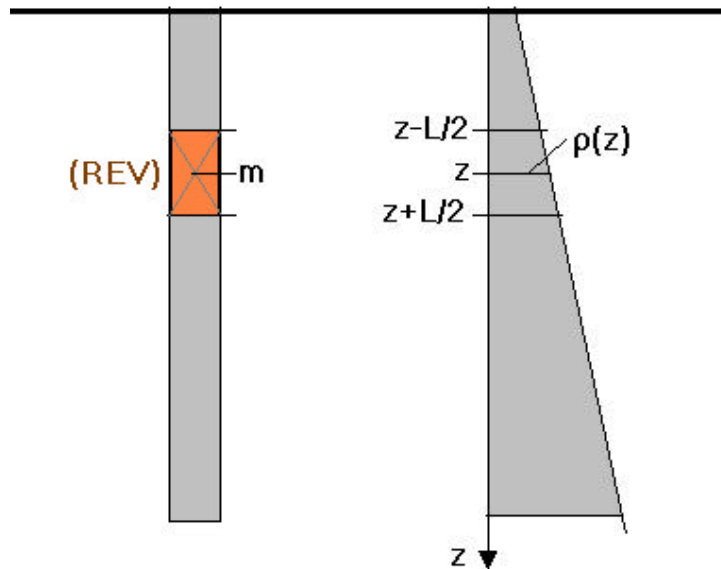


1. ΤΟ ΣΥΝΕΧΕΣ ΜΕΣΟ

1.1 Η Συνεχής Περιγραφή

Εστω ένα υλικό σώμα του οποίου θέλουμε να προσδιορίσουμε την πυκνότητα μάζας ρ , π.χ. την πυκνότητα (ειδικό βάρος) εδαφικού στρώματος συναρτήσει του βάθους z .



Παράδειγμα: Σε κανονικά στερεοποιημένες αργίλους παρατηρείται συνήθως γραμμική μεταβολή της πυκνότητας με το βάθος

Για τον προσδιορισμό της πυκνότητας πρώτα θα πρέπει να επιλέξουμε ένα **δειγματοληπτικό μήκος** L εκατέρωθεν του σημείου στη θέση z , να προσδιορίσουμε την μάζα $m(z, L)$ στο δείγμα αυτό και τέλος, να υπολογίσουμε την πυκνότητα από την σχέση

$$\langle \rho \rangle = \frac{m(z, L)}{LA} \quad (1)$$

Όπως φαίνεται και στο σχήμα, η μέση πυκνότητα, που υπολογίζεται συμφώνως με την Εξ. (1) είναι συνάρτηση τόσο της θέσεως όσο και του δειγματοληπτικού μήκους

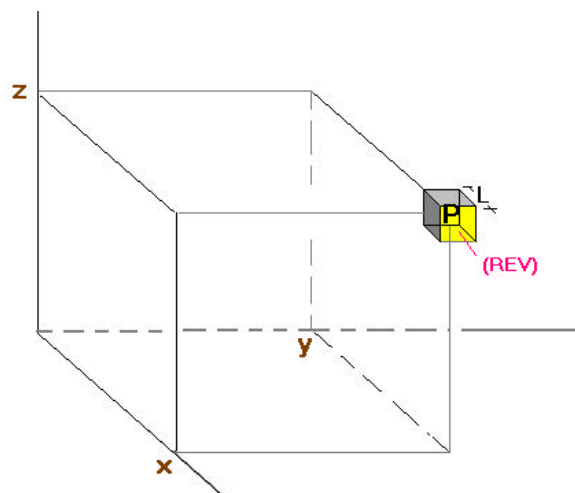
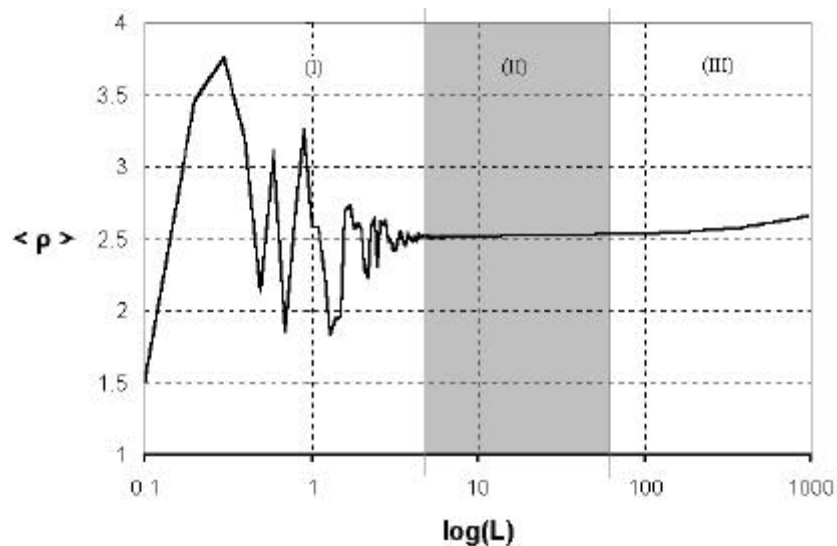
$$\langle \rho \rangle = \tilde{\rho}(z, L)$$

Γενικώς παρατηρούμε¹ όμως ότι για πολύ μικρά παράθυρα L , βρισκόμαστε στην περιοχή (I) των μοριακών διαταραχών, ενώ για πολύ μεγάλες τιμές του L στην περιοχή (III) των μακροσκοπικών ανομοιομορφιών. Υπάρχει όμως μια αρκετά εκτεταμένη ενδιάμεση περιοχή (II), όπου πράγματι η μέση τιμή της

¹ Πρβλ. L. Prandtl and O.G. Tietjens, *Fundamentals of Hydro- and Aerodynamics*, Dover, 1934.

πυκνότητας δεν εξαρτάται από το δειγματοληπτικό μήκος L και μπορούμε να την υπολογίσουμε βάσει της εξ. (1). Π.χ. αν πράγματι η κατανομή της πυκνότητας είναι γραμμική με το βάθος, τότε λόγω του νόμου του τραπεζίου, η μέση τιμή, ανεξαρτήτως του δειγματοληπτικού μήκους, ταυτίζεται με τη τιμή στο συγκεκριμένο βάθος,

$$\langle \rho \rangle_{z,L} = \rho(z) \quad (2)$$



Συμφώνως με μια αρχική πρόταση του Euler², στη Μηχανική του Συνεχούς Μέσου εισάγουμε την έννοια του **υλικού σημείου**³. Γεωμετρικά το υλικό σημείο απεικονίζεται στο γεωμετρικό κέντρο $P(x,y,z)$ ενός στοιχειώδους κύβου με χαρακτηριστική διάσταση L . Ο στοιχειώδης αυτός υλικός κύβος λέγεται και **αντιπροσωπευτικός στοιχειώδης όγκος**⁴. Σύμφωνα δε με την παραπάνω παρατήρηση οι γεωμετρικές διαστάσεις του REV πρέπει αφ' ενός μεν να είναι αρκετά μεγάλες ώστε να εξομαλύνονται οι 'μοριακές' διαταραχές αφ' ετέρου δε αρκετά μικρές ώστε τυχόν μακροσκοπικές αλλαγές να μην επηρεάζουν το

² Leonhard Euler (1707-1783).

³ Αγγλ. *material point*, γερμ. *Materialpunkt*

⁴ Αγγλ. *representative elementary volume*, REV

αποτελεσμα. Για παράδειγμα σε ένα κοκκώδες μέσο όπως η άμμος η ελάχιστη γεωμετρική διάσταση καθορίζεται από το μέγεθος του κόκκου D_g . Έχει βρεθεί

εμπειρικά δε ότι ένα σύνολο $10^2 \div 10^3$ κόκκων έχει αρκετή μεταβλητότητα, ώστε μέσοι όροι να είναι πράγματι αντιπροσωπευτικοί. Αντίθετα οι διαστάσεις ενός δοκιμίου που θα ληφθεί στο ύπαιθρο δεν θα πρέπει να ξεπερνούν το πάχος των στρώσεων απόθεσης, το οποίο καθορίζεται κυρίως από την τοπογραφία, την κλιματολογική προϊστορία και την πετρογραφία της περιοχής. Αυτό το άνω φράγμα είναι συνήθως της τάξεως του 1 dm.

Με τη διαδικασία αυτή η μέση τιμή μιας ποσότητας στο REV, π.χ. της πυκνότητας, απεικονίζεται συμφώνως προς την εξ. (2.2), στο 'υλικό' σημείο, που κατέχει τη θέση του κ.β. του REV,

$$P(x, y, z) \rightarrow \rho = \langle \rho \rangle_{REV}$$

Στα πλαίσια της Μηχανικής του Συνεχούς Μέσου θεωρούμε ότι μια τέτοια συνάρτηση πυκνότητας

$$\rho = \rho(x, y, z)$$

είναι τουλάχιστο τμηματικά συνεχής και λεία.

1.2 Τοπική Ομοιογένεια

Ας θεωρήσουμε χάριν απλότητας ένα μονοδιάστατο Συνεχές Μέσο. Εστω ένα πεδίο $y = f(x)$ που θέλουμε να περιγράψει μια μηχανική ιδιότητα του Συνεχούς (π.χ. τη πυκνότητα ρ , ή τη μετατόπιση u του υλικού σημείου, κ.λπ) και του οποίου η μέση τιμή υπολογίζεται σε ένα δειγματοληπτικό μήκος L με κέντρο το σημείο x ,

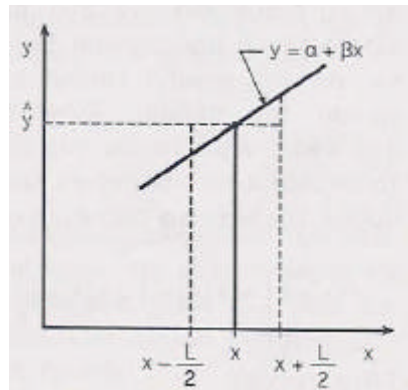
$$\langle y \rangle = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} f(x + \xi) d\xi$$

Αν το πεδίο $y = f(x)$ μεταβάλλεται μάλλον γραμμικά στη θεωρούμενη περιοχή γύρω από το σημείο x , τότε μπορεί να προσεγγισθεί από μία γραμμική συνάρτηση κάνοντας χρήση ενός αναπτύγματος σε σειρά Taylor και κρατώντας ένα μόνον όρο

$$f(x + \xi) \approx f(x) + f'(x)\xi$$

Στην περίπτωση αυτή ισχύει ακριβώς ο νόμος του τραπεζίου, και η τιμή \hat{y} της συνάρτησης στο μέσο του δειγματοληπτικού διαστήματος ισούται με τη μέση τιμή $\langle y \rangle$ της συνάρτησης στο μήκος αυτό

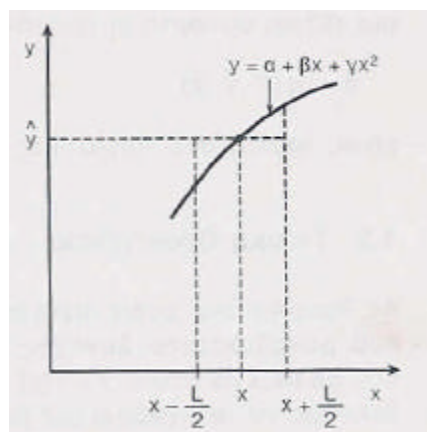
$$\boxed{\hat{y} \approx \langle y \rangle} \quad (3)$$



Στην περίπτωση αυτή λέμε πως το πεδίο $y = f(x)$ μεταβάλλεται **αργά**, αφού η **τοπική τιμή** $\hat{y} = f(x)$ και η **μη-τοπική τιμή** $\langle y \rangle$ ταυτίζονται. Αν σε μία θεωρία Συνεχούς Μέσου η τοπική τιμή ενός πεδίου ταυτίζεται με τη μέση τιμή, τότε λέμε πως έχουμε να κάνουμε με **απλή θεωρία** και το αντίστοιχο συνεχές καλείται **τοπικά ομογενές**.

