισώσεων μια τέτοια εξίσωση ταξινομείται ως εξίσωση **υπερβολικού τύπου**, και περιγράφει φυσικά φαινόμενα που έχουν κυματικό χαρακτήρα τα δε αντίστοιχα κύματα λέγονται είτε **υπερβολικά ή κινηματικά**[6]. Τα κινηματικά κύματα προκύπτουν μόνο από τη χρήση της Α.Δ.Μ. και ένα εμπειρικό καταστατικό νόμο και αντιδιαστέλλονται από τα λεγόμενα **δυναμικά κύματα**, για την περιγραφή των οποίων χρειάζονται

[6] Πρβλ. G.B. Whitham. *Linear and Non-linear Waves.* John Wiley & Sons, 1974

επίσης και οι δυναμικές εξισώσεις. Μονοδιάστατα γραμμικά κα μη-γραμμικά δυναμικά κύματα μας είναι γνωστά από την Υδρομηχανική και θα αναφερθούμε σ' αυτά εκτενώς στα Κεφ. 5.2 και 5.3.

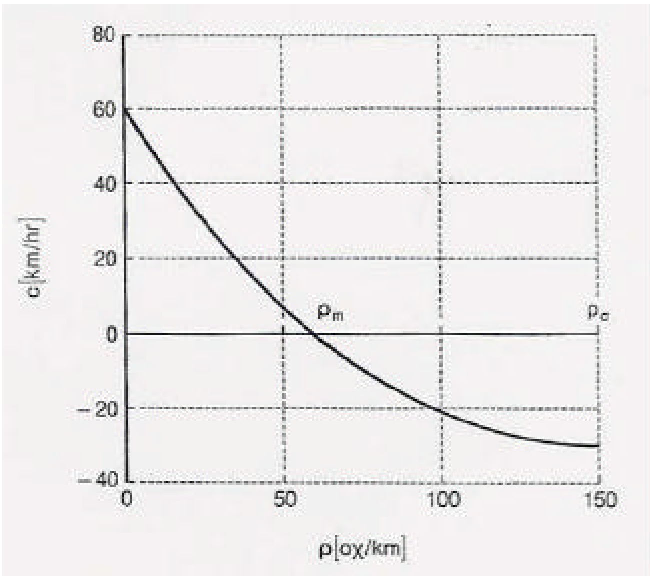
Οπως θα δούμε στη συνέχεια, διαταραχές στην πυκνότητα κυκλοφοριακής ροής μεταδίδονται κατά μήκος της οδικής αρτηρίας με ταχύτητα c. Ανάλογα δε με το πρόσημο της c το **κύμα πυκνότητας** μεταδίδεται είτε προς τη κατεύθυνση της κυκλοφορίας είτε αντίθετα προς αυτή. Στο παραπάνω παράδειγμα έχουμε

$$c = C(\rho) = 60 - 1.2\,\rho + 0.004\,\rho^2$$

Παρατηρούμε ότι

$$C(0) = V\,(0) = 60\,\text{km/hr}$$

Αρα σε ελαφρά κυκλοφορία διαταραχές στην πυκνότητα των οχημάτων κινούνται με την ίδια ταχύτητα όπως τα ίδια τα οχήματα καθώς δεν υπάρχει μεγάλη αλληλεπίδραση μεταξύ των οχημάτων.



Λαμβάνοντας υπ’ όψη

$$c = \frac{d}{d\rho}\big(\rho V(\rho)\big) = V(\rho) + \rho V'(\rho)$$

και ότι $V'(\rho) < 0$, παρατηρούμε ότι η ταχύτητα μετάδοσης των διαταραχών της πυκνότητας κυκλοφορίας είναι πάντοτε μικρότερη της ταχύτητας των οχημάτων. Αυτό σημαίνει ότι τα οχήματα εισέρχονται στις διαταραχές από τα πίσω και ότι σε βαρεία κυκλοφορία ($\rho > \rho_m$) η ταχύτητα μετάδοσης των διαταραχών γίνεται προς τα πίσω, $c(\rho) < 0$. Στην οριακή περίπτωση όπου η πυκνότητα αντιστοιχεί περίπου στην τιμή συμφόρησης, $\rho \approx \rho_\sigma$, το κύμα κινείται προς τα πίσω με ταχύτητα $|c_\sigma|$. Για την εκτίμηση της καταστατικής συμπεριφοράς κοντά στην πυκνότητα συμφόρησης κάνουμε το εξής υπολογισμό: Εστω t_α ο χρόνος αντίδρασης του οδηγού, $\ell = 1/\rho$ η μέση απόσταση μεταξύ των οχημάτων και $\ell_c = 1/\rho_\sigma$ το μέσο μήκος οχημάτων. Για πυκνότητες κοντά στη πυκνότητα συμφόρησης έχουμε ότι

$$V \approx \frac{\ell - \ell_c}{t_\alpha} = \frac{\ell_c}{t_\alpha}\left(\frac{\rho_\sigma}{\rho} - 1\right) \quad \Rightarrow \quad c_\sigma = -\frac{\ell_c}{t_\alpha}$$

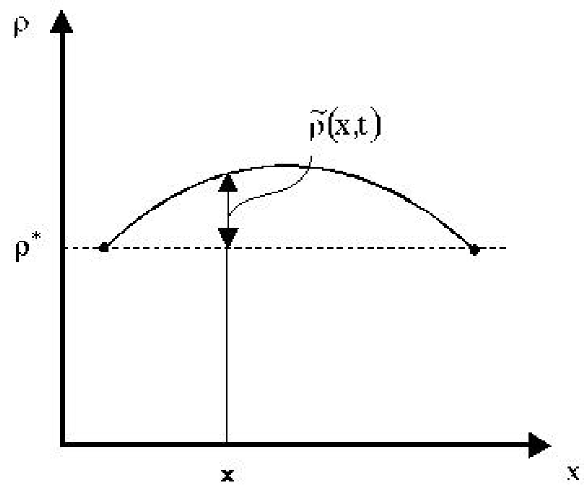
Στο παράδειγμα έχουμε $c_\sigma = -30\,\text{km/hr}$, που σημαίνει ότι, για τυπικό ισοδύναμο μήκος οχήματος $\ell_c \approx \frac{1000}{150} = 6.67\,\text{m}$ εκτιμούμε ένα μέσο χρόνο αντίδρασης

$$t_\alpha = \frac{6.67\,\text{m}}{30 \cdot 10^3\,\text{m}/(3600\,\text{sec})} = 0.2\,\text{sec}$$

3.4 Σχεδόν Ομοιόμορφη Ροή

Για να μελετήσουμε τη φύση του φαινόμενου που περιγράφει η διαφορική Εξ. (6), θα διαπιστώνουμε κατ' αρχήν ότι υπάρχει μια απλή λύση της διαφορικής εξίσωσης κυκλοφοριακής ροής, που αντιστοιχεί σε σταθερή πυκνότητα

$$\rho(x,t) = \rho^* = \sigma\tau\alpha\theta.$$



Η λύση αυτή αντιστοιχεί στην **ομοιόμορφη κατάσταση** ή στη λεγόμενη **κατάσταση ισορροπίας** οχημάτων, που ισαπέχουν μεταξύ τους και που κινούνται με σταθερή ταχύτητα

$$v^* = V(\rho^*)$$

Τώρα μπορούμε να μελετήσουμε την περίπτωση, όπου παρατηρείται μία **μικρή διαταραχή** της πυκνότητας, έτσι ώστε σε κάποια χρονική στιγμή t να ισχύει ότι

$$\rho = \rho^* + \tilde{\rho}(x,t)$$

Ο συντελεστής $c(\rho)$ στην Εξ. (6) μπορεί να γραφεί ως ανάπτυγμα σειράς Taylor με κέντρο το σημείο ισορροπίας ως εξής,

$$\begin{aligned} c(\rho) = c(\rho^* + \tilde{\rho}) &= c(\rho^*) + \left.\frac{dc}{d\rho}\right|_{\rho^*} \tilde{\rho} + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2c}{d\rho^2}\right|_{\rho^*} \tilde{\rho}^2 + \ldots \\ &\approx c(\rho^*) + c'(\rho^*)\,\tilde{\rho} + O\left(\tilde{\rho}^2\right) \end{aligned}$$

