

4 ΚΑΤΑΣΤΑΤΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΠΛΑΣΤΙΚΗΣ ΡΟΗΣ

4	ΚΑΤΑΣΤΑΤΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΠΛΑΣΤΙΚΗΣ ΡΟΗΣ.....	91
4.1	Εισαγωγή.....	93
4.2	Ελαστικότητα.....	93
4.3	Συνάρτηση Διαρροής.....	95
4.4	Νόμος Πλαστικής Ροής και Συνθήκη Συμβατότητας.....	100
4.5	Εξισώσεις Ρυθμού της Θεωρίας Πλαστικής Ροής.....	103

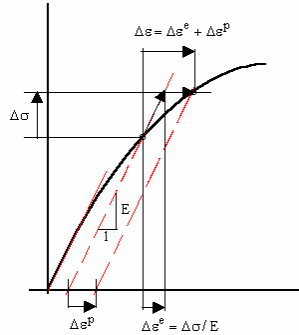
Στο Κεφάλαιο αυτό παρουσιάζουμε αναλυτικά την κατασκευή των καταστατικών εξισώσεων για ελαστο-πλαστικά υλικά που υπακούουν στη θεωρία πλαστικής ροής, κάνοντας χρήση των εννοιών της επιφάνεια διαρροής και του νόμου πλαστικής ροής

4 ΚΑΤΑΣΤΑΤΙΚΕΣ ΕΙΣΩΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΠΛΑΣΤΙΚΗΣ ΡΟΗΣ, 2009

Ιωάννης Γ. Βαρδουλάκης, Dr-Ing., Καθηγητής της Μηχανικής στο Ε.Μ. Πολυτεχνείο

Τ.Θ. 144, Παιανία 190-02, <http://geolab.mechan.ntua.gr/>, I.Vardoulakis@mechan.ntua.gr

4.1 Εισαγωγή



Εικ. 4-1: Απειροστικός διαχωρισμός της τροπής

Λόγω της μη-γραμμικής συμπεριφοράς ενός ελαστο-πλαστικού υλικού, για δεδομένη αύξηση της τάσης $\Delta\sigma$ η ολική απειροστική τροπή $\Delta\varepsilon$ προκύπτει μεγαλύτερη από εκείνη που θα προέβλεπε ένας ελαστικός υπολογισμός,

$$\Delta\varepsilon > \Delta\varepsilon^e = \frac{\Delta\sigma}{E} \quad (4.1)$$

Για να υπολογισθεί σωστά την ολική απειροστική τροπή ο ελαστικός υπολογισμός πρέπει να διορθωθεί προσθέτοντας στην «ελαστική» τροπή την υπολειπόμενη «πλαστική» τροπή

$$\Delta\varepsilon = \Delta\varepsilon^e + \Delta\varepsilon^p \quad (4.2)$$

Με αυτό το σκεπτικό φτάνουμε μέσα στα πλαίσια της θεωρίας πλαστικής ροής στην γενική υπόθεση ότι ο ρυθμός παραμόρφωσης διαχωρίζεται σε ελαστικό και σε πλαστικό μέρος

$$D_{ij} = D_{ij}^e + D_{ij}^p \quad (4.3)$$

Υπενθυμίζουμε ότι ο D_{ij} είναι το συμμετρικό μέρος της βαθμίδας της ταχύτητας στην τρέχουσα απεικόνιση του Συνεχούς,

$$D_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_i v_j + \partial_j v_i) \quad (4.4)$$

Ο διαχωρισμός αυτός, Εξ. (4.3), εισάγει γενικώς στο πρόβλημα 6 νέες αγνώστους, τις συνιστώσες του ρυθμού πλαστικής παραμορφώσεως. Η άρση της κινηματικής αοριστίας γίνεται εν προκειμένω με την υιοθέτηση μιας σειράς καταστατικών υποθέσεων που θα εκθέσουμε παρακάτω.

4.2 Ελαστικότητα

Ο ρυθμός ελαστικής παραμόρφωσης D_{ij}^e δίδεται μέσω των εξισώσεων μιας κατάλληλα επιλεγμένης θεωρίας ελαστικότητας. Επειδή στην περίπτωση αυτή οι σχέσεις τάσεων-τροπών δεν αφορούν πεπερασμένα μεγέθη αλλά τους ρυθμούς τους, η αντίστοιχη θεωρία δεν ονομάζεται ελαστικότητα αλλά *υπο-ελαστικότητα*. Συμφώνως προς τον ορισμό που

δίνουν οι Truesdell και Noll¹, υπο-ελαστικά καλούνται εκείνα τα υλικά που χαρακτηρίζονται από μία γραμμική σχέση μεταξύ της αντικειμενικής χρονικής παραγώγου ενός επιλεγέντος τανυστή τάσεως και του αντίστοιχου, ενεργειακώς συζυγούς ρυθμού παραμορφώσεως. Π.χ. μπορούμε να επιλέξουμε την κατά Jaumann παράγωγο της σχετικής τάσης κατά Kirchhoff, και τον ρυθμό ελαστικής παραμορφώσεως

$$\overset{\circ}{T}_{ij}^t = R_{ijkl}^t D_{kl}^e \quad (4.5)$$

Για υπο-ελαστικά υλικά ισχύει ο επί πλέον περιορισμός ότι ο τανυστής 4^{ης} τάξεως της ελαστικής στιβαρότητας \mathbf{R}^t πρέπει να είναι μία *ισότροπη* συνάρτηση του αντίστοιχου τανυστή της τάσεως