Αν τώρα στο θεωρούμενο διάστημα δειγματοληψίας το πεδίο δεν περιγράφεται ικανοποιητικά από μια γραμμική συνάρτηση, τότε θα δεχτούμε πως έχει έντονη **καμπυλότητα**. Στην περίπτωση αυτή ο παραπάνω τύπος (1) πρέπει να διορθωθεί ανάλογα, αφού μια γραμμική προσέγγιση δεν αρκεί για την ακριβή τοπική περιγραφή του πεδίου. Αντίστοιχα στο ανάπτυγμα Taylor γύρω από το σημείο x θα πρέπει να κρατήσουμε τουλάχιστο δύο όρους,

$$f(x + \xi) \approx f(x) + f'(x)\xi + \frac{1}{2}f''(x)\xi^2$$



Τότε έχουμε

$$\langle y \rangle = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} \left\{ f(x) + f'(x)h + \frac{1}{2} f''(x)h^2 + \dots \right\} dh$$

$$\approx \frac{1}{L} \left[f(x)h + f'(x)\frac{h^2}{2} + f''(x)\frac{h^3}{6} \right]_{-L/2}^{L/2}$$

ή

$$\hat{y} = \langle y \rangle = -\frac{1}{24} L^2 \left(\frac{d^2 f}{dx^2} \right)_x + O(L^4) \quad (4)$$

Σημειώνουμε πως οι αντίστοιχες θεωρίες Συνεχούς Μέσου που βασίζονται στην παραπάνω σχέση (4) καλούνται θεωρίες **ανώτερης βαθμίδας**.

Παραδείγματα

Τυπικό παράδειγμα ενός τοπικά ομογενούς μονοδιάστατου Συνεχούς Μέσου είναι ένας ραβδωτός φορέας σε εφελκυσμό ή θλίψη, όπου θεωρούμε πως η μετατόπιση $u = u(x)$ μίας ορθής διατομής περιγράφεται με καλή προσέγγιση από μια γραμμική συνάρτηση της μορφής

$$u \approx u_0 + \varepsilon x$$

Στην περίπτωση αυτή ονομάσαμε τη παραμόρφωση **ομογενή** και την περιγράψαμε ικανοποιητικά από τη βαθμίδα της μετατόπισης

$$\varepsilon = \nabla u = \left. \frac{du}{dx} \right|_x$$

που ονομάσαμε **τροπή**⁵. Στο πείραμα εφελκυσμού της ομογενούς ράβδου αρκεί λοιπόν να μετρήσουμε τις μετατοπίσεις σε δύο μόνο σημεία της ράβδου, να τις παρεμβάλουμε γραμμικά και έτσι να υπολογίσουμε την ανηγμένη μήκυνση ε , που εν προκειμένω ταυτίζεται με τη μέση και την τοπική τροπή,

$$\varepsilon = \hat{\varepsilon} = \langle \varepsilon \rangle \approx \frac{u(x + L/2) - u(x - L/2)}{L}$$

Η αντίστοιχη Τεχνική Θεωρία εφελκυσμού ή θλίψης γραμμικών φορέων κατατάσσεται ως μία **απλή** θεωρία μονοδιάστατου Συνεχούς Μέσου, που συνδέει μέσω μίας καταστατικής σχέσης την αξονική δύναμη της ράβδου N με την ανηγμένη μήκυνση ε :

⁵ Αγγλ. *strain*

$$N = N(\varepsilon)$$

δηλαδή με την πρώτη βαθμίδα της παραμόρφωσης

$$N = N(\nabla u)$$

οπότε θα θεωρηθεί ως μια θεωρία 1^{ης} βαθμίδας.

Αντίθετα, στην Τεχνική Θεωρία Κάμψης γραμμωτών φορέων η γραμμική προσέγγιση της (κατακόρυφης) μετατόπισης $w = w(x)$ του άξονα της δοκού (δηλ. του βέλους κάμψης) δεν αρκεί για την ικανοποιητική περιγραφή του φαινομένου της κάμψης. Έτσι στην περίπτωση καθαρής κάμψης δεχόμαστε ότι

$$w \approx w_0 - \psi x - \frac{1}{2} \kappa x^2$$

Αρα η παραμόρφωση δεν μπορεί να θεωρηθεί τοπικά ομογενής. Όπως είδαμε και πιο πάνω για την εκτίμηση της καμπυλότητας κ απαιτούνται τουλάχιστο τρεις μετρήσεις του βέλους κάμψης (π.χ. στις θέσεις x και $x \pm \Delta x$) και παραβολική τουλάχιστο παρεμβολή μεταξύ των δεδομένων. Αντιστοίχως η Τεχνική Θεωρία Κάμψης περιγράφεται από μια καταστατική σχέση, η οποία συνδέει γραμμικά τη ροπή κάμψης M με την καμπυλότητα κ της γραμμής κάμψης,

$$M = (EI)\kappa$$

όπου (EI) είναι η ακαμψία της δοκού. Γενικώς θα δεχθούμε μια καταστατική σχέση της μορφής

$$M = M(\nabla^2 w)$$

Αυτό σημαίνει ότι η Τεχνική Θεωρία Κάμψης είναι μέσα στα πλαίσια της Μηχανικής του Συνεχούς Μέσου μία θεωρία 2^{ης} βαθμίδας.

Άλλες γνωστές θεωρίες 2ης βαθμίδας στη Μηχανική είναι: α) η Τεχνική θεωρία Κάμψης κατά Timoshenko⁶, β) η θεωρία Τριχοειδών Κυματισμών (Κεφ. 5.5) και γ) η θεωρία Νευτώνειων Ρευστών (Κεφ. 6).

1.3 Πυκνότητα

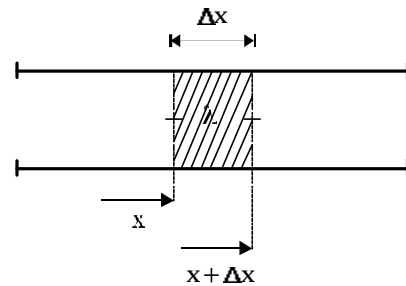
Η πυκνότητα θεωρείται ως μία από τις βασικές ποσότητες που υπεισέρχονται στις μαθηματικές περιγραφές μηχανικών προσομοιωμάτων (μοντέλων) στη Μηχανική του Συνεχούς Μέσου. Στα επόμενα δύο κεφάλαια θα αναλύσουμε

⁶ Πρβλ. Ι. Βαρδουλάκη, *Τεχνική Μηχανική II*, Κεφ. 5.7.4, Εκδ. Συμμετρία, 1999

δύο ακραία παραδείγματα. Το πρώτο αφορά στη περίπτωση όπου η πυκνότητα έχει στοχαστικό (μη ντετερμινιστικό) χαρακτήρα, ενώ το δεύτερο παράδειγμα αφορά στη περίπτωση όπου η πυκνότητα ενός μέσου έχει δυναμικό (μη στατικό) χαρακτήρα.

1.3.1 Μέση Πυκνότητα Οχημάτων σε Ελαφρά Κυκλοφορία

Όπως φαίνεται στο σχήμα θεωρούμε έναν αυτοκινητόδρομο μιας λωρίδας όπου η θέση των οχημάτων δίδεται από τη συντεταγμένη x . Εστω p η πιθανότητα του να βρίσκεται ακριβώς ένα όχημα σε ένα μικρό διάστημα $[x, x + \Delta x]$ του αυτοκινητόδρομου. Κάνουμε την παραδοχή ότι στην περίπτωση του ελαφρού κυκλοφοριακού φόρτου η πιθανότητα αυτή είναι ανάλογη του μήκους Δx :



$$p = \lambda \Delta x \quad (5)$$

Επίσης δεχόμαστε ότι η πιθανότητα να βρίσκονται δύο ή περισσότερα οχήματα στο διάστημα Δx είναι αμελητέα.

Εστω τώρα $p_n(L)$ η πιθανότητα να βρίσκονται n οχήματα σε μήκος δρόμου L . Τότε η πιθανότητα $p_n(L + \Delta x)$ να βρίσκονται n οχήματα σε μήκος δρόμου $L + \Delta x$ υπολογίζεται ως άθροισμα γινομένων πιθανοτήτων: α) της πιθανότητας $p_n(L)$ να βρίσκονται n οχήματα σε μήκος L και της πιθανότητας $(1-p)$ για κανένα όχημα σε μήκος Δx , και β) της πιθανότητας $p_{n-1}(L)$ να βρίσκονται $(n-1)$ οχήματα σε μήκος L και της πιθανότητας p για ένα όχημα σε μήκος Δx . Δηλαδή,

$$p_n(L + \Delta x) = p_n(L)(1-p) + p_{n-1}(L)p$$

Με την προσέγγιση,

$$p_n(L + \Delta x) \approx p_n(L) + \frac{dp_n}{dL} \Delta x$$

έχουμε τελικά ότι

$$p_n + \frac{dp_n}{dL} \Delta x = p_n(1 - \lambda \Delta x) + p_{n-1} \lambda \Delta x \Rightarrow$$

$$\frac{dp_n}{dL} + \lambda p_n = \lambda p_{n-1}$$

Εύκολα μπορούμε τώρα να διαπιστώσουμε ότι η παραπάνω εξίσωση ικανοποιείται από τη λεγόμενη **κατανομή Poisson**:

$$p_n(L) = \frac{1}{n!} (\lambda L)^n e^{-\lambda L}$$

Τώρα γνωρίζουμε από τη θεωρία Πιθανοτήτων ότι ο πιο πιθανός αριθμός οχημάτων που περιμένουμε να υπάρχουν σε τμήμα οδού μήκους L είναι η μέση τιμή της κατανομής

$$\langle n \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} n p_n(L) = \sum_{n=0}^{\infty} n \frac{1}{n!} (\lambda L)^n e^{-\lambda L} = (\lambda L) e^{-\lambda L} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda L)^{n-1}}{(n-1)!} = \lambda L$$

Αρα η **μέση πυκνότητα** των οχημάτων είναι στην προκειμένη περίπτωση ανεξάρτητη του μήκους της οδού L , διότι

$$\bar{\rho} = \frac{\langle n \rangle}{L} = \frac{\lambda L}{L} = \lambda$$

Συμφώνως με την αρχική υπόθεση, Εξ. (3), συμπεραίνουμε ότι, η **μέση πυκνότητα** $\bar{\rho} = \lambda$ **αποδίδει την πιθανότητα να βρίσκεται ένα όχημα σε μήκος δρόμου Δx ,**

$$p = \bar{\rho} \Delta x = \langle n \rangle \frac{\Delta x}{L}$$

Προφανώς για να έχει νόημα ο παραπάνω τύπος ($0 < p < 1$) η μέση πυκνότητα των οχημάτων πρέπει να είναι σχετικά μικρή, δηλαδή η **κυκλοφορία ελαφρά**.