Αντιστοίχως η διαφορική εξίσωση λαμβάνει την εξής μορφή:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho^* + \tilde{\rho}) + \left[c(\rho^*) + c'(\rho^*)\,\tilde{\rho}\right]\frac{\partial}{\partial x}(\rho^* + \tilde{\rho}) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + c(\rho^*)\,\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial x} + \underline{c'(\rho^*)\,\tilde{\rho}\,\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial x}} = 0$$

Θεωρούμε ότι ο υπογραμμισμένος όρος στην παραπάνω εξίσωση μπορεί να παραληφθεί, διότι περιέχει γινόμενα **μικρών** ποσοτήτων. Με την παραδοχή αυτή τελικά προκύπτει η εξής εξίσωση για τη διαταραχή της πυκνότητας

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + c^* \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial x} = 0 \quad , \quad c^* = c(\rho^*) = \sigma\tau\alpha\theta$$

Η εξίσωση αυτή καλείται *εξίσωση* **κύματος απλής κατεύθυνσης** και έχει μια πολύ απλή γενική λύση, τη λεγόμενη λύση **D' Alembert**,

$$\tilde{\rho} = f(x - c^* t)$$

όπου η συνάρτηση $f(\cdot)$ είναι μία παραγωγίσιμη συνάρτηση η οποία προσδιορίζεται από την **αρχική συνθήκη** του προβλήματος.

Πράγματι, αν δεχθούμε ότι η διαταραχή $\tilde{\rho}(x,t)$ δίδεται από τη λύση D' Alembert:

$$\tilde{\rho} = f(\eta) \quad , \quad \eta = x - c^* t$$

τότε

$$\frac{\partial\tilde{\rho}}{\partial t} = \frac{df}{d\eta}\frac{d\eta}{dt} = -c^{*}f' \;,\; \frac{\partial\tilde{\rho}}{\partial x} = \frac{df}{d\eta}\frac{d\eta}{dx} = 1f' \Rightarrow$$

$$\frac{\partial\tilde{\rho}}{\partial t} + c^{*}\frac{\partial\tilde{\rho}}{\partial x} = -c^{*}f' + c^{*}f' = 0 \;\; (!)$$

Ας δεχθούμε τώρα ότι τη χρονική στιγμή, $t = 0$ γνωρίζουμε την πυκνότητα ροής. Οπότε από την **αρχική συνθήκη**

$$\rho(x,0) = \rho_0(x) \quad \Rightarrow \quad \rho_0(x) = \rho^{*} + f(x - c^{*}0)$$

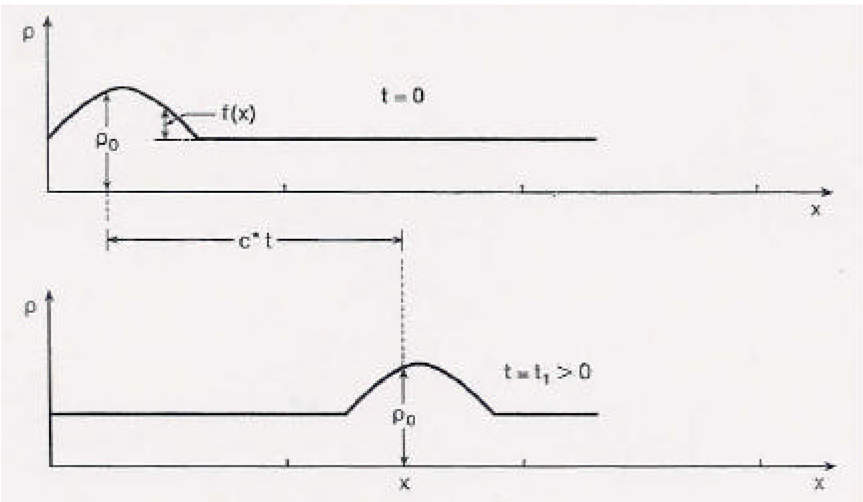
ή

$$f(x) = \rho_0(x) - \rho^{*}$$

Αρα σε μια επόμενη χρονική στιγμή $t = t_1 > 0$ η λύση είναι:

$$\rho(x,t) = \rho^{*} + f(x - c^{*}t) = \rho_0(x - c^{*}t)$$

που σημαίνει ότι η πυκνότητα στο γεγονός (x,t) είναι η ίδια με την αρχική πυκνότητα στο γεγονός $(x - c^{*}t, 0)$. Σημειώνουμε ότι η θέση $x - c^{*}t$ βρίσκεται σε απόσταση $c^{*}t$ στα αριστερά της θέσης x.



Αρα η ποσότητα

$$c^{*} = C(\rho^{*})$$

είναι ταχύτητα **μετάδοσης κύματος** πυκνότητας.

Παρατηρούμε τέλος ότι στη λύση D'Alembert το σχήμα της διαταραχής παραμένει αναλλοίωτο στο χρόνο και απλώς μεταδίδεται σαν κύμα προς τα δεξιά με ταχύτητα c^* .

- ***Χαρακτηριστικές Γραμμές***

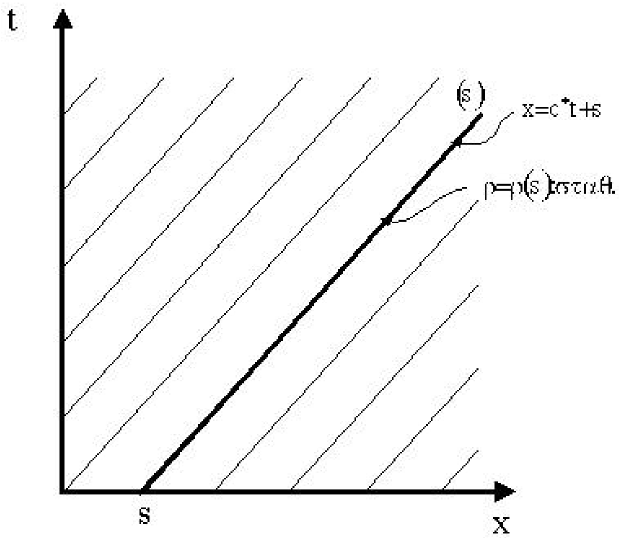
Στο επίπεδο των γεγονότων O(x,t) σχεδιάζουμε τις λεγόμενες **χαρακτηριστικές γραμμές (Χ.Γ.**)

$$x = s + c^* t$$

που τέμνουν τον άξονα των x (t=0) στη θέση $x = s$. Πάνω στις (Χ.Γ.) η ποσότητα

$$\eta = x - c^* t = s = \sigma\tau\alpha\theta.$$

Οπότε συμπεραίνουμε ότι **πάνω στις Χ.Γ. η πυκνότητα** $\rho = \rho(\eta)$ **μεταφέρεται αναλλοίωτη.**



3.5 Λύση του Προβλήματος της Κυκλοφοριακής Ροής με τη Μέθοδο των Χαρακτηριστικών Γραμμών

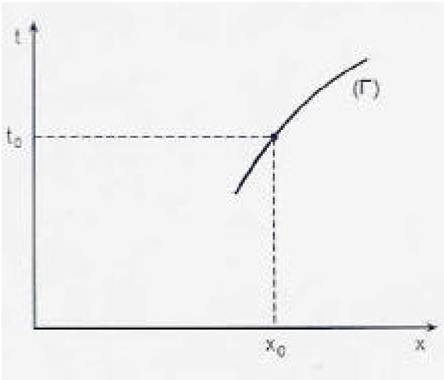
Η Μέθοδος των Χαρακτηριστικών Γραμμών (Μ.Χ.Γ.) είναι μια γενική υπολογιστική μέθοδος και χρησιμεύει στην επίλυση πολλών εφαρμοσμένων προβλημάτων, τόσο στην Υδρομηχανική όσο και στη Μηχανική του Παραμορφώσιμου Στερεού Σώματος. Για παράδειγμα αναφέρουμε εδώ ενδεικτικά προβλήματα Οριακής Αντοχής σε δύο διαστάσεις στην Εδαφομηχανική, που επιλύονται ακριβώς ή πρεσεγγιστικά με τη Μ.Χ.Γ., αφού οι εξισώσεις που περιγράφουν το πρόβλημα είναι υπερβολικού τύπου.

