2. ΑΡΧΗ ΔΙΑΤΗΡΗΣΗΣ ΤΗΣ ΜΑΖΑΣ

2.1 Θεώρημα Μεταφοράς του Reynolds

Εστω ένα πεδίο $\phi(x,t)$ και έστω $\psi(t)$ το ολοκλήρωμά του στο διάστημα $[a,b]$,

$$\psi(t) = \int_a^b \phi(x,t)\, dx$$

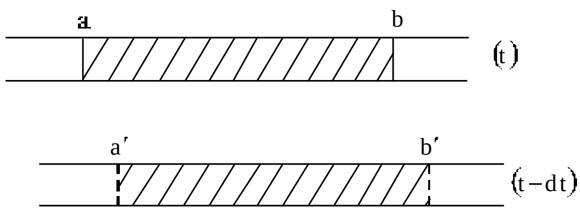
Για παράδειγμα, το πεδίο αυτό θα μπορούσε να είναι η γραμμική πυκνότητα $\rho(x,t)$, οπότε το αντίστοιχο ολοκλήρωμα θα ταυτίζονταν με τη μάζα στο εν λόγω διάστημα,

$$m(t) = \int_a^b \rho(x,t) dx$$

Αν θέλουμε πράγματι η ψ να αφορά πάντα τα ίδια υλικά σημεία, η **υλική παράγωγος**

$$\dot{\psi} = \frac{d\psi}{dt}$$

έχει το νόημα της χρονικής μεταβολής της ψ, όταν λάβουμε υπ' όψιν ότι δεν μεταβάλλεται μόνο χρονικά η υπό ολοκλήρωση συνάρτηση ϕ, αλλά, λόγω της κινήσεως των υλικών σημείων στο χώρο, ότι μεταβάλλεται και το πεδίο ολοκληρώσεως. Δηλαδή



$$\dot{\psi}\, dt = \int_{a'}^{b'} \phi(x',t+dt)\, dx' - \int_a^b \phi(x,t)\, dx$$

όπου x και x' είναι θέσεις του υλικού σημείου ξ κατά τη χρονική στιγμή t και $t'=t+dt$, αντιστοίχως

$$x = X^L(\xi,t), \quad x' = X^L(\xi,t+dt)$$

Για τον υπολογισμό της $\dot{\psi}$, μετασχηματίζουμε πρώτα το αρχικό ολοκλήρωμα

$$\psi(t) = \int_a^b \phi(x,t)\, dx = \int_\alpha^\beta \phi(X^L(\xi,t))\, J\, d\xi$$

όπου J=J(t) είναι η **ιακωβιανή** του μετασχηματισμού $\xi \mapsto x$,

$$dx = Jd\xi \quad , \quad J = \frac{\partial X^L}{\partial \xi}$$

Τα όρια ολοκλήρωσης

$$\alpha = X^E(a,t) \quad , \quad \beta = X^E(b,t)$$

είναι σταθερά, και αντιστοιχούν στη θέση αναφοράς των υλικών σημείων εκείνων, που τη χρονική στιγμή t κατέχουν τις θέσεις a και b αντιστοίχως, οπότε,

$$\dot{\psi} = \frac{d}{dt}\int_\alpha^\beta \phi^L J d\xi = \int_\alpha^\beta \frac{d}{dt}(\phi^L J)\, d\xi = \int_\alpha^\beta \left(\frac{d\phi^L}{dt} J + \phi^L \frac{dJ}{dt} \right) d\xi$$

Παρατηρούμε ότι

$$\frac{d}{dt} J = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial X^L}{\partial \xi} \right) = \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial X^L}{\partial t} \right) = \frac{\partial v^L}{\partial \xi} = \frac{\partial v^E}{\partial x}\frac{\partial X^L}{\partial \xi} = \frac{\partial v^E}{\partial x} J$$

Επειδή

$$v = v^L = v^E \text{ και } \phi = \phi^L = \phi^E ,$$

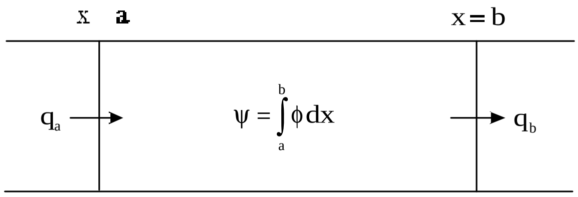
έχουμε τελικά

$$\dot{\psi} = \int_\alpha^\beta \left(\frac{d\phi}{dt} + \phi \frac{\partial v}{\partial x} \right) J\, d\xi \quad \Rightarrow \quad \boxed{\dot{\psi} = \int_a^b \left(\frac{d\phi}{dt} + \phi \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx}$$