Από τους παραπάνω τύπους υπολογισμού προκύπτει τελικά ότι η πιθανότητα $p_n(L)$ να βρίσκονται n οχήματα σε μήκος οδού L δίδεται από τον τύπο

$$p_n(L) = \frac{1}{n!} (\bar{\rho} L)^n \exp(-\bar{\rho} L) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \left(\frac{\bar{\rho} L}{n} \right)^n \exp(n - \bar{\rho} L)$$

όπου κάναμε χρήση του τύπου του Stirling,

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}$$

Για παράδειγμα ας δεχθούμε ότι η μέση πυκνότητα κυκλοφοριακής ροής είναι,

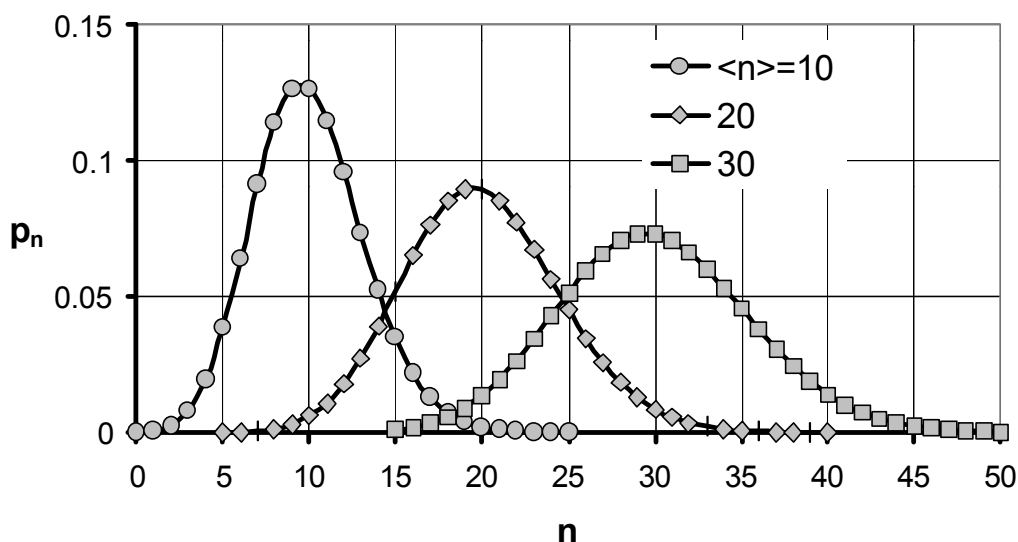
$$\bar{\rho} = \frac{20 \text{ οχ}}{1000 \text{ m}}$$

και ότι το δειγματοληπτικό μήκος είναι,

$$L = 1000\text{m} \Rightarrow \langle n \rangle = \bar{\rho}L = 20.0\chi$$

Από τα διαγράμματα φαίνεται ότι η κατανομή Poisson είναι ελαφρώς ασυμμετρική. Π.χ. η πιθανότητα για να βρεθούν 15 ή 25 οχήματα σε μήκος οδού 1000 m είναι αντίστοιχα

$$p_{15}^{20}(1000\text{m}) \approx \frac{5.1}{100}, \quad p_{25}^{20}(1000\text{m}) \approx \frac{4.5}{100}$$



1.3.2 Χώρο-χρονική Μεταβολή Πυκνότητας Μείγματος Κόκκων-Ύδατος λόγω Απόθεσης

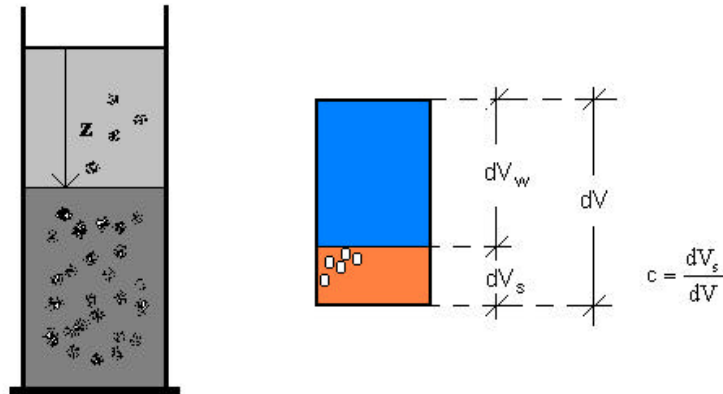
Θεωρούμε μια στήλη ύδατος⁷ στην οποία έχει αναδευθεί καλά μια ποσότητα από κοκκώδες υλικό, π.χ. μια μικρή ποσότητα ιλύος. Τη στήλη αυτή ύδατος με το κοκκώδες εν αιωρήσει αφήνουμε τη στιγμή $t = 0$ να ηρεμήσει οπότε και παρατηρείται καθίζηση του αιωρήματος λόγω βαρύτητας.

Κατ' αρχήν τονίζουμε ότι ένα μείγμα που αποτελείται από ύδωρ και κόκκους άμμου, μπορεί μέσα στα πλαίσια της Μηχανικής του Συνεχούς Μέσου να θεωρηθεί ως ένα Συνεχές που αποτελείται από δύο φάσεις. Οπως φαίνεται από το σχετικό διάγραμμα ποσοστών όγκου⁸ κάθε μια φάση κατέχει ένα

⁷ Χρησιμοποιούμε τον όρο «ύδωρ» για να διαφοροποιήσουμε το συγκεκριμένο ρευστό από το πόσιμο νερό (νερό = νεαρόν ύδωρ (αρχ.), πρώιμο νερό, Ν.Π. Ανδριώτη, *Ετυμολογικό Λεξικό της Κοινής Νεοελληνικής*, 1992).

⁸ Αγγλ. *volume fraction*

συγκεκριμένο ποσοστό του συνολικού αντιπροσωπευτικού όγκου dV του μείγματος σε κάθε σημείο του χώρου και για κάθε χρονική στιγμή:



- 1^η φάση, το ύδωρ: dV_w (w water)
- 2^η φάση, οι κόκκοι του στερεού: dV_s (s solid)

Υπενθυμίζουμε ότι η *συγκέντρωση* των στερεών στο μείγμα ορίζεται ως εξής

$$c = \frac{dV_s}{dV}$$

Η πυκνότητα του μείγματος ορίζεται ως

$$\bar{\rho} = \frac{dm_w + dm_s}{dV}$$

όπου dm_w και dm_s είναι μάζες των δύο φάσεων (δηλ. του ρευστού και των στερεών) στο δειγματοληπτικό όγκο dV . Επειδή οι πυκνότητες των επιμέρους φάσεων δίδονται από τις σχέσεις,

$$\rho_s = \frac{dm_s}{dV_s}, \quad \rho_w = \frac{dm_w}{dV_w}$$

βρίσκουμε τελικά τη γνωστή από τη θεωρία μειγμάτων σχέση για την **πυκνότητα του μείγματος**,

$$\bar{\rho} = (1 - c)\rho_w + c\rho_s \quad (6)$$

Η παραπάνω σχέση σημαίνει ότι, μέσα στα πλαίσια της Μηχανικής του Συνεχούς Μέσου, το μείγμα ύδατος-κόκκων προσομοιάζεται με Συνεχές Μέσο όπου σε κάθε σημείο του χώρου συνυπάρχουν τόσο ύδωρ σε ποσοστό $c_w = 1 - c$ όσο και στερεοί κόκκοι ιλύος σε ποσοστό $c_s = c$.

Οι πυκνότητες των επί μέρους φάσεων ρ_s και ρ_w είναι σταθερές, ενώ η συγκέντρωση των κόκκων σε κάθε βάθος μεταβάλλεται,

$$c = c(z, t)$$

Μαζί της μεταβάλλεται σύμφωνα με τον παραπάνω τύπο (6) και η πυκνότητα του μείγματος. Για τον υπολογισμό της συνάρτησης

$$\bar{\rho} = \bar{\rho}(z, t)$$

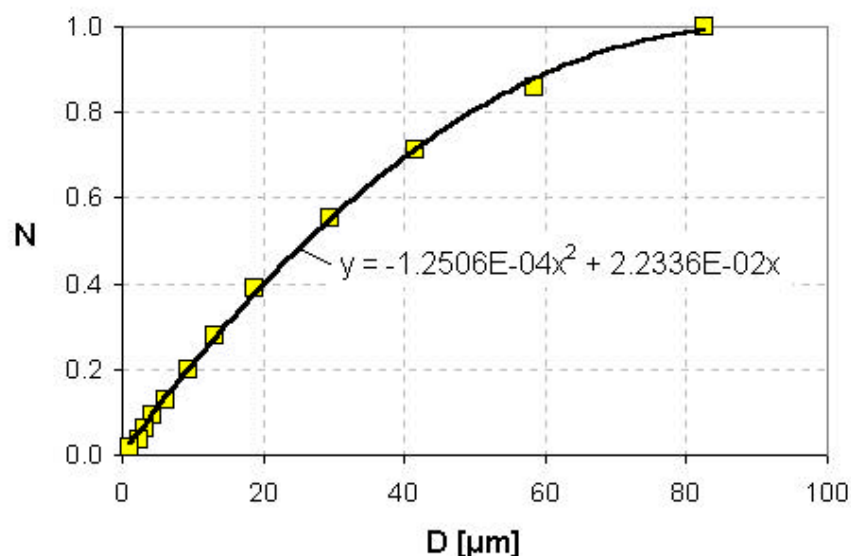
θεωρούμε ένα συγκεκριμένο κοκκώδες υλικό, π.χ. μίαν ιλύ, με δεδομένη κοκκομετρία, δηλαδή με γνωστή την αθροιστική κατανομή της χαρακτηριστικής διάστασης (διαμέτρου) D των διαφόρων κόκκων που την συνθέτουν. Η κατανομή αυτή περιγράφεται από τη **κοκκομετρική καμπύλη** του υλικού, που είναι μια συνάρτηση αθροιστικής κατανομής της μορφής

$$N = N(x < D)$$

όπου N είναι το ποσοστό σε βάρος του κοκκώδους υλικού το οποίο έχει κόκκους διαμέτρου μικρότερης της τιμής D . Για παράδειγμα παραθέτουμε την κοκκομετρική καμπύλη μιας συγκεκριμένης ιλύος⁹. Η κοκκομετρική καμπύλη αυτή περιγράφεται από την εμπειρική σχέση,

$$N \approx a \left(\frac{D}{D_{\text{ref}}} + \left(\frac{D}{D_{\text{ref}}} \right)^2 \right)$$