Οπως αναφέραμε πιο πάνω, η διαφορική εξίσωση της κυκλοφοριακής ροής

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + c(\rho)\frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \qquad (6)$$

είναι ένα τυπικό παράδειγμα οιονεί γραμμικής **υπερβολικής διαφορικής** *εξίσωσης* που λύνεται με τη Μ.Χ.Γ.. Στην προκείμενη περίπτωση η ανάλυση με τη μέθοδο αυτή γίνεται στο χωροχρονικό επίπεδο των γεγονότων $O(x,t)$.

Ας δεχθούμε πως σε μία δεδομένη περίπτωση γνωρίζουμε την πυκνότητα $\rho(x,t)$, οπότε θα μπορούσαμε να ορίσουμε μια καμπύλη (Γ) στο επίπεδο $O(x,t)$ η οποία δίδεται από μια συνάρτηση της μορφής



$$x = X(t) \qquad (\Gamma)$$

έτσι ώστε

$$\frac{dX}{dt} = c\left(\rho(X(t),t)\right)$$

Η καμπύλη αυτή ονομάζεται **χαρακτηριστική γραμμή** (Χ.Γ.) της Εξ. (6). Πάνω στη Χ.Γ. (Γ) η πυκνότητα ρ μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι συνάρτηση μόνο του χρόνου t:

$$\rho = \rho\left(X(t), t\right)$$

οπότε πάνω στη (Γ):

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x}\frac{dX}{dt}$$

ή, λόγω του παραπάνω ορισμού της (Γ) και της Εξ. (6),

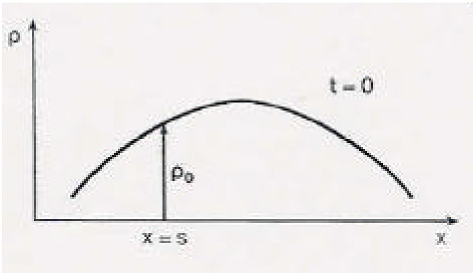
$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + c\,\frac{d\rho}{dx} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\rho}{dt} = 0$$

Αρα, πάνω σε μία Χ.Γ. η πυκνότητα παραμένει σταθερή. Επίσης, παρατηρούμε τα εξής:

- $C(\rho)$: σταθερή επί της (Γ)
- $\frac{dX}{dt}$: σταθερή επί της (Γ)
- Γ : ευθεία γραμμή στο χώρο $O(x,t)$.

Με βάση τις παραπάνω παρατη-ρήσεις μπορούμε να σκιαγραφή-σουμε την ακριβή μαθηματική επί-λύση της διαφορικής Εξ. (6) της κυκλοφοριακής ροής: Θεωρούμε γνωστή την αρχική κατανομή της πυκνότητας κυκλοφοριακής ροής:

$\rho = \rho(x,0) = \rho_0(x)$



- Σε κάθε σημείο s του άξονα των x $(t=0)$ υπολογίζουμε την ταχύτητα μετάδοσης του κύματος

$c_0(s) = C(\rho_0(s))$

- Από το σημείο $(s,0)$ στο επίπεδο $O(x,t)$ φέρνουμε τη Χ.Γ. (Γ) με κλίση

$$\frac{dX}{dt} = c_0(s) \quad (\Gamma)$$

Η γραμμή αυτή περιγράφεται από την εξίσωση

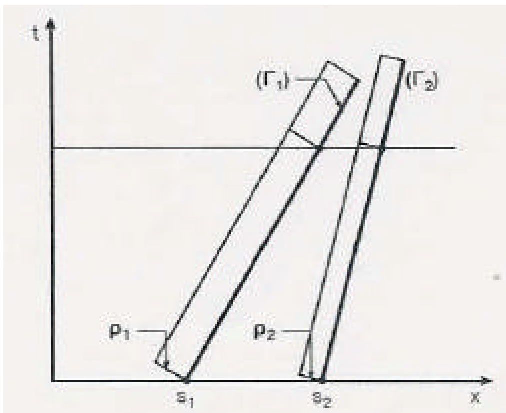
$$x = s + c_0(s)t \quad (\Gamma)$$

Πάνω στη Χ.Γ. (Γ) η πυκνότητα είναι σταθερή, ίση προς $\rho_0(s)$.

Από τις παραπάνω παρατηρήσεις προκύπτει τελικά η λύση της Εξ. (1) σε παραμετρική μορφή:

$\rho = \rho_0(s)$ για: $x = s + c_0(s)t$

Γραφικά η λύση αυτή κατασκευάζεται ως εξής: Σχεδιάζουμε τις χαρακτηριστικές που διέρχονται από τα σημεία $(s_1,0), (s_2,0),\ldots$ και σημειώνουμε πάνω σε αυτές τις αντίστοιχες τιμές της πυκνότητας $\rho_1 = \rho_0(s_1),\ldots$. Σε μία επόμενη χρονική στιγμή $t = t_1$ τέμνουμε τις χαρακτηριστικές με μία ευθεία παράλληλη προς τον άξονα x και έχουμε την αντίστοιχη κατανομή $\rho(x,t_1)$.



Αριθμητικά η λύση προκύπτει εύκολα με τη χρήση λογισμικού χάρτου (Excel).

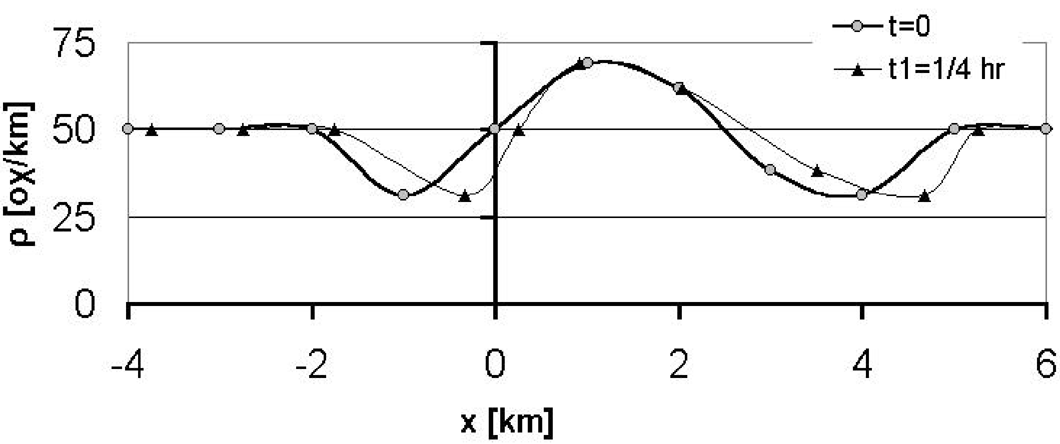
Παράδειγμα:

Για μια αρχική κατανομή πυκνότητας της μορφής,

$$\rho_0 = \begin{cases} 50. & , \quad s < -2 \quad \kappa\alpha\iota \quad s > 5 \\ 50\left(1 + 0.4\sin\left(\dfrac{\pi s}{2.5}\right)\right) & , \quad -2 \le s \le 5 \end{cases}$$

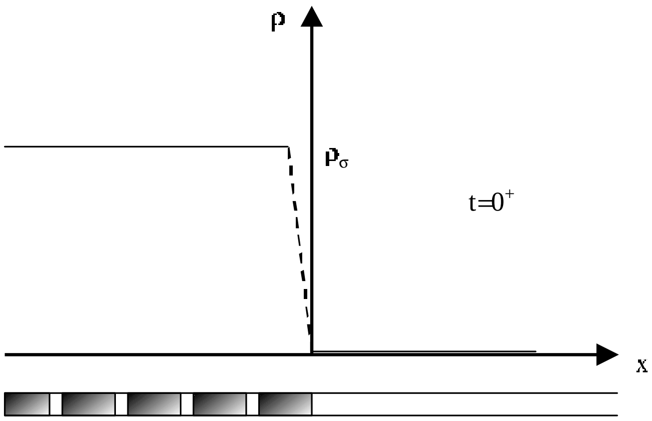
έχουμε τα εξής αποτελέσματα:

x0=s	ρ(x,0)	c0(s)	x1=s+c*t1	ρ(x1,t1)
-6.00	50.00	10.00	-5.75	50.00
-5.00	50.00	10.00	-4.75	50.00
-4.00	50.00	10.00	-3.75	50.00
-3.00	50.00	10.00	-2.75	50.00
-2.00	38.22	19.96	-1.50	50.00
-1.00	30.98	26.66	-0.33	30.98
0.00	50.00	10.00	0.25	50.00
1.00	69.02	-3.77	0.91	69.02
2.00	61.76	1.15	2.03	61.76
3.00	38.24	19.96	3.50	38.24
4.00	30.98	26.66	4.67	30.98
5.00	49.94	10.00	5.25	50.00
6.00	50.00	10.00	6.25	50.00