Η παραπάνω έκφραση για την υλική παράγωγο της **καθολικής** ποσότητας ψ μπορεί να γραφεί ως εξής,

$$\dot{\psi} = \int_a^b \left(\frac{d\phi}{dt} + \phi \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx = \int_a^b \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + v\frac{\partial \phi}{\partial x} + \phi \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx$$

$$\Rightarrow \quad \dot{\psi} = \int_a^b \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\phi v) \right) dx$$



Η ποσότητα

$$\boxed{q = \phi v}$$

καλείται **ροή** της ϕ, οπότε:

$$\boxed{\dot{\psi} = \int_a^b \frac{\partial \phi}{\partial t}\, dx + q(b) - q(a)} \qquad (1)$$

Οι παραπάνω εκφράσεις για την υλική παράγωγο της καθολικής ή αθροιστικής ποσότητας $\psi(t)$ συνιστούν το **θεώρημα μεταφοράς του Reynolds**. Παρατηρούμε ότι η μεταβολή της $\psi(t)$ αποτελείται από ένα **τοπικό** όρο

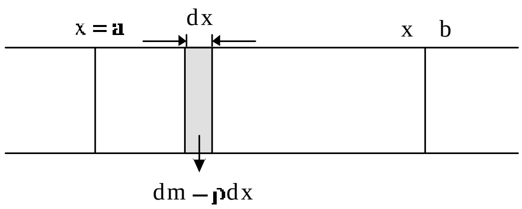
$\int_a^b \frac{\partial \phi}{\partial t}\, dx$: μεταβολή της ϕ στο διάστημα $[a,b]$

και όρους **εκ μεταφοράς**

$q(b) - q(a)$: (εκροή) – (εισροή) της ϕ στο διάστημα $[a,b]$.

2.2 Διατήρηση της Μάζας

Ως εφαρμογή του θεωρήματος μεταφοράς του Reynolds θεωρούμε ένα μονοδιάστατο Συνεχές Μέσο του οποίου η μάζα ορίζεται μέσω της (γραμμικής) πυκνότητάς του:



$$m(t) = \int_a^b \rho(x,t)\, dx$$

Δεχόμενοι ότι τα υλικά σημεία του μέσου αυτού κινούνται, αλλά και ότι η μάζα του δεν αλλάζει, απαιτούμε όπως

$$\dot{m} = \frac{dm}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_a^b \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v) \right] dx = 0$$

Η παραπάνω εξίσωση συνιστά την **καθολική** έκφραση της **Αρχής Διατήρησης της Μάζας** (Α.Δ.Μ.). Για να παράγουμε τη λεγόμενη **τοπική** έκφραση της αρχής αυτής, κάνουμε χρήση του παρακάτω θεωρήματος από την Ανάλυση:

Θεώρημα: Εστω $f(x)$ μια συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[c,d]$ και έστω ότι

$$\int_a^b f(x)\,dx = 0$$ για κάθε a,b με $c < a < b < d$,

τότε

$$f(x) = 0 \qquad \forall\, x \in [c,d].$$

Αν δεχθούμε ότι η πυκνότητα είναι **συνεχής** συνάρτηση της θέσης τότε με βάση το παραπάνω θεώρημα παίρνουμε την **τοπική** *μορφή* της Α.Δ.Μ.:

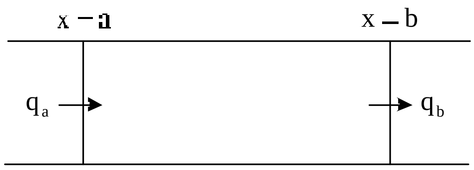
$$\dot{m} = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v) = 0} \tag{2}$$

ή

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

Εφαρμογή: *Ασυμπίεστα ρευστά*

Ας θεωρήσουμε τώρα την οριακή περίπτωση ενός ασυμπίεστου ρευστού, όπου εξ ορισμού η πυκνότητα των υλικών σημείων δεν αλλάζει:



ÅéóñÝïõóá ìÜæá ñåõóôïý = ÅêñÝïõóá ìÜæá ñåõóôïý

$$\rho = \rho_0 = \sigma\tau\alpha\theta. \quad \Rightarrow \quad \frac{d\rho}{dt} = 0$$