όπου $a = 0.2223$, $D_{\text{ref}} = 13.33 \mu\text{m}$



⁹ D.W. Taylor, *Fundamentals of Soil Mechanics*, Wiley, p.46, 1948

Οι κόκκοι της ιλύος καθιζάνουν με μια οριακή ταχύτητα v_{lim} , που εξαρτάται από το τετράγωνο της 'διαμέτρου' τους D σύμφωνα με τον νόμο του Stokes,

$$v_{lim} = \frac{\rho_s / \rho_w - 1}{18\nu} g D^2 = \lambda D^2$$

- ρ_s : πυκνότητα υλικού κόκκων (π.χ. $\rho_s = 2.7 \text{ gr / cm}^3$)
- ρ_w : πυκνότητα ύδατος ($\rho_w = 1.0 \text{ gr / cm}^3$)
- ν : κινηματικό ιξώδες ύδατος ($\nu = 1. \text{mm}^2 / \text{sec}$)
- g : επιτάχυνση βαρύτητας ($g = 9.81 \text{ m/sec}^2$)

Στο συγκεκριμένο παράδειγμα έχουμε,

$$\lambda = \frac{(2.7 - 1) \cdot 9.81 \cdot 10^3}{18} \frac{1}{10^3 \mu\text{m} \cdot \text{sec}} = 0.9265 \frac{1}{\mu\text{m} \cdot \text{sec}}$$

Παρατηρούμε τώρα ότι την χρονική στιγμή t μετά την έναρξη της καθίζησης των κόκκων και σε στήλη βάθους z από την ελεύθερη επιφάνεια δεν θα υπάρχουν κόκκοι με διάσταση μεγαλύτερη από μια χαρακτηριστική διάσταση D_t , η οποία αντιστοιχεί στον μικρότερο κόκκο που έχει διανύσει την απόσταση z στον συγκεκριμένο χρόνο,

$$z = v_{lim} t = \lambda D_t^2 t \quad \Rightarrow \quad D_t = \sqrt{\frac{1}{\lambda} \frac{z}{t}}$$

Από την άλλη μεριά ο παραπάνω τύπος για την χαρακτηριστική διάσταση D_t δεν θα ισχύει για πολύ μικρούς χρόνους και για πολύ μικρές αποστάσεις από την ελεύθερη επιφάνεια

$$z_{min} > D_{max}^2 \lambda \quad , \quad t_{min} > \lambda D_{max}^2$$

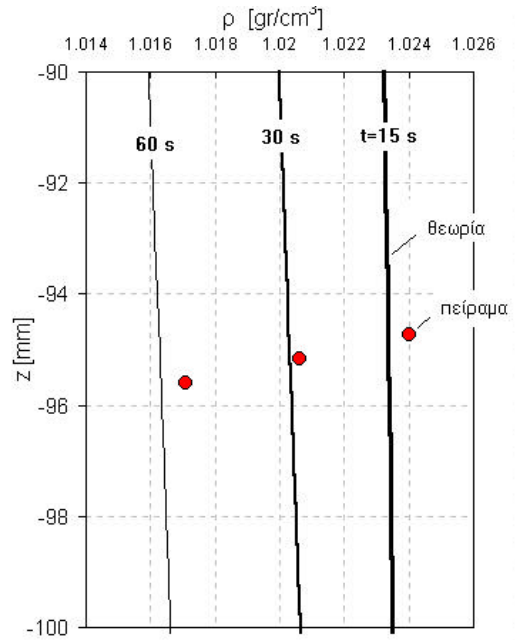
Αρα σε βάθος $z > z_{min}$ από την ελεύθερη επιφάνεια και την χρονική στιγμή $t > t_{min}$ η συγκέντρωση των στερεών θα είναι,

$$c(z, t) = N(x < D_t) c_0$$

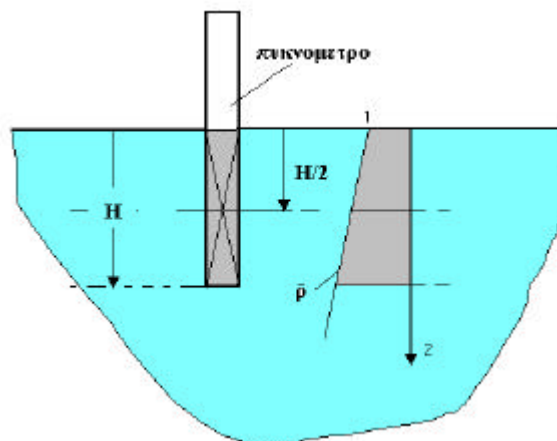
όπου c_0 είναι η αρχική συγκέντρωση των στερεών στο αιώρημα.

Οι παραπάνω εξισώσεις δίδουν τελικά την εξής συνάρτηση πυκνότητας για το μείγμα,

$$\bar{\rho} = \rho_w \left(1 + \left(\frac{\rho_s}{\rho_w} - 1 \right) c_0 N \right), \quad N \approx a \left(\frac{D_t}{D_{ref}} + \left(\frac{D_t}{D_{ref}} \right)^2 \right)$$



Στο παραπάνω παράδειγμα η αρχική, σταθερή καθ' όλο το ύψος της στήλης συγκέντρωση ήταν $c_0 = 0.01141$. Παρατηρούμε ότι σε σχετικά σύντομο χρονικό διάστημα η πυκνότητα του μείγματος κατανέμεται σχεδόν γραμμικά με το βάθος. Αυτή η παρατήρηση αποδίδεται στον Casagrande (1931)⁹, ο οποίος και την χρησιμοποίησε ως αρχική υπόθεση για τον (αντίστροφο) πειραματικό προσδιορισμό της κοκκομετρίας λεπτοκόκκων, κυρίως αργιλικών εδαφών, βάσει της **μεθόδου το πυκνόμετρου**. Πράγματι, η μέθοδος του πυκνόμετρου βασίζεται πάνω στην αρχή ότι η μέση τιμή της πυκνότητα για δειγματοληπτικό μήκος H ισούται με την πυκνότητα σε βάθος $H/2$. Η παραπάνω σχέση είναι αληθής όταν η κατανομή της πυκνότητας με το βάθος είναι κατά προσέγγιση γραμμική.



Άσκηση

Θεωρούμε την κοκκομετρική καμπύλη μιας συγκεκριμένης άμμου, που με καλή προσέγγιση περιγράφεται από τη λεγόμενη **λογιστική καμπύλη**,

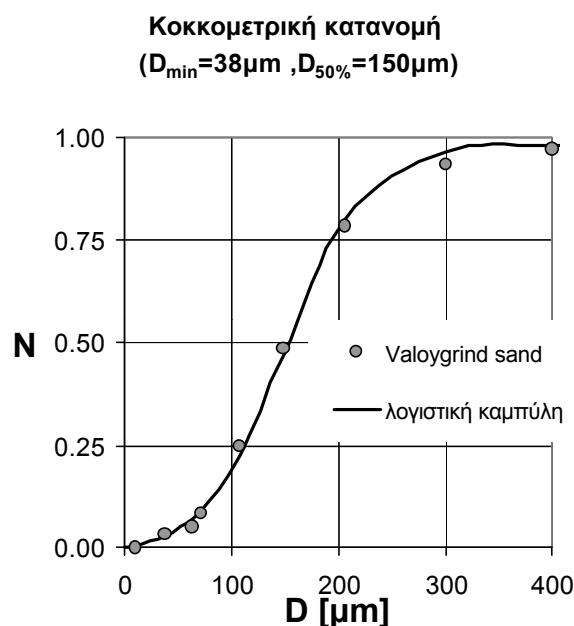
$$N \approx \frac{1}{1 + \exp((D_{50} - D)/D_{\min})} - N_0$$

Στην παραπάνω σχέση D_{50} είναι η διάσταση κόκκου, που αντιστοιχεί στο 50% της κατανομής και D_{\min} η ελάχιστη διάσταση κόκκου. Για την κατανομή του παραδείγματος έχουμε $D_{50} = 150 \mu\text{m}$, $D_{\min} = 38 \mu\text{m}$ και $N_0 = 0.0179$.

Να υπολογισθεί με τη βοήθεια λογισμικού χάρτου (Excel) η κατανομή της πυκνότητας στήλης του μείγματος για χρόνους 1sec και 5 sec.

Δίδονται επίσης:

- ρ_s : πυκνότητα υλικού κόκκων ($\rho_s = 2.65 \text{ gr/cm}^3$)
- c_0 : αρχική συγκέντρωση μίγματος ($c_0 = 0.1$).

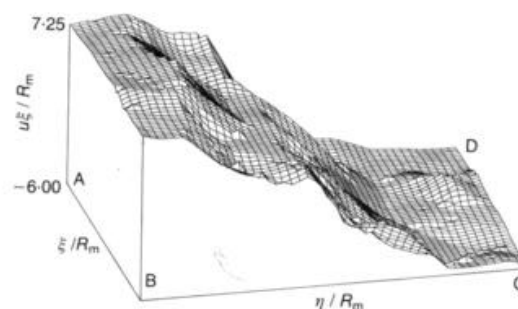
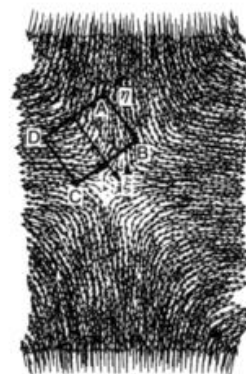
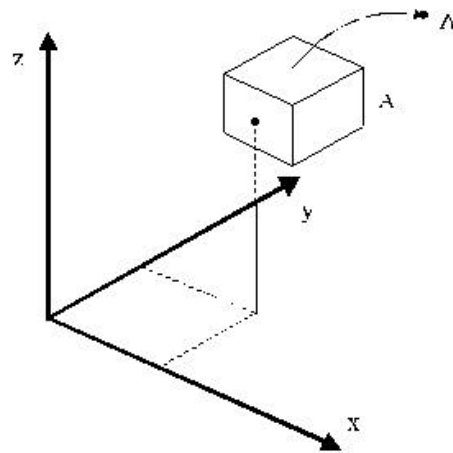


Παρατήρηση

Αξίζει να σημειωθεί ότι στην εργασία του G.J. Kynch (*A theory of sedimentation*. Trans. Faraday Soc., 48, 166-176, 1952) δατυπώνεται ίσως για πρώτη φορά μια κινηματική θεωρία ιζηματογένεσης (πρβλ. Κεφ. 3.3).