3.6 Δέσμη Χ.Γ.: Η Λειτουργία του Φωτεινού Σηματοδότη

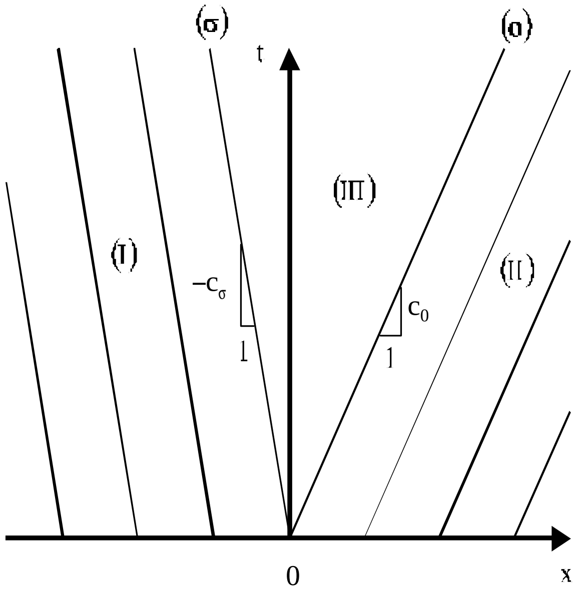
Θεωρούμε μία συστοιχία οχημάτων που περιμένει το σήμα σε ένα φωτεινό σηματοδότη για να συνεχίσει την πορεία της. Για λόγους μαθηματικής απλότητας θεωρούμε ότι ο σηματοδότης βρίσκεται στη θέση $x = 0$. Επίσης δεχόμαστε ότι τη χρονική στιγμή $t = 0$ ο σηματοδότης αλλάζει από ερυθρό σε πράσινο σήμα και η κυκλοφορία των οχημάτων ξεκινά. Ετσι, για χρόνους t>0 τα οχήματα μπορούν να διέλθουν από το σημείο $x = 0$, οπότε και παρατηρούμε ότι η ουρά των οχημάτων που δημιουργήθηκε πίσω από το σηματοδότη αραιώνει συν τω χρόνω. Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε το μαθηματικό μοντέλο αυτής της διαδικασίας ως εφαρμογή της θεωρίας κυκλοφοριακής ροής.



Στην προκείμενη περίπτωση η αρχική συνθήκη για την πυκνότητα της κυκλοφοριακής ροής είναι η βηματική συνάρτηση Heaviside :

$$\rho\,(x,0) = \begin{cases} 0 & x > 0 \\ \rho_\sigma & x < 0 \end{cases}$$

Η τιμή ρ_σ αντιστοιχεί όπως είδαμε παραπάνω στην τιμή συμφόρησης, διότι πίσω από το σηματοδότη τα οχήματα περιμένουν πολύ κοντά το ένα στο άλλο με την ελάχιστη απόσταση μεταξύ τους. Με την αλλαγή του φωτεινού σηματοδότη (t>0) περιμένουμε η πυκνότητα των οχημάτων να πάρει τη μορφή **κύματος εκτόνωσης**, όπου σε κάποια απόσταση μπροστά από το σηματοδότη η πυκνότητα θα είναι ακόμη μηδέν, αφού κανένα όχημα δεν θα έχει προλάβει να φτάσει εκεί, ενώ σε κάποια απόσταση πίσω από το σηματοδότη τα οχήματα θα είναι ακόμη ακίνητα. Η εικόνα αυτή γίνεται σαφής, αν σχεδιάσουμε τις Χ.Γ. του προβλήματος που αντιστοιχούν στην παραπάνω αρχική συνθήκη.



Π.χ. για την καταστατική σχέση του παραδείγματος που δώσαμε πιο πάνω έχουμε:

$c_0 = C(0) \approx 60$ km/hr

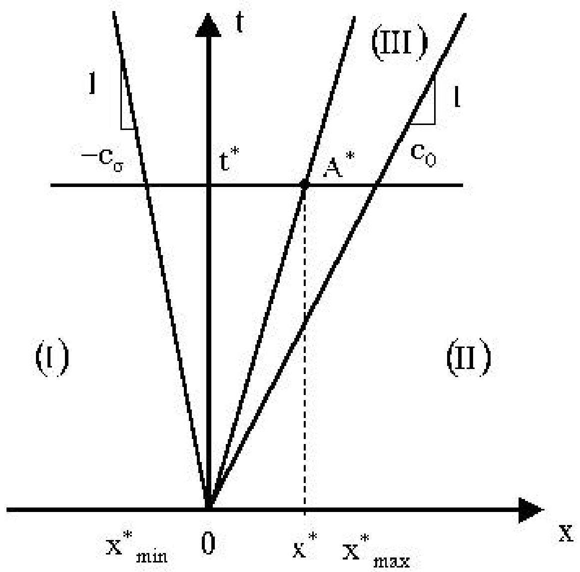
$c_\sigma = C(\rho_\sigma) \approx -30.$km/hr

Το χωρίο που μας ενδιαφέρει $(-\infty < x < +\infty,\ t \geq 0)$ χωρίζεται σε τρεις περιοχές:

I. Στην περιοχή πίσω από το φωτεινό σηματοδότη, όπου η πυκνότητα κυκλοφοριακής ροής ισούται με την πυκνότητα συμφόρησης $(\rho = \rho_\sigma)$ και αντιστοίχως οι Χ.Γ. έχουν αρνητική κλίση $c = c_\sigma < 0$. Η περιοχή αυτή φράζεται από τα δεξιά από την Χ.Γ. (σ) που διέρχεται από την αρχή των αξόνων, $O(0,0)$.

II. Στην περιοχή μπροστά από το σηματοδότη, όπου ο δρόμος είναι ελεύθερος και η πυκνότητα $\rho = \rho_o = 0$. Στην περιοχή αυτή οι Χ.Γ. έχουν τη μεγαλύτερη δυνατή θετική κλίση $c = c_0 > 0$, που αντιστοιχεί στη μέγιστη μέση ταχύτητα κυκλοφορίας των οχημάτων. Η περιοχή αυτή φράζεται από τα αριστερά από την Χ.Γ. (0), που και αυτή διέρχεται από το σημείο $O(0,0)$.

III. Η περιοχή αυτή σχήματος V, συνδέει τις δύο εκατέρωθεν περιοχές (I) και (II), έτσι ώστε οι Χ.Γ. (σ) και (0) να ανήκουν επίσης και στην περιοχή αυτή.