Από την παραπάνω έκφραση για τη διατήρηση της μάζας παίρνουμε ότι η **ροή μάζας**

$$\boxed{q = \rho\, v(x,t)}$$

μεταξύ δύο θέσεων $x=a$ και $x=b$ είναι η ίδια. Πράγματι, από την εξίσωση διατήρησης της μάζας έχουμε $\rho = \rho_0 = \sigma\tau\alpha\theta.$ και,

$$\rho_0 \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(\rho_0 v) = \frac{\partial q}{\partial x} = 0$$

ή

$$\int_a^b \frac{\partial q}{\partial x} dx = 0 \quad \Rightarrow \quad q(b,t) = q(a,t)$$

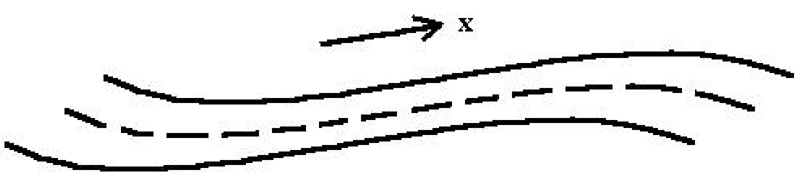
Η εξίσωση:

$$\boxed{\frac{\partial q}{\partial x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad q(b,t) = q(a,t)}$$

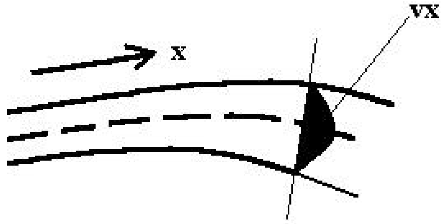
λέγεται **εξίσωση συνέχειας** της ροής για ασυμπίεστα ρευστά.

2.3 Το Οιονεί Μονοδιάστατο Συνεχές Μέσο

Πολλά Συνεχή Μέσα είναι σχεδόν μονοδιάστατα, όπου πάλι μια διάσταση, έστω κατά τη κατεύθυνση x, είναι η προεξάρχουσα και οι διαστάσεις καθέτως προς αυτή είναι σχετικά μικρές αλλά όχι κατ' ανάγκη σταθερές, μεταβαλλόμενες ασθενώς στην κατεύθυνση x. Στην κατηγορία αυτή των λεγόμενων **οιονεί μονοδιάστατων**[1] Συνεχών Μέσων ανήκουν α) από τη Μηχανική του Παραμορφώσιμου Στερεού Σώματος η δοκός μεταβλητής διατομής, και β) από την Υδρομηχανική οι ποταμοί και αγωγοί μεταβλητής διατομής.



Στην περίπτωση που εξετάζουμε, η ταχύτητα v_x παράλληλα προς τον άξονα x δεν θα είναι αυστηρά σταθερή κατά την έκταση μίας διατομής (A). Αυτό σημαίνει ότι μέσα στα πλαίσια της οιονεί μονοδιάστατης ανάλυσης θα δεχθούμε ότι οι μαθηματικές εκφράσεις που αναπτύσσουμε δεν αφορούν την ταχύτητα καθεαυτή αλλά τη μέση τιμή της πάνω στη διατομή,



[1] Αγγλ. *quasi one-dimensional*

$$v_\ell = \langle v_x \rangle = \frac{1}{A}\iint_{(A)} v_x dA$$

Ο δείκτης ℓ[2] υποδηλώνει ότι η συγκεκριμένη μεταβλητή περιγράφει μηχανική ιδιότητα του αντίστοιχου **γραμμωτού συνεχούς**. Ετσι ορίζουμε τη **γραμμική πυκνότητα**,

$$\rho_\ell = \int_{(A)} \rho\, dA \approx \rho A$$

όπως και την **ολική παροχή**,

$$q_\ell = \iint_{(A)} v_x dA = A v_\ell \quad \Rightarrow \quad v_\ell = \frac{q_\ell}{A}$$

Κατόπιν ολοκληρώνουμε την εξίσωση διατήρησης της μάζας πάνω στη διατομή,

$$\iint_{(A)} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) \right) dA = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial t}\iint_{(A)} \rho dA + \frac{\partial}{\partial x}\iint_{(A)} \rho v_x dA = 0$$

Αν τώρα λάβουμε υπ’ όψη ότι,

$$\iint_{(A)} \rho dA \approx \rho A$$

$$\iint_{(A)} \rho v_x dA \approx \rho \iint_{(A)} v_x dA = \rho A v_\ell = \rho q_\ell$$