1.4 Περιγραφή της Κίνησης

Για την περιγραφή της κίνησης ενός Συνεχούς Μέσου στο χώρο κάνουμε χρήση της έννοιας του **υλικού σημείου** κατά Euler, που όπως είδαμε εισαγωγικά, αναφέρεται σε ένα μικρό αντιπροσωπευτικό στοιχειώδη όγκο (REV) του υλικού, π.χ. μίας σταγόνας νερού, λίγων κόκκων άμμου ή μίας μικρής ομάδας οχημάτων. Στο υλικό σημείο αντιστοιχούμε ένα σημείο στο χώρο, π.χ. το κέντρο βάρους του REV. Η κίνηση του υλικού σημείου περιγράφεται πρωτογενώς από το πεδίο της ταχύτητας που αντιστοιχεί στο μέσο όρο των ταχυτήτων των σωματιδίων που εσωκλείονται στο REV.



Δαβί δά-δδδδύι ούι έυέέυι δάάήέέι ςόέέυ δήι όι ι ι βύι á έι έέπαι δό δέέέι γ (Bardet, J. P., and J. Proubet, (1991) A numerical investigation of the structure of persistent shear bands in granular media, Géotechnique, 41, 599-613.)

Αυτή η θεωρητική βάση για τη μελέτη της κίνησης σε παραμορφώσιμα σώματα αποδίδεται στον Euler, ο οποίος μελέτησε μέσα στα πλαίσια της Υδρομηχανικής τη κίνηση των υλικών σημείων ενός ρευστού ('σωματίδια') κατά μήκος των λεγόμενων *γραμμών ροής*. Όπως θα δούμε πιο κάτω οι γραμμές ροής των σωματιδίων αποτελούν μία διπλή απειρία καμπυλών στο χώρο, με την ιδιότητα σε κάθε σημείο του χώρου το διάνυσμα της ταχύτητας του σωματιδίου να εφάπτεται στη γραμμή ροής που περνάει από το εν λόγω σημείο το χώρου τη δεδομένη στιγμή.

Αντίθετα ο Lagrange¹⁰, βασιζόμενος στο έργο του Leonard Euler, παρατήρησε πως, επειδή έχουμε να κάνουμε με τριπλή απειρία σωματιδίων, είναι σκόπιμο να προσπαθήσουμε να περιγράψουμε τη κίνηση καθενός από τα σωματίδια ξεχωριστά, να τα φανταστούμε δηλαδή να κινούνται πάνω σε μία τριπλή απειρία *σωματιδιακών γραμμών*. Στο Κεφάλαιο αυτό για λόγους διδακτικούς θα ξεκινήσουμε με τη *σωματιδιακή περιγραφή* της κίνησης κατά Lagrange και στη συνέχεια θα επιστρέψουμε στη *χωρική περιγραφή* της κίνησης κατά Euler.

Lagrange

LQ



1.4.1 Η Σωματιδιακή Περιγραφή κατά Lagrange

Σε κάποια χρονική στιγμή, έστω $t=0$, τα υλικά σημεία ενός σώματος καταλαμβάνουν συγκεκριμένες θέσεις στο χώρο, τις οποίες μπορούμε να χαρακτηρίσουμε με τις συντεταγμένες τους ως προς ένα σταθερό καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων. Για ένα μονοδιάστατο σώμα το υλικό σημείο A την χρονική στιγμή $t=0$ έχει τη συντεταγμένη $x=\xi$. Σε μία άλλη χρονική στιγμή, $t \geq 0$, το εν λόγω υλικό σημείο A καταλαμβάνει μίαν άλλη θέση, με

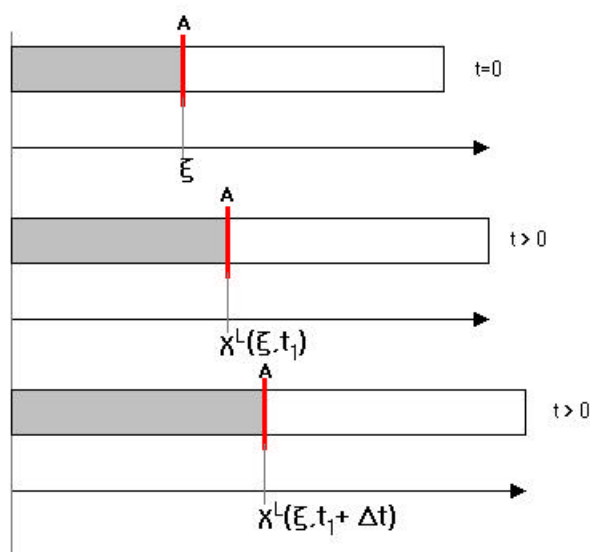
¹⁰ Lui de Lagrange (1736-1813)

συντεταγμένη $x = x^L$. Ο άνω δείκτης L συμβολίζει τη συγκεκριμένη περιγραφή της κίνησης του σώματος κατά την οποία (κίνηση) παρακολουθούμε την μετατόπιση των υλικών σημείων. Η περιγραφή αυτή λέγεται περιγραφή κατά **Lagrange**. Ετσι δεχόμαστε ότι υπάρχει μία συνάρτηση

$$x^L = X^L(\xi, t)$$

που περιγράφει την κίνηση του σώματος. Προφανώς ισχύει η σχέση

$$X^L(\xi, 0) = \xi$$



Αντιστοίχως η μετατόπιση του υλικού σημείου μετράται σε σχέση με την αρχική του θέση

$$u^L(\xi, t) = x - \xi = X^L(\xi, t) - \xi$$

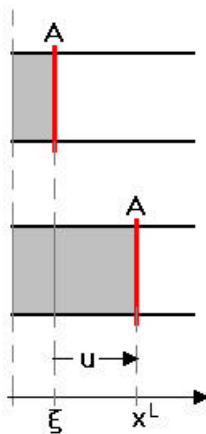
Εστω τώρα

$$x_{(1)} = X^L(\xi, t_1) \quad , \quad x_{(2)} = X^L(\xi, t_2)$$

δύο διαδοχικές θέσεις του αυτού υλικού σημείου A σε δύο διαδοχικές χρονικές στιγμές t_1 και $t_2 = t_1 + \Delta t$, οπότε

$$x_{(2)} = X^L(\xi, t_1 + \Delta t) \approx X^L(\xi, t_1) + \left. \frac{\partial X^L}{\partial t} \right|_{\xi} \Delta t$$

$$\Rightarrow \quad \Delta u^L = u^L(\xi, t_2) - u^L(\xi, t_1) \approx \left. \frac{\partial X^L}{\partial t} \right|_{\xi} \Delta t$$



Με βάση την παραπάνω προσέγγιση της σχετικής μετατόπισης του υλικού σημείου A στο χρονικό διάστημα από $t=t_1$ ως $t=t_2=t_1+\Delta t$, μπορούμε να ορίσουμε την *ταχύτητα* του υλικού σημείου αυτού:

$$v^L(\xi, t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta u^L}{\Delta t} \right) = \left. \frac{\partial X^L}{\partial t} \right|_{\xi}$$

Ομοίως ορίζεται και η *επιτάχυνση* του υλικού σημείου

$$a^L(\xi, t) = \frac{\partial v^L}{\partial t} = \frac{\partial^2 X^L}{\partial t^2}$$

- **Τροπές**

Όπως αναφέραμε πιο πάνω η *μετατόπιση* ενός υλικού σημείου δίδεται από τη σχέση:

$$u^L(\xi, t) = x - \xi = X^L(\xi, t) - \xi$$

Θεωρούμε ένα **υλικό στοιχείο**, με αρχικό μήκος

$$d\ell^{(0)} = \sqrt{d\xi d\xi}$$

και τελικό μήκος

$$d\ell = \sqrt{dx dx}$$

όπου

$$dx = X^L(\xi + d\xi, t) - X^L(\xi, t) \approx \frac{\partial X^L}{\partial \xi} d\xi = F d\xi$$

Η ποσότητα

$$F = \frac{\partial X^L}{\partial \xi} = 1 + \frac{\partial u^L}{\partial \xi}$$

καλείται **βαθμίδα παραμόρφωσης**.

Η τροπή C κατά **Cauchy-Green** ορίζεται από τη σχέση

$$d\ell^2 = C d\ell^{(0)2}$$

όπου

$$C = F^2 = \left(1 + \frac{\partial u^L}{\partial \xi} \right)^2$$

Συνήθως αντί της τροπής C γίνεται χρήση της λεγόμενης **τροπής κατά Green**

$$G = \frac{1}{2}(C - 1) \Rightarrow C = 1 + 2G$$

$$G = \frac{\partial u^L}{\partial \xi} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u^L}{\partial \xi} \right)^2$$

οπότε η **ανηγμένη μήκυνση** δίδεται από τη σχέση

$$\begin{aligned} \frac{\Delta d\ell}{d\ell^{(0)}} &= \frac{d\ell - d\ell^{(0)}}{d\ell^{(0)}} = \sqrt{1 + 2G} - 1 \\ &= \sqrt{1 + 2 \frac{\partial u^L}{\partial \xi} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\partial u^L}{\partial \xi} \right)} - 1 \end{aligned}$$

η οποία για $|G| \ll 1$ δίδει

$$\frac{\Delta d\ell}{d\ell^{(0)}} \approx \left(1 + \frac{\partial u^L}{\partial \xi} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\partial u^L}{\partial \xi} \right) + \dots \right) - 1 = G$$

Πράγματι, στην περίπτωση μικρών παραμορφώσεων η μήκυνση μετράται από την ποσότητα

$$G \approx \varepsilon^L = \frac{\partial u^L}{\partial \xi}$$

που ονομάζεται **απειροστική τροπή**¹¹ κατά Lagrange.