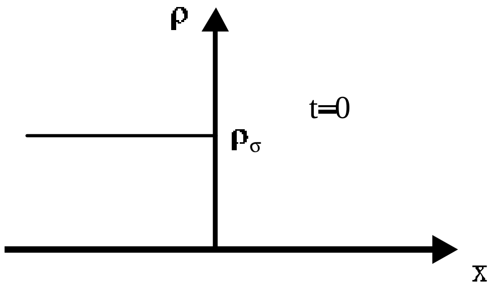


"Δέσμη εκτόνωσης"

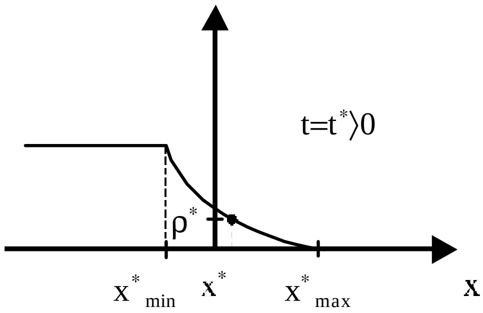
Στην περιοχή (III) οι Χ.Γ. αποτελούν δέσμη ευθειών περί το σημείο $O(0,0)$ (**σημείο Prandtl**), το οποίο με τη σειρά του χαρακτηρίζει τη θέση του φωτεινού σηματοδότη. Οι Χ.Γ. της δέσμης αυτής περιγράφονται από τη σχέση

$x = C(\rho)\,t$

Για την κατασκευή της λύσης θεωρούμε μια χρονική στιγμή $t = t^* > 0$ και θέλουμε να υπολογίσουμε τη κατανομή των οχημάτων περί το σημείο $x = 0$ της θέσης του σηματοδότη. Η ευθεία $t = t^*$ τέμνει την τυχούσα Χ.Γ. $(*)$ στο σημείο $A^*(x^*, t^*)$, άρα



$$x^* = C(\rho^*)\, t^* \quad \Rightarrow \quad C(\rho^*) = \frac{x^*}{t^*}$$



Παρατηρούμε ότι η θέση x^* βρίσκεται στο διάστημα $[x^*_{min}, x^*_{max}]$, όπου

$$x^*_{min} = c_\sigma t^* \quad , \quad x^*_{max} = c_o t^*$$

Στη θέση x^*_{min} και πίσω από αυτήν η πυκνότητα των οχημάτων είναι μέγιστη και τα οχήματα δεν κινούνται, ενώ στη θέση x^*_{max} και εμπρός από αυτήν η πυκνότητα είναι μηδενική, δηλαδή:

- για $x \le x^*_{min}$: $\rho = \rho_\sigma$, $v = 0$
- για $x \ge x^*_{max}$: $\rho = 0$, $(v = v_0)$

Η ταχύτητα των οχημάτων αυξάνεται σταδιακά από $v = 0$ στη θέση $x = x^*_{min}$ σε $v = v_0 = \max!$ στη θέση $x = x^*_{max}$.

Επίσης, παρατηρούμε ότι στη **θέση του σηματοδότη έχουμε πάντοτε πως η ταχύτητα των οχημάτων ισούται προς την βέλτιστη ταχύτητα σχεδιασμού,**

- $x = 0 \quad \Rightarrow \quad C(\rho) = 0 \quad \Rightarrow \quad \rho = \rho_m \quad , \quad v = v_m$

Αυτό καταδεικνύει την αποδοτικότητα των φωτεινών σηματοδοτών, γεγονός που δεν ήταν σαφές μέχρι τη δεκαετία του 50, οπότε και αναπτύχθηκε η θεωρία της κυκλοφοριακής ροής.

Τέλος, για την κατασκευή του διαγράμματος κατανομής της πυκνότητας κυκλοφοριακής ροής την τυχούσα χρονική στιγμή $t = t^*$ επιλύουμε την εξίσωση

$$C(\rho) = \frac{x^*}{t^*} \quad \Rightarrow \quad \rho = \rho^*$$

Εστω

$$C(\rho) = 60 - 1.2\rho + 0.004\rho^2$$

τότε π.χ. σε χρόνο $t^* = 2.\sec$ έχουμε,

$$x^*_{min} = c_\sigma t^* = -30\,\text{km/hr}\ \frac{2}{3600}\text{hr} = 16.7\text{m}$$

$$x^*_{max} = c_o t^* = +60\,\text{km/hr}\ \frac{2}{3600}\text{hr} = 33.4\text{m}$$

και π.χ. για

$$x^* = 7.83\text{m} \quad \Rightarrow \quad \rho^* = 45\,\text{οχ/km}$$

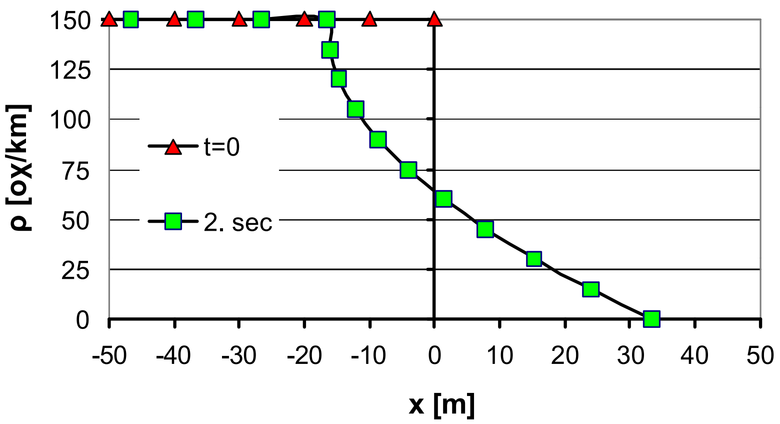
Τέλος επισημαίνουμε ότι το αποτέλεσμα $x^*_{min} = 16.7\text{m}$ σημαίνει πρακτικά ότι, 2 sec μετά την αλλαγή του φωτεινού σηματοδότη, το **κύμα εκκίνησης** των οχημάτων έχει φθάσει σε απόσταση 16.7m (2 - 3 οχημάτων) πίσω από το σηματοδότη. Οπότε ένα όχημα σε απόσταση d πίσω από το σηματοδότη θα ξεκινήσει μετά από χρόνο

$$t = \frac{d}{|c_\sigma|}$$

Στο παράδειγμα:

$$d = 16.7\text{m}, \quad |c_\sigma| = 30\,\text{km/hr} \quad \Rightarrow \quad t = 2\sec.$$

Στο ίδιο χρονικό διάστημα το πρώτο όχημα της ουράς θα βρίσκεται στη θέση $x^*_{max} = 2d$. Το αποτέλεσμα αυτό δικαιολογεί κάπως τον εκνευρισμό των οδηγών που περιμένουν στην ουρά πίσω από το σηματοδότη.



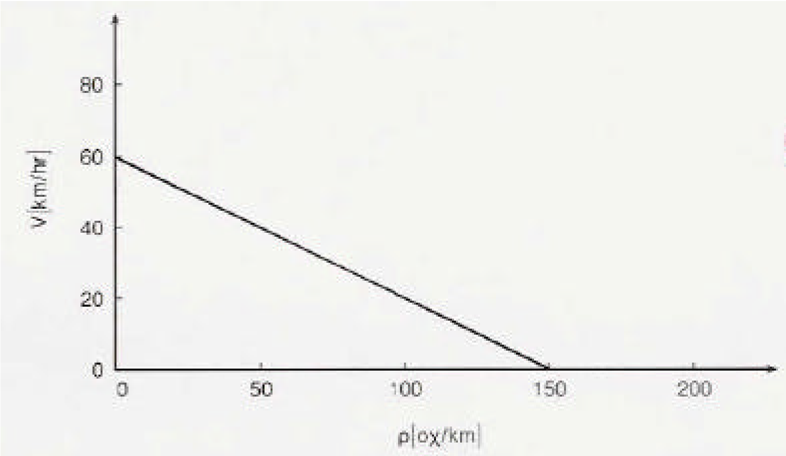
3.7 Κρουστικό Κύμα[7]

Χάριν απλότητας θεωρούμε ότι στο πρόβλημα κυκλοφοριακής ροής

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + C(\rho)\frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \qquad (6)$$

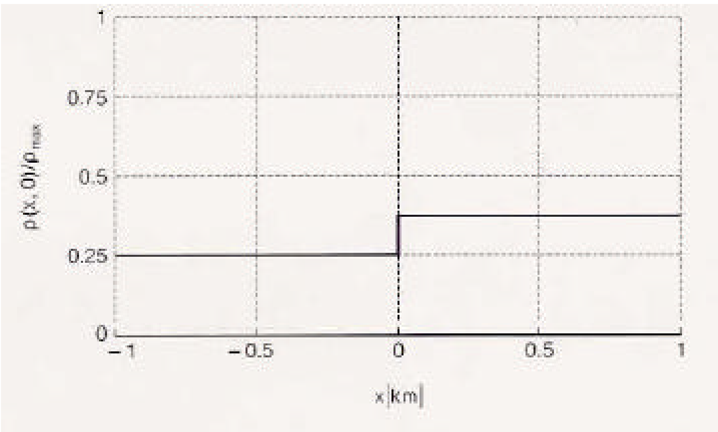
η σχέση ταχύτητας-πυκνότητας είναι κατά προσέγγιση γραμμική

$$\boxed{V(\rho) = v_{max}\left(1 - \frac{\rho}{\rho_{max}}\right)} \qquad (7)$$



Ας υποθέσουμε τώρα ότι θέλουμε να υπολογίσουμε την κατανομή πυκνότητας $\rho = \rho(x,t)$ για την παρακάτω αρχική συνθήκη, που αντιστοιχεί σε μια πύκνωση κατάντη της οδού:

$$\rho(x,0) = \begin{cases} \frac{1}{4}\rho_{max} & x < 0 \\ \frac{3}{8}\rho_{max} & x > 0 \end{cases}$$