η παραπάνω έκφραση για τη διατήρηση της μάζας δίδει

$$\frac{\partial}{\partial t}(A\rho) + \frac{\partial}{\partial x}(A\rho v_\ell) = 0 \qquad (3)$$

ή

$$\frac{\partial \rho_\ell}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_\ell v_\ell) = 0$$

Στην ειδική περίπτωση που το ρευστό είναι ασυμπίεστο $\rho = \sigma\tau\alpha\theta.$ η Εξ. (3) δίδει

---

[2] Λατ. *lineus,* Αρχ. Ελλ. *λίνεος*

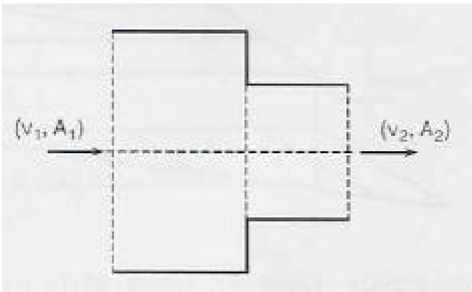
$$\frac{\partial A}{\partial t}+\frac{\partial q_\ell}{\partial x}=0 \qquad (4)$$

Αν τέλος δεχθούμε ότι και η διατομή δεν αλλάζει με το χρόνο (π.χ. στερεά τοιχώματα σωλήνα , σταθεροποιημένα πρανή ποταμού κλπ.) έχουμε,

$$A=A(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial q_\ell}{\partial x}=0$$

ή

$$q_\ell = \sigma\tau\alpha\theta. \quad \Rightarrow \quad Av_\ell = \sigma\tau\alpha\theta$$



Η τελευταία έκφραση για την εξίσωση συνέχειας σε αγωγό με μεταβλητή κατά μήκος διατομή είναι γνωστή ως ο *νόμος* **ταχύτητας-επιφάνειας** του Leonardo da Vinci (1425-1519).

2.4 Εξίσωση Ισιζύγιου με Ορους Παραγωγής

Ας θεωρήσουμε το παράδειγμα ενός καναλιού ορθογωνικής διατομής πλάτους b με βάθος ροής h. Στην περίπτωση αυτή θα εισάγουμε κατ' αρχήν την έννοια τού **όγκου αναφοράς** $V_{control}$. Συγκεκριμένα θεωρούμε τον όγκο που περικλείεται από τις διατομές

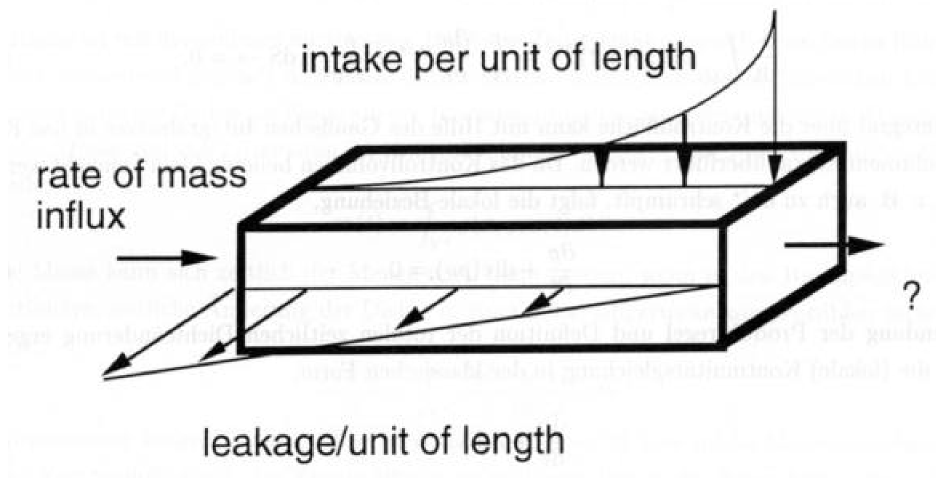
$$x = x_1 = 0 \quad , \quad x = x_2 = L$$