Παράδειγμα

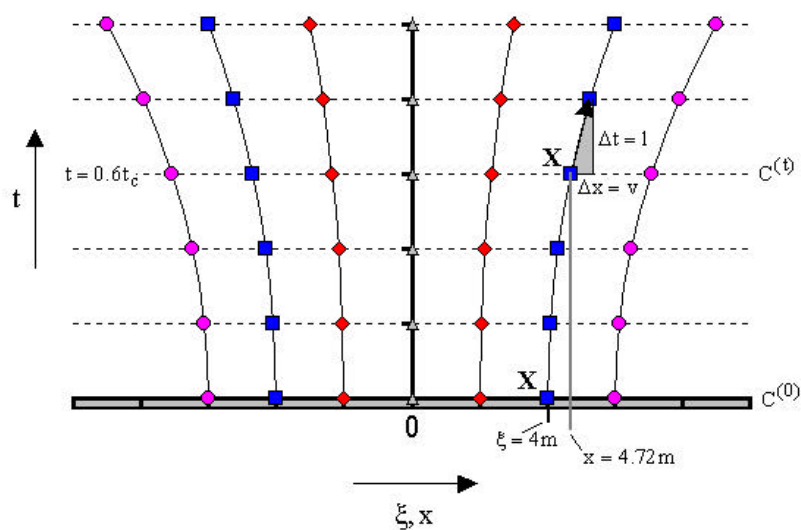
Εστω ότι τα υλικά σημεία ενός Συνεχούς Μέσου κινούνται βάσει ενός συγκεκριμένου ου νόμου, π.χ.

$$x = X^L(\xi, t) = \xi \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{t}{t_c} \right)^2 \right), \quad t_c = \text{σταθ.}$$

Παρατηρούμε ότι για $t=0$, $x=\xi$, οπότε η αρχική θέση των υλικών σημείων είναι και η θέση αναφοράς της παραπάνω περιγραφής. Η κίνηση του μονοδιάστατου συνεχούς παρίσταται καμιά φορά σε ένα χωροχρονικό διάγραμμα $O(x,t)$. Ο χώρος αυτός καλείται **χώρος των γεγονότων**, αφού κάθε ζεύγος τιμών (x,t) στο χώρο αυτό θα ονομασθεί **γεγονός**¹². Η καμπύλη

$$x = X^L(\xi, t)$$

στο χωρόχρονο θα ονομασθεί **γραμμή ζωής**¹³ του υλικού σημείου ξ . Αρα από τον άξονα $t=0$ θα ξεκινήσουν οι γραμμές ζωής των διαφόρων υλικών σημείων που τη χρονική στιγμή $t=0$ κατείχαν τη θέση $x=\xi$ (θέση αναφοράς).



¹¹ Αγγλ. *infinitesimal strain*

¹² Αγγλ. *event*

¹³ Αγγλ. *lifeline*

Στο συγκεκριμένο παράδειγμα παρατηρούμε ότι οι γραμμές ζωής είναι αποκλίνουσες παραβολές, που σημαίνει ότι συν τω χρόνω οι σχετικές αποστάσεις των υλικών σημείων αυξάνονται. Η κίνηση αυτή χαρακτηρίζεται ως μία **διαστολή**.

Με την κίνηση των υλικών σημείων δεδομένη, μπορούμε κατ' αρχήν να υπολογίσουμε κατ' ευθείαν την ταχύτητά τους, ως συνάρτηση της θέσης των υλικών σημείων στην απεικόνιση αναφοράς $C^{(0)}$

$$v^L(\xi, t) = \frac{\partial X^L}{\partial t} = \xi \frac{t}{t_c^2}$$

Στο παράδειγμα του σχήματος η θέση αναφοράς $C^{(0)}$ συμπίπτει με τον άξονα ($t = 0$), όπου ξεχωρίζουμε για παράδειγμα το υλικό σημείο X στη θέση $\xi = 4. \text{m}$. Τη χρονική στιγμή $t = 0.6t_c$ η τρέχουσα απεικόνιση $C^{(t)}$ του μονοδιάστατου συνεχούς είναι πάνω στον άξονα $t = 0.6t_c$ και το θλικό σημείο βρίσκεται στη θέση $x = 4.72 \text{m}$.

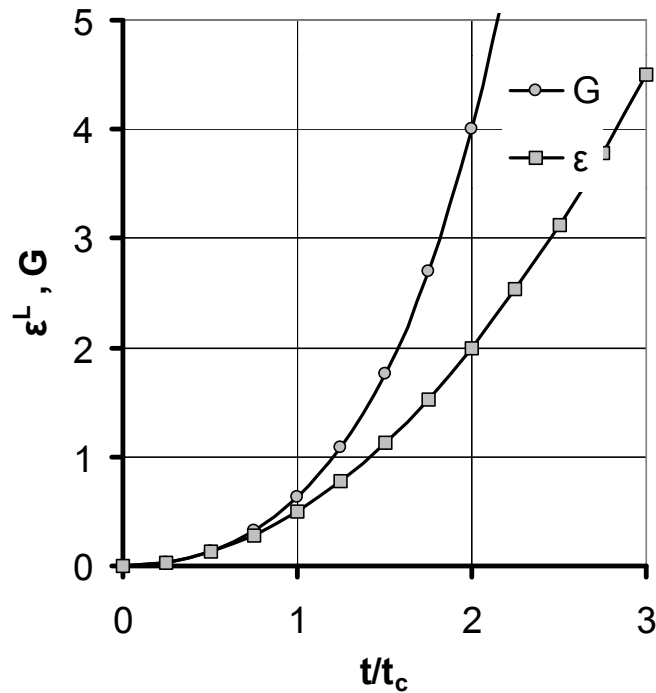
Στο συγκεκριμένο παράδειγμα έχουμε επίσης τις εξής εκφράσεις για τη μετατόπιση

$$u^L = u(\xi, t) = \frac{1}{2} \xi \left(\frac{t}{t_c} \right)^2$$

και για την τροπή κατά Green

$$G = \varepsilon^L + \frac{1}{2} (\varepsilon^L)^2$$

$$\varepsilon^L = \frac{\partial u^L}{\partial \xi} = \frac{1}{2} \left(\frac{t}{t_c} \right)^2$$



Παρατηρούμε ότι στη περιοχή μικρών παραμορφώσεων η πεπερασμένη και η απειροστική τροπή κατά προσέγγιση ταυτίζονται.

1.4.2 Η Χωρική Περιγραφή κατά Euler

Στην περιγραφή της κίνησης κατά Lagrange τα διάφορα φυσικά μεγέθη δίδονται ως συναρτήσεις των συντεταγμένων ξ των υλικών σημείων στη θέση αναφοράς, η οποία πιο πάνω δεχτήκαμε ότι είναι η αρχική θέση του σώματος. Αντίθετα, στην περιγραφή κατά *Euler* τα διάφορα φυσικά μεγέθη δίδονται ως συναρτήσεις της θέσης x που κατέχει το υλικό σημείο την δεδομένη χρονική στιγμή t . Έτσι, δεχόμεθα την ύπαρξη μιας συνάρτησης

$$\xi = X^E(x, t)$$

που δίδει την αρχική θέση του υλικού σημείου, το οποίο τη χρονική στιγμή t κατέχει τη θέση x . Παρατηρούμε ότι

$$x = X^L(\xi, t) = X^L[X^E(x, t), t]$$

$$\xi = X^E(x, t) = X^E[X^L(\xi, t), t]$$

άρα η συνάρτηση $X^E(x, t)$ είναι η αντίστροφη της $X^L(\xi, t)$

$$X^E(\cdot, t) = X^{L-1}(\cdot, t)$$

Π.χ.

$$x = X^L(\xi, t) = \xi + \frac{1}{2}\xi \left(\frac{t}{t_c}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad \xi = X^E(x, t) = \frac{x}{1 + \frac{1}{2}\left(\frac{t}{t_c}\right)^2}$$

$$\Rightarrow X^E(X^L(\xi, t), t) = \frac{\xi + \frac{1}{2}\xi \left(\frac{t}{t_c}\right)^2}{1 + \frac{1}{2}\left(\frac{t}{t_c}\right)^2} = \xi$$

Τώρα γεννάται το ερώτημα, πώς υπολογίζουμε την ταχύτητα όταν η κίνηση περιγράφεται χωρικά;

Εστω

$$v = v^E(x, t)$$

Επειδή η ταχύτητα του υλικού σημείου είναι μονοσήμαντη, έχουμε τις εξής ταυτότητες

$$v = v^L(\xi, t) = v^L(X^E(x, t), t) \equiv v^E(x, t)$$

$$v = v^E(x, t) = v^E(X^L(\xi, t), t) \equiv v^L(\xi, t)$$

Ομοίως και για την επιτάχυνση έχουμε τις ταυτότητες

$$a = a^L(\xi, t) = a^L(X^E(x, t), t) \equiv a^E(x, t)$$

$$a = a^E(x, t) = a^E(X^L(\xi, t), t) \equiv a^L(\xi, t)$$

Π.χ. αν η περιγραφή δίδεται κατά Lagrange, τότε

$$v = \xi \frac{t}{t_c^2} = x \frac{\frac{t}{t_c^2}}{1 + \frac{1}{2}\left(\frac{t}{t_c}\right)^2} = \frac{x t}{t_c^2 + \frac{1}{2}t^2}$$

$$a = \xi \frac{1}{t_c^2} = x \frac{\frac{1}{t_c^2}}{1 + \frac{1}{2} \left(\frac{t}{t_c} \right)^2} = \frac{x}{t_c^2 + \frac{1}{2} t^2}$$

Παρατρούμε τέλος ότι η ταχύτητα συμπίπτει με την αντίστροφη κλίση της γραμμής ζωής που περνάει από το εν λόγω γεγονός.

- **Ρυθμός Παραμόρφωσης**

Τέλος η βαθμίδα της ταχύτητας καλείται **ρυθμός παραμόρφωσης**, και υπολογίζεται ως εξής

$$D = \frac{\partial v^E}{\partial x} = J^{-1} \frac{\partial v^L}{\partial \xi}$$

Όπως θα δούμε στο Κεφ. 6.2, στο παράδειγμα της ιξωδομετρικής ροής ενός πραγματικού ρευστού η διατμητική τάση $\sigma_{zx} = \tau$ συνδέεται με το ρυθμό διατμητικής παραμόρφωσης,

$$\gamma = D_{13} = \frac{\partial v_x}{\partial z}$$

μέσω ενός καταστατικού νόμου της μορφής

$$\tau = f(\gamma)$$

1.4.3 Η Υλική Χρονική Παράγωγος

Θεωρούμε ένα υλικό σώμα του οποίου το τυχόν υλικό σημείο $A(\xi)$ την χρονική στιγμή t καταλαμβάνει τη θέση με τη συντεταγμένη

$$x = X^L(\xi, t)$$

Επίσης, δεχόμεθα ότι το σώμα αυτό θερμαίνεται στο ένα του άκρο και ότι την δεδομένη χρονική στιγμή t η κατανομή της θερμοκρασίας κατά μήκος του σώματος είναι τέτοια ώστε στη θέση x παρατηρείται η θερμοκρασία

$$\theta = \Theta^E(x, t)$$

Θέλουμε τώρα να υπολογίσουμε την αλλαγή της θερμοκρασίας την χρονική στιγμή $t' = t + \Delta t$, όπως αυτή παρατηρείται από **έναν παρατηρητή που κινείται μαζί με το υλικό σημείο $A(\xi)$** .