7 Αγγλ. *shock wave*

Παρατηρούμε τώρα ότι στη βάση της καταστατικής σχέσης (7) έχουμε,

$$Q(\rho) = \rho V(\rho) = v_{max}\left(\rho - \frac{\rho^2}{\rho_{max}}\right)$$

$$C(\rho) = \frac{dQ}{d\rho} = v_{max}\left(1 - 2\frac{\rho}{\rho_{max}}\right)$$

Οπότε από τον ορισμό μιας Χ.Γ. στο επίπεδο O(x,t):

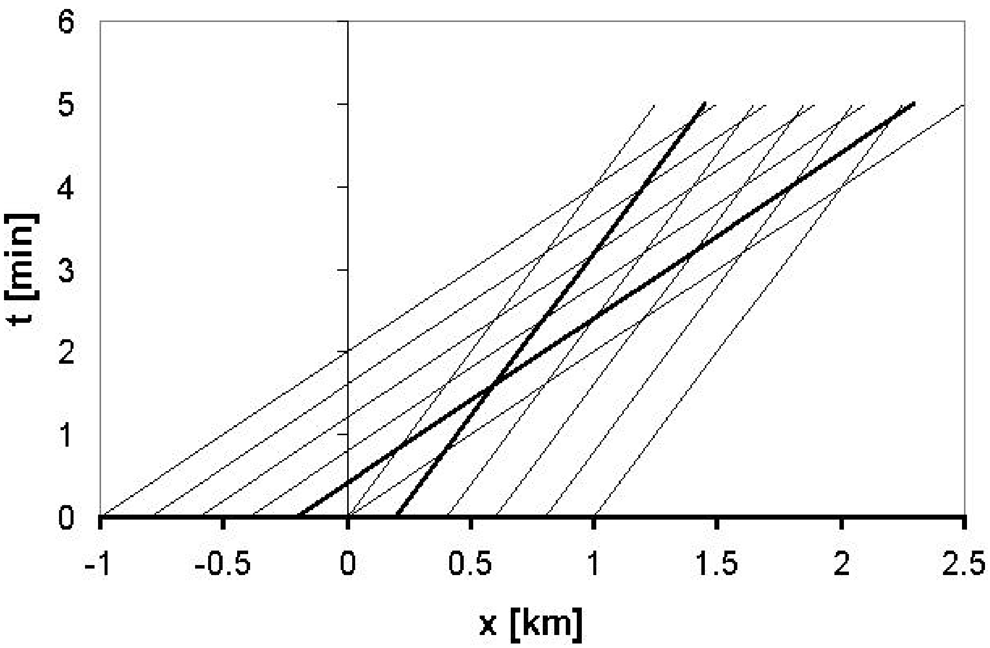
$$x = s + C(\rho)t$$

η παραπάνω αρχική κατανομή πυκνότητας οδηγεί σε αλληλοτομία των Χ.Γ. στην περιοχή $0 \le s$. Αυτό σημαίνει πως ξεκινώντας από το σημείο O(0,0) θα βρίσκουμε σημεία (γεγονότα) στο επίπεδο O(x,t), τα σημεία αλληλοτομίας δυο Χ.Γ., όπου η πυκνότητα θα έχει δύο τιμές. Αυτή η διτιμία προσομοιάζει μαθηματικά τη περίπτωση όπου σε πολύ μικρή απόσταση η πυκνότητα κυκλοφοριακής ροής αλλάζει απότομα από μια τιμή

$$\rho^- = 0.25\rho_{max}$$

σε μια τιμή,

$$\rho^+ = 0.375\rho_{max} > \rho^-$$



Αντιστοίχως βέβαια στο μικρό αυτό διάστημα θα πρέπει να προσαρμοστούν και οι ταχύτητες των εισερχομένων στο μέτωπο πύκνωσης οχημάτων, από μια σχετικά υψηλή ταχύτητα

$$v^{-} = 0.75 v_{max}$$

σε μια χαμηλότερη

$$v^{+} = 0.625\, v_{max} < v^{-}$$

Μια τέτοια οριακή κατανομή πυκνότητας λέγεται **κρουστικό κύμα**, διότι οι οδηγοί των οχημάτων εισερχόμενοι στο μέτωπο πρέπει να επιβραδύνουν απότομα ή αλλιώς θα συγκρουσθούν με τους προηγούμενους. Και στις δύο περιπτώσεις τα εισερχόμενα οχήματα πρέπει να μειώσουν την ταχύτητά τους για να προσαρμοστούν στις εκεί επικρατούσες συνθήκες κυκλοφορίας.

Παρατηρούμε ότι στο συγκεκριμένο παράδειγμα εκατέρωθεν του κρουστικού κύματος παρατηρούνται ασυνέχειες τόσο στην πυκνότητα όσο και στην ταχύτητα, που περιγράφονται από τα **άλματα**

$$[\rho] = \rho^{+} - \rho^{-} = 0.125\, \rho_{max}$$

$$[v] = v^{+} - v^{-} = -0.125\, v_{max}$$

Το φαινόμενο που περιγράψαμε εδώ είναι τυπικό στη Μηχανική μη-γραμμικών κυμάτων και μοιάζει με τη λεγόμενη λέγεται **θραύση θαλασσίου κύματος** κοντά στην ακτή που θα αναλύσουμε στο Κεφ. 5.3.1. Παρ' όλη τη μαθηματική ομοιότητα μεταξύ των δύο προβλημάτων, θα πρέπει να τονίσουμε εδώ ότι στη περίπτωση που εξετάζουμε εδώ δεν έχει φυσικό νόημα να υποθέσουμε ότι η πυκνότητα της κυκλοφοριακής ροής παίρνει σε μια θέση παραπάνω από μια τιμή. Γι' αυτό θα εξετάσουμε αμέσως παρακάτω τη περίπτωση δημιουργίας μιας ασυνέχειας στη πυκνότητα. Υπενθυμίζουμε ότι πάνω στο κρουστικό κύμα καταρρέει το μαθηματικό μοντέλο της διαφορικής εξίσωσης της κυκλοφοριακής ροής, διότι, όπως αναφέραμε εισαγωγικά στο Κεφ. 3.1, η Εξ. (2) ισχύει μόνο εκεί όπου οι συναρτήσεις ταχύτητας και πυκνότητας είναι συνεχείς και παραγωγίσιμες.