με εμβαδόν

$$A_1 = bh_1 \text{ και } A_2 = bh_2$$

την παράπλευρη διαβρεχόμενη επιφάνεια και την ελεύθερη επιφάνεια με εμβαδά αντιστοίχως,

$$S_\delta = 2\int_0^L bhdx \quad , \quad S_{\varepsilon.\varepsilon.} = bL$$



Θεωρούμε τώρα τη μάζα M(t) στον $V_{control}$, οπότε η **γραμμική πυκνότητα** είναι

$$\rho_\ell = \rho bh = \rho A(x,t)$$

Επίσης δεχόμεθα ότι μέσω των διατομών A_1 και A_2 η ολική παροχή είναι αντιστοίχως

$$q_{\ell 1} = qA_1 \quad , \quad q_{\ell 2} = qA_2$$

ενώ δια μέσου της παράπλευρης επιφάνειας S_δ έχουμε απώλειες ύδατος α_δ λόγω μη στεγανότητας της κατασκευής και στην ε.ε. έχουμε απώλειες λόγω εξάτμισης $\alpha_{\varepsilon.\varepsilon.}$,

$$[q_\ell] = \frac{L}{T}L^2 \ , \ [\alpha_\delta] = \frac{L^3/T}{L} \ , \ [\alpha_{\varepsilon.\varepsilon.}] = \frac{L^3/T}{L}$$

Αρα, δεχόμαστε ότι η **μάζα στον όγκο αναφοράς που μελετάμε δεν διατηρείται**. Η μεταβολή της Μ στον $V_{control}$ (για ασυμπίεστο ρευστό):

$$\dot{M} = \rho\dot{V} \quad , \quad \rho = \sigma\tau\alpha\theta.$$

και εκφράζεται αφ ενός μεν γεωμετρικά, ως αλλαγή του όγκου

$$\dot{V} = \int_0^L \frac{\partial A}{\partial t}dx$$

αφ ετέρου δε φυσικά από, τη διαφορά μεταξύ ολικής εισροής και εκροής στον $V_{control}$

$$\dot{V} = q_\ell\big|_0 - \left(q_\ell\big|_L + \int_0^L \alpha_\delta dx + \int_0^L \alpha_{\varepsilon.\varepsilon} dx \right)$$

$$= -\int_0^L \frac{\partial q_\ell}{\partial x} dx - \int_0^L (\alpha_\delta + \alpha_{\varepsilon.\varepsilon.}) dx$$

Οπότε

$$\int_0^L \frac{\partial A}{\partial t} dx = -\int_0^L \left(\frac{\partial q_\ell}{\partial x} + (\alpha_\delta + \alpha_{\varepsilon.\varepsilon.}) \right) dx = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\int_0^L \left(\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial q_\ell}{\partial x} + (\alpha_\delta + \alpha_{\varepsilon.\varepsilon.}) \right) dx \quad \forall L \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial q_\ell}{\partial x} = -(\alpha_\delta + \alpha_{\varepsilon.\varepsilon.}) \tag{5}$$

Οι συνολικές απώλειες μπορούν να θεωρηθούν ως αρνητική παραγωγή μάζας

$$\alpha = \alpha_\delta + \alpha_{\varepsilon.\varepsilon.} = -\pi$$

οπότε η Εξ. (5) είναι γενίκευση της παραπάνω Εξ. (4), επειδή περιέχει τους *όρους παραγωγής* δεξί σκέλος της.

Λαμβάνοντας υπ' όψη ότι $A = (\rho_\ell / \rho)$ και η παραπάνω εξίσωση διατήρησης παίρνει την γενική μορφή **εξίσωσης ισοζύγιου**[3],

$$\frac{\partial}{\partial t}(\textit{πυκνότητας}) + \frac{\partial}{\partial x}(\textit{ροής}) = (\textit{παραγωγή})$$

Στη Μηχανική του Συνεχούς Μέσου θα δούμε συχνά αυτή τη μορφή εξίσωσης ισοζύγιου.

Για την επίλυση της Εξ. (5) χρειάζονται επιπλέον πληροφορίες όσον αφορά τις εμπειρικές σχέσεις που διέπουν την παροχή αλλά και τις γραμμικές απώλειες σε συνάρτηση με το ύψος ροής

[3] Αγγλ. *balance equation*

$q_\ell, \alpha_\delta, \alpha_{\varepsilon.\varepsilon.} \propto f(h)$

Τέτοιες σχέσεις μας παρέχει η Τεχνική Υδραυλική. Με τη βοήθεια αυτών των σχέσεων η παραπάνω Εξ. (5) μπορεί να επιλυθεί ως προς $h = h(x,t)$ και να οδηγήσει σε πρακτικά συμπεράσματα για την εξέλιξη της ροής στον αγωγό που εξετάζουμε. Π.χ. για

- $b = \sigma\tau\alpha\theta. \quad \Rightarrow \quad A = bh(x,t) \quad , \quad q_\ell = bq(x,t)h(x,t)$