Κατ' αρχήν σημειώνουμε ότι το υλικό σημείο μετατίθεται από την θέση x στην θέση

$$x' = X^L(\xi, t') = X^L(\xi, t + \Delta t) = X^L(\xi, t) + \left. \frac{\partial X^L}{\partial t} \right|_{\xi} \Delta t$$

Με την παρατήρηση ότι

$$\left. \frac{\partial X^L}{\partial t} \right|_{\xi} = v^L(\xi, t) = v^E(x, t)$$

έχουμε τελικά

$$x' = x + \Delta x \quad ; \quad \Delta x = \Delta u = v^E(x, t) \Delta t$$

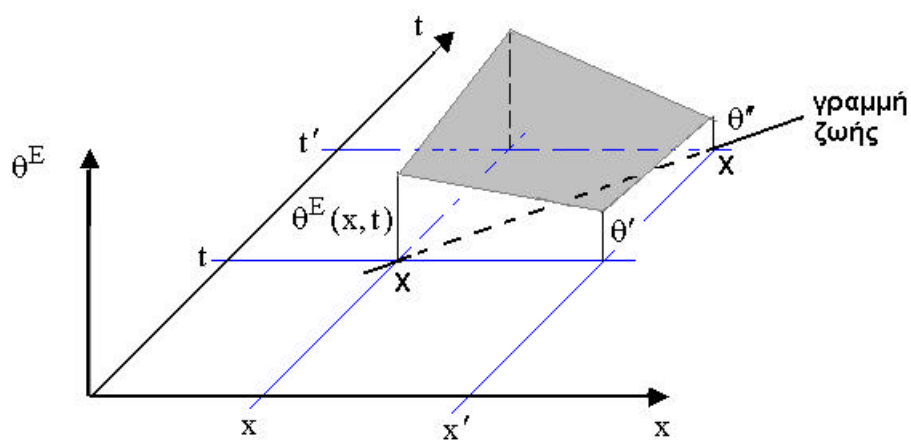
Η θερμοκρασία αντιστοίχως μεταβάλλεται ως εξής: Στη θέση x τη χρονική στιγμή $t' = t + \Delta t$ η θερμοκρασία παίρνει την τιμή

$$\theta' = \theta + \Delta \theta$$

όπου

$$\Delta \theta = \left. \frac{\partial \theta^E}{\partial t} \right|_x \Delta t$$

Η ποσότητα $\Delta \theta$ δίδει την αλλαγή της θερμοκρασίας σε ένα συγκεκριμένο σημείο του χώρου x και συνιστά ως εκ τούτου την **τοπική μεταβολή** της ποσότητας θ .



Στη θέση τώρα $x' = x + \Delta u$ τη χρονική στιγμή $t' = t + \Delta t$ η θερμοκρασία παίρνει την τιμή

$$\theta'' = \theta' + \delta\theta$$

όπου

$$\delta\theta = \left. \frac{\partial\theta^E}{\partial x} \right|_t \Delta x = \left. \frac{\partial\theta^E}{\partial x} \right|_t v^E(x,t)\Delta t$$

Η ποσότητα $\delta\theta$ καλείται **όρος εκ μεταφοράς ή μεταθετικός όρος**, και συνιστά την μεταβολή που αντιλαμβάνεται ένας παρατηρητής σε ένα μόνιμο πεδίο, όταν αυτός κινείται μέσα στο πεδίο με την ταχύτητα v^E . Άρα για έναν παρατηρητή που παρακολουθεί την κίνηση του υλικού σημείου $A(x)$, η αλλαγή της θερμοκρασίας είναι

$$D\theta = \theta'' - \theta$$

και όπως δείχνει η σχέση

$$D\theta = (\theta'' - \theta') + (\theta' - \theta) = \delta\theta + \Delta\theta$$

η διαφορά αυτή γενικώς συντίθεται τόσο από ένα όρο που αφορά στη **τοπική μεταβολή** του θεωρούμενου πεδίου όσο και από ένα όρο **εκ μεταφοράς** (του), δηλαδή,

$$D\theta = \left. \frac{\partial\theta^E}{\partial t} \right|_x \Delta t + \left. \frac{\partial\theta^E}{\partial x} \right|_t v^E(x,t)\Delta t$$

Πράγματι, αν η θερμοκρασιακή βαθμίδα είναι πτωτική προς τα δεξιά (όπως στο παραπάνω παράδειγμα του θερμαινόμενου σώματος του σχήματος), τότε για τον παρατηρητή που κινείται με το υλικό σημείο προς τα δεξιά η πτώση της θερμοκρασίας, $(\theta - \theta'')$, είναι πιο μεγάλη από αυτή που μετράται τοπικά, $(\theta - \theta')$. Η ποσότητα

$$\frac{d\theta}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{D\theta}{\Delta t} \right) \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{d\theta}{dt} = \frac{\partial\theta^E}{\partial t} + \frac{\partial\theta^E}{\partial x} v^E}$$

καλείται **υλική χρονική παραγωγός**¹⁴ του πεδίου $\theta^E(x,t)$.

¹⁴ Αγγλ. *material time derivative*

Ο υπολογισμός της υλικής χρονικής παραγώγου μπορεί να γίνει για οποιοδήποτε φυσικό μέγεθος, π.χ. η επιτάχυνση των υλικών σημείων μπορεί να υπολογισθεί και κατ' ευθείαν από τη σχέση:

$$a^E = \frac{dv^E}{dt} = \frac{\partial v^E}{\partial t} + \frac{\partial v^E}{\partial x} v^E$$

Παράδειγμα:

Αν δεχθούμε ότι

$$v^E = \frac{xt}{t_c^2 + \frac{1}{2}t^2} \Rightarrow$$

$$a^E = \frac{x(t_c^2 + \frac{1}{2}t^2) - xt \cdot t}{\left(t_c^2 + \frac{1}{2}t^2\right)^2} + \frac{xt}{t_c^2 + \frac{1}{2}t^2} \frac{t}{t_c^2 + \frac{1}{2}t^2}$$

$$= \frac{x}{t_c^2 + \frac{1}{2}t^2}$$

Οπότε επαληθεύουμε τον τύπο,

$$\boxed{a^L = a^E = \frac{dv^E}{dt}}$$

Άσκηση

Η κίνηση ενός μονοδιάστατου Συνεχούς δίδεται από την εξής περιγραφή κατά Lagrange,

$$x = X^L(\xi, t) = \frac{\xi}{1 + \xi t} \quad (\xi > 0)$$

Να υπολογισθούν οι περιγραφές κατά Lagrange της ταχύτητας $v^L(\xi, t)$ και της επιτάχυνσης $a^L(\xi, t)$. Να βρεθεί η περιγραφή της ταχύτητας $v^E(x, t)$ και της επιτάχυνσης κατά Euler, $a^E(\xi, t)$. Να επαληθευθεί ότι η επιτάχυνση δίδεται από τον τύπο

$$a^E = \frac{dv^E}{dt}$$

1.5 Εφαρμογές από την Υδροδυναμική

Όπως αναφέραμε εισαγωγικά στην Υδροδυναμική για την περιγραφή της κίνησης ενός ρευστού θα εισάγουμε τους παρακάτω ορισμούς:

1. **Σωματιδιακές τροχιές**¹⁵ είναι εκείνες οι καμπύλες στο χώρο που διατρέχει ένα υλικό σημείο $A(\xi)$ με τη διέλευση του χρόνου. Η σωματιδιακή γραμμή ενός υλικού σημείου

$$x_1 = X_1(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t) \quad , \quad x_2 = X_2(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t) \quad , \quad x_3 = X_3(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t)$$

ή σε συντομογραφία

$$x_i = X_i(\xi_k; t) \quad (i, k = 1, 2, 3)$$

είναι ολοκληρωτική καμπύλη του συστήματος

$$dx_i = v_i dt \quad , \quad (i = 1, 2, 3)$$

με τη συνθήκη ότι το υλικό σημείο διέρχεται τη χρονική στιγμή $t=t_0$ από το σημείο $A(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$.

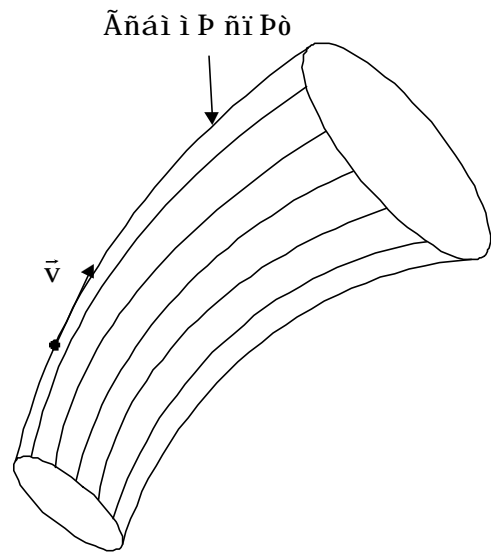
2. **Γραμμές ροής**¹⁵ είναι οι περιβάλλουσες του πεδίου των ταχυτήτων \mathbf{v} . Οι γραμμές ροής την χρονική στιγμή t είναι ολοκληρωτικές καμπύλες

$$f_i(x_k; t) = 0 \quad , \quad (i, k = 1, 2, 3)$$

του συστήματος

$$\frac{dx_1}{v_1} = \frac{dx_2}{v_2} = \frac{dx_3}{v_3} \quad (t = \text{σταθ.})$$

Παρατηρούμε ότι ενώ υπάρχει μία τριπλή απειρία σωματιδιακών γραμμών (όσα και σημεία του χώρου των 3 διαστάσεων), υπάρχει μόνο μία διπλή απειρία γραμμών ροής, όσα και τα σημεία μιας επιφάνειας που την διαπερνούν.



¹⁵ Αγγλ. *pathlines*, *streamlines*, *streaklines*, αντιστοίχως

3. **Ακολουθίες** είναι οι ιδεατές γραμμές που προκύπτουν, αν ενώσουμε κάποια χρονική στιγμή τη θέση όλων των υλικών σημείων τα οποία προγενέστερα διήλθαν από κάποιο σταθερό σημείο του χώρου. Μια ακολουθία περιγράφεται από εξισώσεις της μορφής

$$x_i = X_i^L(X_k^E(x_{i0}, t'), t) \quad , \quad (i, k, l = 1, 2, 3)$$

Στην παράσταση αυτή, ο χρόνος $t = t_0 = \text{σταθ.}$. Ετσι θεωρούμε όλα εκείνα τα υλικά σημεία

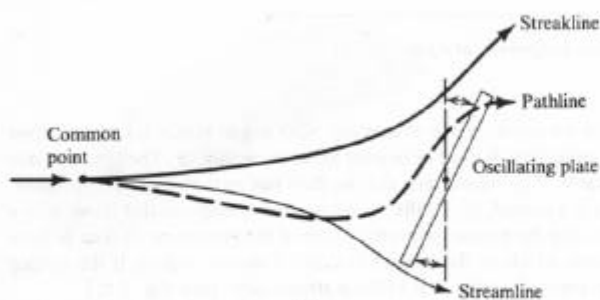
$$\xi_k = X_k^E(x_{i0}, t') \quad , \quad (i, k = 1, 2, 3)$$

τα οποία τη χρονική στιγμή t' , που μπορεί να είναι προτεραιά ή κατοπινή της t_0 , κατέχουν τη θέση στο χώρο $x_i = x_{i0}$.