- ***Ταχύτητα Μετάδοσης Κρουστικού Κύματος***

Για τη μελέτη μετάδοσης ασυνεχειών στην πυκνότητα θεωρούμε ότι σε μια θέση

$$x = D(t)$$

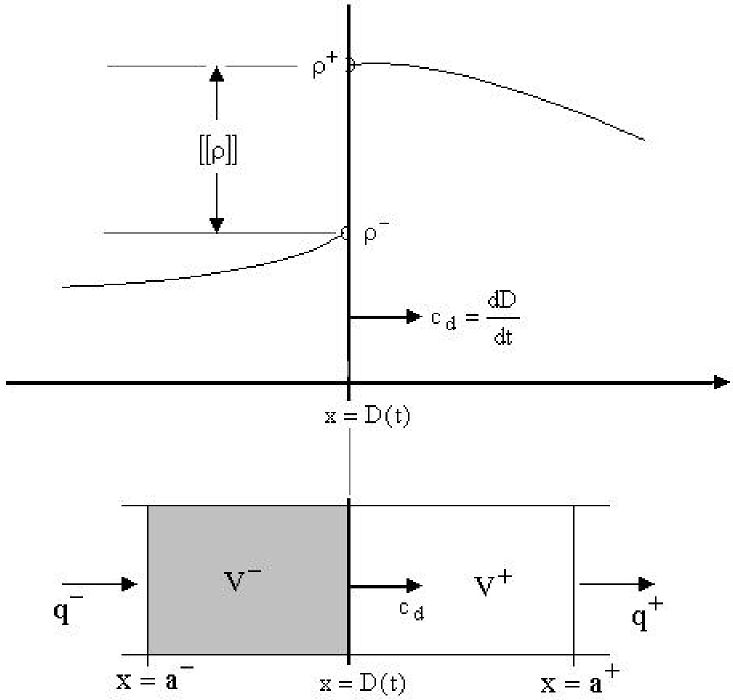
(D : discontinuity) εμφανίζεται ένα άλμα στην πυκνότητα

$$[\rho] = \rho^{+} - \rho^{-} = \rho\left(D^{+}, t\right) - \rho\left(D^{-}, t\right)$$

και κατ' επέκταση μια ασυνέχεια στη ροή

$$[q] = q^{+} - q^{-} = q\left(D^{+}, t\right) - q\left(D^{-}, t\right)$$

$$[q] = \rho^{+} v^{+} - \rho^{-} v^{-}$$



Εστω

$$c_d = \frac{dD}{dt}$$

η ταχύτητα μετάδοσης του κρουστικού κύματος. Επειδή η μάζα πρέπει να διατηρείται εκατέρωθεν της ασυνέχειας, $x = D(t)$, συμφώνως με το σχήμα έχουμε

$$\dot{m}^{+} = \int_{D(t)}^{a^{+}} \frac{\partial \rho}{\partial t} dx + q(a^{+}) - \rho^{+} c_d$$

Οπότε,

$$\dot{m} = \dot{m}^{+} + \dot{m}^{-} = \int_{D(t)}^{a^{+}} \frac{\partial \rho}{\partial t} dx + q(a^{+}) - \rho^{+} c_d + \left(\int_{a^{-}}^{D(t)} \frac{\partial \rho}{\partial t} dx + \rho^{-} c_d - q(a^{-}) \right)$$

$$\dot{m} = \int_{D(t)}^{a^+} \frac{\partial \rho}{\partial t} dx + \int_{a^-}^{D(t)} \frac{\partial \rho}{\partial t} dx + q(a^+) - \rho^+ c_d + \left(\rho^- c_d - q(a^-)\right)$$

Η Αρχή Διατήρησης της Μάζας επιτάσσει όπως

$$\dot{m} = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_{a^-}^{a^+} \frac{\partial \rho}{\partial t} dx + q(a^+) - \rho^+ c_d - \left(q(a^-) - \rho^- c_d\right) = 0$$

Αν τώρα πάρουμε το όριο

$$a^+ = -a^- = a \to 0$$

το ολοκλήρωμα στην παραπάνω σχέση δεν συνεισφέρει τίποτε, και λαμβάνουμε τελικά τη λεγόμενη **συνθήκη Rankine Hugoniot**[8]

$$q^+ - \rho^+ c_d = q^- - \rho^- c_d \quad \Rightarrow \quad \rho^+ v^+ - \rho^+ c_d = \rho^- v^- - \rho^- c_d$$

ή

$$\rho^+\left(v^+ - c_d\right) = \rho^-\left(v^- - c_d\right)$$

πού συνδέει τις τιμές της πυκνότητας και ταχύτητας εκατέρωθεν της ασυνέχειας με την ταχύτητα μετάδοσης της. Πράγματι από τη παραπάνω συνθήκη παίρνουμε τελικά,

$$\boxed{c_d = \frac{[q]}{[\rho]}} \qquad (7)$$

Η συνθήκη Rankine-Hugoniot σημαίνει ότι όταν εκατέρωθεν μιας ‘επιφάνειας’ (γραμμής εν προκειμένω) $x = D(t)$ εμφανίζονται άλματα στην πυκνότητα και στη ροή, τότε η ‘επιφάνεια’ αυτή κινείται με ταχύτητα c_d.

Επιστρέφουμε τώρα στο παράδειγμα που αναφέραμε πιο πάνω, οπότε έχουμε

$$c_d = \frac{[Q(\rho)]}{[\rho]} = \left(1 - \frac{[\rho^2]}{\rho_{max}[\rho]}\right) v_{max}$$

- $\rho^- = 0.25\rho_{max} \quad \Rightarrow \quad (\rho^-)^2 = 0.0625\rho_{max}^2$

---

[8] R. Haberman, *Elementary Applied Partial Differential Equations*, Prentice-Hall, sect. 12.6.2, 1998

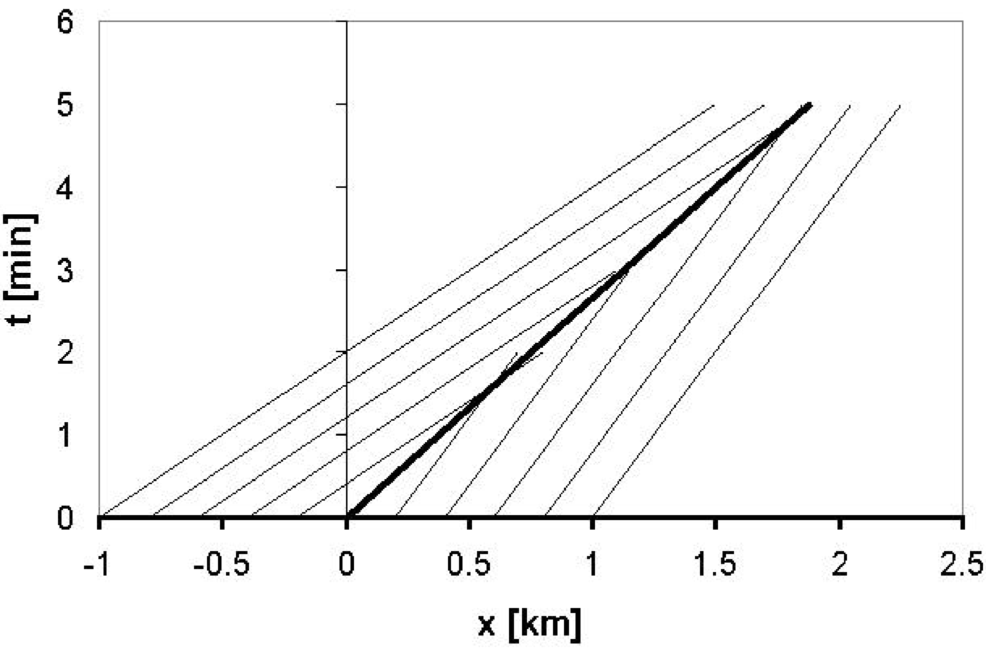
- $\rho^{+} = 0.375\rho_{max} \quad \Rightarrow \quad (\rho^{+})^2 = 0.140625\rho_{max}^2$

- $[\rho] = 0.125\rho_{max} \quad , \quad [\rho^2] = 0.078125\rho_{max}^2$
- $c_d = \left(1 - \dfrac{0.078125}{0.125}\right) v_{max} = 0.375\, v_{max}$

Οπως φαίνεται στο αντίστοιχο γράφημα το μέτωπο

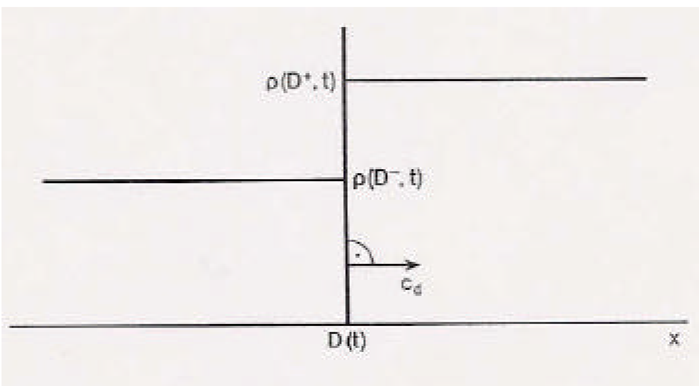
$x = D(t) = 0.375\, v_{max}\, t$

διέρχεται από το σημείο (0,0) και χωρίζει το πεδίο ορισμού του προβλήματος σε δύο περιοχές, συνέχειας της κυκλοφοριακής ροής.