- $\alpha_\delta = \delta bh(x,t) \quad , \quad \alpha_{\varepsilon.\varepsilon.} = \varepsilon b \quad , \quad \delta, \varepsilon = \sigma\tau\alpha\theta.$

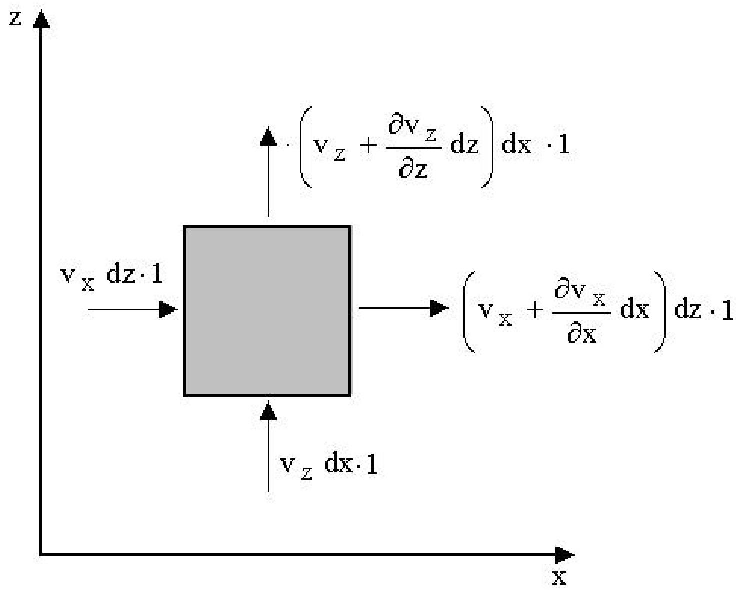
η Εξ. (5) δίδει,

$$\boxed{\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(qh) + (\delta h + \varepsilon) = 0} \qquad (6)$$

Γενικά από την Τεχνική Υδραυλική θα πάρουμε μια σχέση μεταξύ παροχής και ύψους ροής και η οποία θα λαμβάνει υπ'οψη τόσο γεωμετρικά στοιχεία όπως η κλίση του αγωγού όσο και στοιχεία που σχετίζονται με την ποιότητα των επιφανειών του αγωγού. Τέλος θα πρέπει να τονίσουμε, ότι επειδή η παραπάνω Εξ. (5) περιέχει δύο άγνωστες συναρτήσεις q και h, για την επίλυσή της γενικώς θα χρειασθεί να λάβουμε υπ' όψη και την Αρχή Διατήρησης της Ορμής (πρβλ. Κεφ. 5.3.3).

2.5 Εξίσωση Συνέχειας σε δύο Διαστάσεις

Θεωρούμε ένα ασυμπίεστο ρευστό, δηλαδή ένα ρευστό με σταθερή πυκνότητα ρ. Επίσης, θεωρούμε ένα στοιχειώδη όγκο διαστάσεων dx και dz στο επίπεδο $O(x,z)$ με μοναδιαίο πάχος καθέτως προς το επίπεδο του σχήματος.



Ο στοιχειώδης όγκος είναι,

$$dV = dx\, dz\, 1$$

Η εξίσωση διατήρησης της μάζας εκφράζεται εν προκειμένω από τη συνθήκη *συνέχειας* δηλαδή από το γεγονός ότι όση ποσότητα ρευστού εισέρχεται στον όγκο dV ανά μονάδα χρόνου τόση και εξέρχεται στον ίδιο χρόνο:

$$v_x\, dz\, 1 + v_z\, dx\, 1 = \left(v_x + \frac{\partial v_x}{\partial x} dx \right) dz\, 1 + \left(v_z + \frac{\partial v_z}{\partial z} dz \right) dx\, 1 \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0} \qquad (7)$$