Γενικά, όπως φαίνεται στην Εικόνα¹⁶ οι τροχιές των σωματιδίων, οι γραμμές ροής και οι ακολουθίες δε συμπίπτουν, παρά μόνο όταν η ροή είναι *μόνιμη*, δηλαδή όταν δεν αλλάζει με τον χρόνο.



(a)



(b)

Figure 8.3 Unsteady flow past an oscillating plate. (a) photograph, (b) schematic. (Source: Photograph by Thomas J. Mueller, University of Notre Dame.)

¹⁶ R.A. Granger, *Fluid Mechanics*, Dover, 1985.

Παράδειγμα

Ας θεωρήσουμε μια επίπεδη κίνηση, της οποίας το πεδίο ταχυτήτων σε περιγραφή Euler δίδεται από τις σχέσεις

$$v_x = \frac{x}{1+t}, \quad v_y = 1, \quad v_z = 0$$

Οι γραμμές ροής του πεδίου αυτού στο επίπεδο $O(x,y)$ υπολογίζονται ως εξής

$$\frac{dx}{v_x} = d\lambda \Rightarrow x = x_0 \exp\left(\frac{\lambda}{1+t}\right)$$

$$\frac{dy}{v_y} = d\lambda \Rightarrow y = y_0 + \lambda$$

Οι παραπάνω εξισώσεις παριστάνουν τη γραμμή ροής, που διέρχεται από το σημείο $A(x_0, y_0)$ τη χρονική στιγμή $t = t_0$.

Λαμβάνοντας τώρα υπ' όψη ότι

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{x}{1+t} \Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{dt}{1+t} \Rightarrow x = \xi(1+t)$$

(7)

$$v_y = \frac{dy}{dt} = 1 \Rightarrow dy = dt \Rightarrow y = \eta + t$$

έχουμε την περιγραφή κατά Lagrange της κίνησης

$$\{x_i\} = \{X_i^L(\xi_k, t)\} = \begin{Bmatrix} \xi(1+t) \\ \eta+t \end{Bmatrix} \Rightarrow \{\xi_k\} = \{X_k^E(x_i, t)\} = \begin{Bmatrix} \frac{x}{1+t} \\ y-t \end{Bmatrix}$$

Δηλαδή ένα υλικό σημείο, που τη χρονική στιγμή $t=0$ κατείχε τη θέση $A(\xi, \eta)$, τη χρονική στιγμή $t>0$ κατέχει τη θέση $A'(x,y)$ με x και y να δίδονται από τις παραπάνω σχέσεις. Απαλείφοντας το χρόνο από τις παραπάνω εκφράσεις, βρίσκουμε τις σωματιδιακές γραμμές,

$$\left. \begin{array}{l} x = \xi(1+t) \Rightarrow t = \frac{x}{\xi} - 1 \\ y = \eta + t \Rightarrow t = y - \eta \end{array} \right\} \Rightarrow x - \xi y = \xi(1 - \eta) \quad (8)$$

Αυτό σημαίνει ότι κάθε σωματίδιο κινείται επ' ευθείας γραμμής με σταθερή ταχύτητα:

$$\{v_i^L\} = \left\{ \frac{\partial X_i^L}{\partial t} \right\} = \begin{cases} v_x = \frac{x}{1+t} = \xi : \text{σταθ.} \\ v_y = 1 : \text{σταθ.} \end{cases}$$

ενώ οι ροϊκές γραμμές αλλάζουν σε συνάρτηση με το χρόνο σύμφωνα με τις παραπάνω εξισώσεις (7).

Η αντίστοιχη ακολουθία δίδεται από τις σχέσεις:

$$x = \xi(1+t) = \frac{x_0}{1+t'}(1+t) \quad , \quad y = \eta + t = (y_0 - t') + t \quad (9)$$

Εφαρμογή:

1) Σωματιδιακή γραμμή δια του υλικού σημείου $(\xi, \eta) = (1,1)$

$$x = \xi(1+t) \quad , \quad y = \eta + t$$

2) Γραμμή ροής δια του σημείου $(x_0, y_0) = (1,1)$ τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$

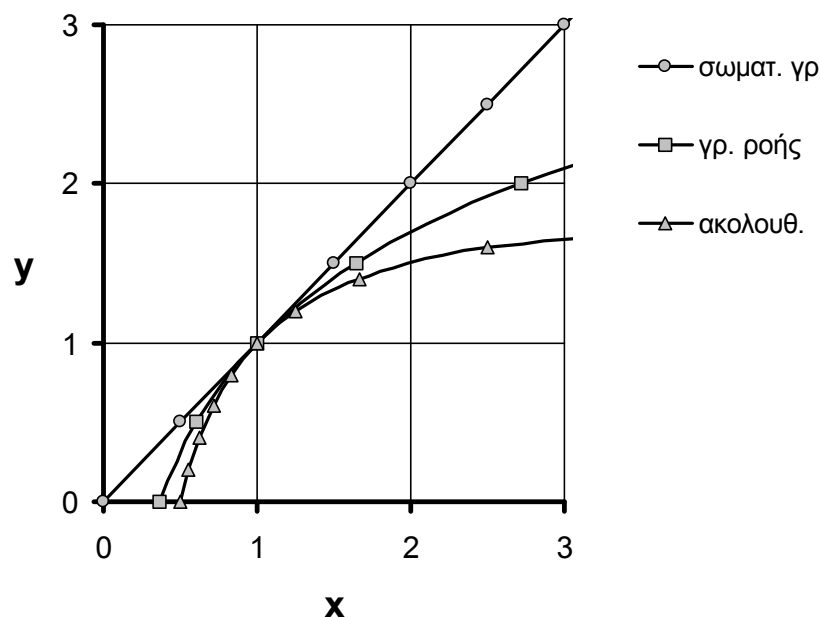
$$x = x_0 \exp\left(\frac{\lambda}{1+t}\right) \quad , \quad y = y_0 + \lambda$$

3) Ακολουθία υλικών σημείων που διήλθαν ή θα διέλθουν από το σημείο $(x_0, y_0) = (1,1)$, τη θέση δηλ. του υλικού σημείου $(\xi, \eta) = (1,1)$ τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$

$$x = \xi(1+t) = \frac{x_0}{1+t'}(1+t_0) \quad , \quad y = \eta + t = (y_0 - t') + t_0$$

$\xi = 1$
 $\eta = 1$

σωματιδιακή γραμμή			γραμμή ροής (t0=0)			ακολουθία (t0=0)		
t	x	y	λ	x	y	t'	x	y
-1.000	0.000	0.000	-1.000	0.368	0.000	-0.800	5.000	1.800
-0.500	0.500	0.500	-0.500	0.607	0.500	-0.600	2.500	1.600
0.000	1.000	1.000	0.000	1.000	1.000	-0.400	1.667	1.400
0.500	1.500	1.500	0.500	1.649	1.500	-0.200	1.250	1.200
1.000	2.000	2.000	1.000	2.718	2.000	0.000	1.000	1.000
1.500	2.500	2.500	1.500	4.482	2.500	0.200	0.833	0.800
2.000	3.000	3.000	2.000	7.389	3.000	0.400	0.714	0.600
2.500	3.500	3.500	2.500	12.182	3.500	0.600	0.625	0.400
3.000	4.000	4.000	3.000	20.086	4.000	0.800	0.556	0.200
3.500	4.500	4.500	3.500	33.115	4.500	1.000	0.500	0.000
4.000	5.000	5.000	4.000	54.598	5.000	1.200	0.455	-0.200



Ασκήσεις

1. Σε μονοδιάστατη ροή ρευστού δίδεται η ταχύτητα των υλικών σημείων

$$x = X^L(\xi, t) = \frac{\xi}{1 + \xi t} \quad (\xi > 0)$$

Να προσδιορισθούν: α) η περιγραφή της κίνησης κατά Lagrange $x = X^L(\xi, t)$ και β) η ταχύτητα και η επιτάχυνση σε περιγραφή κατά Lagrange.

2. Δίδεται το πεδίο ταχυτήτων,

$$v_x = (1+t)x \quad , \quad v_y = (2+t)y$$

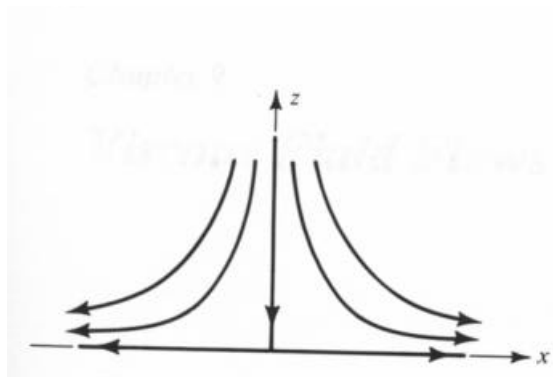
Να υπολογισθούν α) η γραμμή ροής, β) η σωματιδιακή γραμμή και γ) η ακολουθία, που έχουν ως κοινό σημείο το σημείο A(1,2) τη χρονική στιγμή t=0.

3. Για μια μόνιμη ροή (δηλ. για μία ροή που δεν εξαρτάται από το χρόνο) δίδεται το πεδίο ταχυτήτων

$$v_x = U(x) = 3ax$$

$$v_y = V(y) = 4ay$$

$$v_z = W(z) = -7az$$



Να βρεθεί η εξίσωση της ροϊκής γραμμής που διέρχεται από το σημείο A(1,2,3) .

4. Να υπολογισθούν αναλυτικά οι ροϊκές γραμμές για το επίπεδο πεδίο ταχυτήτων

$$v_x = -Ue^{-\alpha t} \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{L}\right)$$

$$v_y = -Ue^{-\alpha t} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{L}\right)$$

Να σχεδιασθούν για διάφορους χαρακτηριστικούς χρόνους οι γραμμές ροής με τη χρήση των αδιάστατων μεγεθών,

$$\tilde{x} = \frac{x}{L}, \quad \tilde{y} = \frac{y}{L}, \quad \tilde{t} = \alpha t$$

$$\tilde{v}_x = \frac{v_x}{U}, \quad \tilde{v}_y = \frac{v_y}{U}$$