Αρα το κρουστικό κύμα πυκνότητας κινείται προς τα εμπρός με ταχύτητα

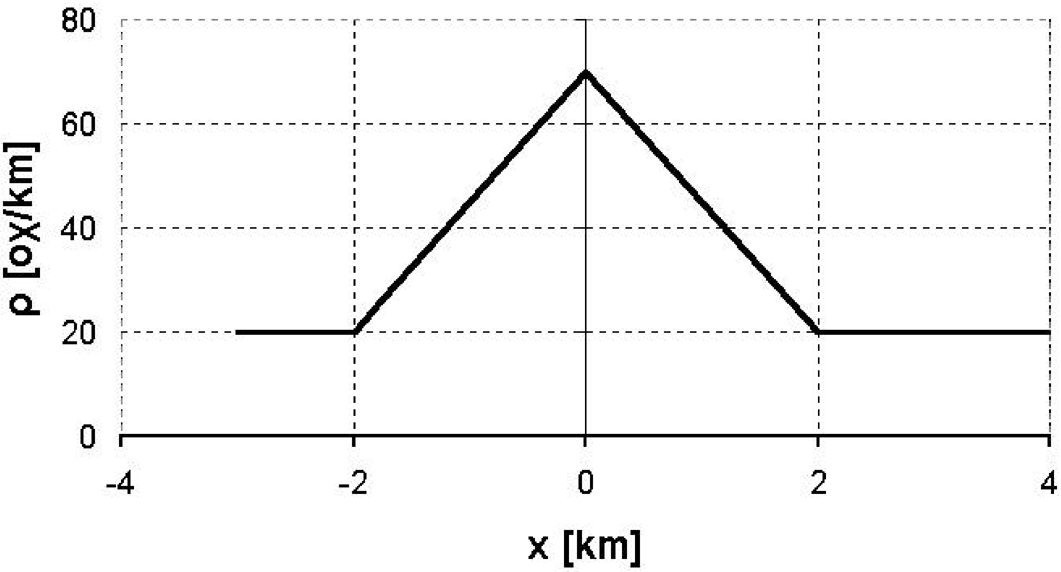
$c_d = 22.5\,\mathrm{km/hr}$.



Ασκήσεις

1. Θεωρούμε τη χρονική στιγμή t=0 μια διαταραχή $\tilde{\rho}(x)$ μιας ομοιόμορφης ροής, την οποία περιγράφουμε χάριν απλότητας με μία τριγωνική συνάρτηση

$$\rho = \rho_0 + \tilde{\rho}(x) \quad , \quad \rho_0 = 20 \quad , \quad \tilde{\rho} = \begin{cases} 70 - 25|x| & |x| \le 2\text{km} \\ 0 & \end{cases}$$



α) Να βρεθούν και σχεδιασθούν οι Χ.Γ. του προβλήματος

β) Να υπολογισθεί η μορφή της διαταραχής σε χρόνους 1 min, 2 min και 3 min.

2. Υποθέτουμε ότι οι οδηγοί των οχημάτων προσαρμόζουν την ταχύτητά τους στις εκάστοτε συνθήκες κυκλοφορίας μειώνοντας ή αυξάνοντας ταχύτητα αν βλέπουν ότι βρίσκονται σε πύκνωση ή αραίωση της πυκνότητας αντιστοίχως. Αυτή η υπόθεση οδηγεί στην εξής βελτίωση του μοντέλου για την (μέση) ταχύτητα των οχημάτων,

$$v = V(\rho) - \frac{\nu}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} \tag{8}$$

όπου η συνάρτηση $V(\rho)$ είναι γραμμική (πρβλ. Εξ. (*) παραπάνω) και η σταθερά ν προσδιορίζεται εμπειρικά και έχει διαστάσεις $[L^2T^{-1}]$.

Γράφοντας

$$\nu = \ell_c v_0$$

σημειώνουμε ότι το χαρακτηριστικό μήκος ℓ_c προκύπτει σχετικά μικρό.

α) Να αποδειχθεί ότι η αντίστοιχη διαφορική εξίσωση που διέπει την κυκλοφοριακή ροή είναι η **εξίσωση Burger**

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v_{max}\left(1 - \frac{2\rho}{\rho_{max}}\right)\frac{\partial \rho}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} \qquad (10)$$

β) Να διερευνηθεί η διάδοση μιας βηματικής διαταραχής

$$\rho(x,0) = \begin{cases} \frac{1}{4}\rho_{max} & x < 0 \\ \\ \frac{3}{8}\rho_{max} & x > 0 \end{cases}$$

και να συγκριθούν τα αποτελέσματα για διάφορες επιλογές του χαρακτηριστικού μήκους ℓ_c (διάχυση κρουστικού κύματος).

Παρατήρηση

Η παραπάνω εξίσωση Burger (10) με τη βοήθεια του μετασχηματισμού

$$C = v_{max}\left(1 - \frac{2\rho}{\rho_{max}}\right)$$

παίρνει την κανονική μορφή

$$\frac{\partial C}{\partial t} + C\frac{\partial C}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}$$

Η εξίσωση αυτή είναι η απλούστερη δυνατή που συνδυάζει μη-γραμμικό κυματικό χαρακτήρα με χαρακτήρα διάχυσης (πρβλ. Κεφ 7.6). Η εξίσωση Burger αναλύεται διεξοδικά στο βιβλίο του G.B. Whitham, *Linear and Nonlinear Waves,* Wiley, 1974.

3. Για να διερευνήσουμε την επίδραση του **χρόνου αντίδρασης** τ του οδηγού υποθέτουμε ότι η ταχύτητα του οχήματος προσαρμόζεται προς την τοπική τιμή της πυκνότητας κυκλοφοριακής ροής όχι σε πραγματικό χρόνο αλλά σε χρόνο προγενέστερο, οπότε για μικρούς σχετικά χρόνους αντίδρασης η καταστατική εξίσωση (3) αντικαθίσταται από την εξής (γιατί;)

$$v = V\big(\rho(x, t-\tau)\big) \approx V(\rho) - \tau V'(\rho)\frac{\partial \rho}{\partial t} \tag{11}$$

α) Να αποδειχθεί ότι στη συγκεκριμένη περίπτωση η διαφορική εξίσωση (6) της κυκλοφοριακής ροής γίνεται,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + C(\rho)\frac{\partial \rho}{\partial x} = \tau \frac{\partial}{\partial x}\left(\rho V'(\rho)\frac{\partial \rho}{\partial t}\right) \tag{12}$$

β) Για μικρές διαταραχές γύρω από μία λύση ισορροπίας,

$$\rho = \rho^* + \tilde{\rho}(x,t)$$

να αποδειχθεί ότι η Εξ. (12) οδηγεί στην εξής γραμμικοποιημένη εξίσωση για τη διαταραχή,

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + c^* \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial x} = \tau \rho^* V'(\rho^*)\frac{\partial^2 \tilde{\rho}}{\partial x \partial t} \tag{13}$$

γ) Να εξατασθεί η ύπαρξη λύσεων της Εξ. (13) της μορφής,

$$\tilde{\rho} = \mathrm{Re}\big(\exp(ikx + st)\big) \quad , \quad i = \sqrt{-1}$$

και να αποδειχθεί ότι ο **ρυθμός άυξησης της διαταραχής** δίδεται από την παρακάτω σχέση "διασποράς"

$$s = -\frac{ikc^*}{1 - i\tau k \rho^* V'(\rho^*)}$$

Μετά από κατάλληλη επιλογή των παραμέτρων του προβλήματος να διερευνηθεί η **ευστάθεια** της λύσης ισορροπίας, δηλάδη να βρεθεί για ποιές τιμές των παραμέτρων του προβλήματος,

$$\mathrm{Re}(s) = \begin{cases} s < 0 & \text{ευσταθής λύση} \\ s > 0 & \text{ασταθής λύση} \end{cases}$$