ή διανυσματικά

$$\underline{\operatorname{div} \vec{v} = 0}$$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι η ροή είναι μόνιμη, δηλαδή ανεξάρτητη του χρόνου t. Παρατηρούμε ότι αν εισάγουμε μία συνάρτηση

$$\Psi = \Psi(x, z)$$

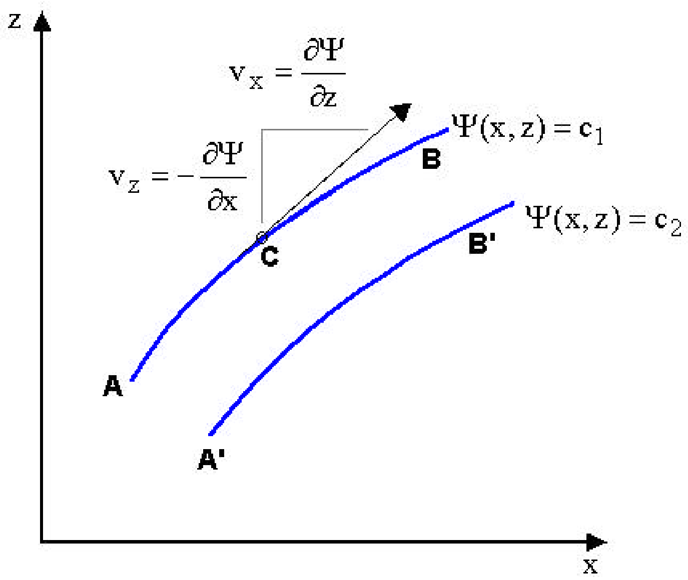
έτσι ώστε

$$v_x = \frac{\partial \Psi}{\partial z} \quad , \quad v_z = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

τότε η παραπάνω εξίσωση συνέχειας Εξ. (7) ικανοποιείται ως ταυτότητα

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z \partial x} \equiv 0$$

Ας θεωρήσουμε τώρα τη γραμμή ροής (ΑΒ) σε μία διδιάστατη ροή. Στο σημείο Γ της γραμμής ροής η ταχύτητα $\vec{v}$ είναι εφαπτομενική. Επειδή οι συνιστώσες της ταχύτητας δίδονται από τις παραπάνω σχέσεις μέσω της συνάρτησης $\Psi = \Psi(x, z)$, πού είναι ανεξάρτητη του χρόνου t, οι γραμμές ροής ταυτίζονται με τις σωματιδιακές γραμμές (μόνιμη ροή).



Οπότε

$$\frac{v_z}{v_x} = \frac{dz}{dx} \quad \Rightarrow \quad v_z dx - v_x dz = 0$$

ή

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Psi}{\partial z} dz = 0 \quad \Rightarrow \quad d\Psi = 0$$

Η παραπάνω σχέση σημαίνει ότι κατά μήκος μίας ροϊκής γραμμής η συνάρτηση Ψ παραμένει σταθερή, δηλαδή η καμπύλη (ΑΒ) περιγράφεται από την εξίσωση,

$$\Psi(x,z) = c_1 : \text{σταθ.}$$

Για το λόγο αυτό η συνάρτηση $\Psi = \Psi(x,z)$ καλείται **ροϊκή συνάρτηση**[4].

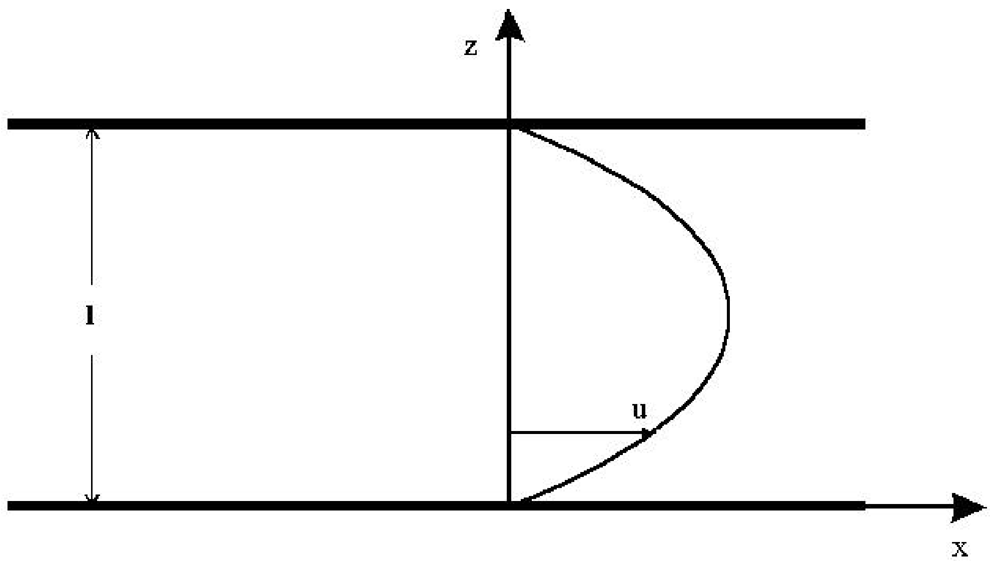
Ο μεταξύ δύο ροϊκών γραμμών χώρος λέγεται **ροϊκός σωλήνας**. Οπότε συμπεραίνουμε ότι σε μόνιμη ροή το τυχόν σωματίδιο του ρευστού, πού κάποια στιγμή βρίσκεται σε σημείο μέσα στο ροϊκό σωλήνα, θα κινείται επί ροϊκής γραμμής που σ’ όλη της την έκταση θα βρίσκεται μέσα στο ροϊκό σωλήνα αυτό.

---

[4] Αγγλ. *stream function*

Πρόβλημα

Να βρεθεί η συνάρτηση ροής της διαδιάστατης ασυμπίεστης ροής



$$v_x = u(z) = U\left[\left(\frac{z}{l}\right)^2 - \left(\frac{z}{l}\right)\right]$$

$$v_z = w = 0$$

που φαίνεται στο σχήμα.

Λύση

Αναγνωρίζουμε τα παρακάτω χαρακτηριστικά του ρευστού και του πεδίου ροής.

- Συνέχεια:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \tag{8}$$

- Συνάρτηση ροής:

$$v_x = \frac{\partial \Psi}{\partial z} \quad , \quad v_z = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \tag{9}$$

Αντικαθιστώντας τη δεδομένη ταχύτητα στην Εξ. (9), παίρνουμε

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y} = U\left[\left(\frac{z}{l}\right)^2 - \left(\frac{z}{l}\right)\right] \tag{10}$$

$$w = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} = 0 \tag{11}$$

Με την Εξ. (10), έχουμε

$$\Psi = U\left[\frac{z^3}{3l^2} - \frac{z^2}{2l} + f_1(x)\right] \tag{12}$$

και από την Εξίσωση (11)

$$\Psi = f_2(z) \tag{13}$$

Η συνάρτηση ροής Ψ πρέπει να ικανοποιεί και τις δύο απαιτήσεις από τις Εξ. (12) και (13). Συγκρίνοντάς τις εξισώσεις αυτές παίρνουμεέχουμε

$$f_1(x) = \sigma\tau\alpha\theta. \tag{14}$$

$$f_2(z) = U\left(\frac{z^3}{3l^2} - \frac{z^2}{2l}\right) \tag{15}$$

Ετσι, χρησιμοποιώντας είτε τις Εξ. (12) και (14) είτε τις (13) και (15), βρίσκουμε ότι η συνάρτηση ροής Ψ είναι:

$$\Psi = Ul\left[\frac{1}{3}\left(\frac{z}{l}\right)^3 - \frac{1}{2}\left(\frac{z}{l}\right)^2\right] \tag{16}$$

Παρατηρούμε ότι θα μπορούσαμε να προσθέσουμε μία σταθερά c και στις δύο Εξ. (12) και (13) έτσι ώστε η Εξ. (16) να γίνει

$$\Psi = Ul\left[\frac{1}{3}\left(\frac{z}{l}\right)^3 - \frac{1}{2}\left(\frac{z}{l}\right)^2\right] + c \tag{17}$$

Η τιμή της c είναι ασήμαντη και εξαρτάται από την επιλογή της γραμμής ροής την οποία κανείς επιθυμεί να καθορίσει παραμετρικά ως $\Psi = 0$. Είναι εύκολο να επιλέξει τη γραμμή ροής κατά μήκος του πυθμένα του αγωγού για $\Psi = 0$. Τότε θα πρέπει το c να είναι μηδέν έτσι ώστε $\Psi = 0$ για $z = 0$, η οποία είναι η περίπτωση της Εξ. (16).

Ασκήσεις

1. Δίδεται η ροϊκή συνάρτηση

   $$\Psi = 3x^2 + 2z^2$$

   Να υπολογισθούν και να σχεδιασθούν στο επίπεδο $O(x,z)$ οι ροϊκές γραμμές $\Psi = 0$, $\Psi = 1$, $\Psi = -1$.

2. Δίδεται η ροϊκή συνάρτηση

   $$\Psi = e^x$$

   Να υπολογισθεί η ταχύτητα και να σχεδιασθεί το πεδίο ροής μέσω κατάλληλης επιλογής ροϊκών γραμμών.

3. Δίδεται το πεδίο ταχυτήτων

   $$v_x = u(x) = x^2 \quad , \quad v_z = w(x,z) = -2xz$$

   Να υπολογισθεί η εξίσωση των ροϊκών γραμμών.