$$\mathbf{R}^t = \hat{\mathbf{R}}^t(\mathbf{T}^t) \quad (4.6)$$

Αν οι παραπάνω «υπο-ελαστικές» καταστατικές Εξ. (2) προέρχονται από μια θεωρία για υπερ-ελαστικά υλικά, τότε από την ύπαρξη μιας συνάρτησης ειδικής ελαστικής ενέργειας συνεπάγεται η λεγόμενη *μειζών συμμετρία* του ελαστικού τανυστή στιβαρότητας

$$R_{ijkl}^t = R_{klij}^t = R_{jikl}^t = R_{ijlk}^t \quad (4.7)$$

Παρατηρούμε ότι στη βιβλιογραφία αντί της κατά Jaumann παραγώγου του σχετικού τανυστή Kirchhoff θα χρησιμοποιηθεί συχνά η αντίστοιχη αντικειμενική παράγωγος του τανυστή Cauchy και η υπο-ελαστική σχέση θα γραφτεί ως εξής

$$\overset{\circ}{\sigma}_{ij} = C_{ijkl}^e D_{kl}^e \quad (4.8)$$

Επειδή όμως ισχύει η σχέση

$$C_{ijkl}^e = R_{ijkl}^t - \sigma_{ij} \delta_{kl} \quad (4.9)$$

παρατηρούμε ότι η αντίστοιχη ελαστική στιβαρότητα ικανοποιεί μόνο τις λεγόμενες *συνθήκες ελάσσονος συμμετρίας*

$$C_{ijkl}^e = C_{jikl}^e = C_{ijlk}^e \quad (4.10)$$

Οι παραπάνω παρατηρήσεις σημαίνουν ότι μέσα στα πλαίσια μιας θεωρίας μεγάλων παραμορφώσεων ή/και τάσεων, ο υπο-ελαστικός νόμος για τον ελαστικό ρυθμό παραμόρφωσης θα πρέπει να εκφρασθεί συναρτήσει της αντικειμενικής παραγώγου Kirchhoff-Jaumann παρά συναρτήσει της αντίστοιχης Cauchy-Jaumann. Υπενθυμίζουμε επίσης ότι και αν ακόμα δεχθούμε ότι η ελαστικότητα του υλικού είναι *ισότροπη*, κάτω από πεπερασμένες παραμορφώσεις το υλικό θα αναπτύξει τροπικά επιβεβλημένη ανισοτροπία και το πιο σημαντικό, θα εμφανίσει μια αύξηση της στιβαρότητας σε διάτμηση κατά 45° προς τους κύριους άξονες της προεντάσεως. Κάτι τέτοιο δεν είναι θεμιτό, διότι στα πραγματικά υλικά τα μέτρα ελαστικότητας μειώνονται αντί να αυξάνονται με προϊούσα την παραμόρφωση και αυτό λόγω εσωτερικής φθοράς που υφίστανται αυτά κατά την παραμόρφωση. Στην πράξη θα αγνοήσουμε τα ελαττώματα των διαφόρων υπο-ελαστικών και υπερ-ελαστικών νόμων και θα δεχθούμε ότι η ελαστικότητα του υλικού περιγράφεται ικανοποιητικά από μια καταστατική σχέση της μορφής που

¹ C. Truesdell and W. Noll. *Nonlinear Field Theories of Mechanics*. Encyclopedia of Physics, Vol. III/3, Sect. 99,100, Springer, 1965.

δίδεται από την Εξ. (4.8), όπου χάριν απλότητας θα δεχτούμε ότι ο τανυστής C_{ijkl}^e είναι ο ισότροπος (Hooke) ελαστικός τανυστής στιβαρότητας.

$$C_{ijkl}^e = G \left(\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk} + \frac{2\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \delta_{kl} \right) \quad (4.11)$$

με τους γνωστούς περιορισμούς για τα μέτρα ελαστικότητας

$$\begin{aligned} G &> 0 \\ -1 &\leq \nu \leq \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (4.12)$$

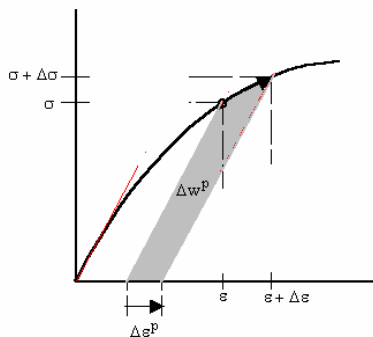
4.3 Συνάρτηση Διαρροής²

Ξεκινάμε με το παράδειγμα του απλού εφελκυσμού, όπου η εντατική κατάσταση είναι μονοαξονική

$$[\bar{\sigma}] = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

Κατά τη λεγόμενη διαδικασία της φόρτισης η τάση αυξάνεται μονοτόνως. Έστω ότι η τάση έχει λάβει ήδη μια τιμή $\sigma_1 = \sigma > 0$ και ότι αυξάνεται απειροστικά κατά $\Delta\sigma > 0$. Κατά την απειροστική αυτή μετάβαση διαπιστώνουμε ότι παράγεται πλαστική τροπή $\Delta\varepsilon^p > 0$, που συνδέεται άμεσα με την παραγωγή πλαστικού έργου παραμόρφωσης (Εικ. 4-2), που με τη σειρά του μετατρέπεται ως επί το πλείστον σε θερμότητα

$$\Delta w^p = \sigma \Delta\varepsilon^p > 0 \quad (4.14)$$



Εικ. 4-2: Κτανάλωση παραγωγή πλαστικού έργου κατά την απειροστική φόρτιση.

Η κατάσταση πλαστικής παραμορφώσεως μετράται με τη βοήθεια μιας μη-φθίνουσας παραμέτρου Ψ που εμ' προκειμένω μπορεί να ταυτιστεί είτε με την ολική πλαστική τροπή

$$\Psi = \varepsilon^p = \int \dot{\varepsilon}^p dt \quad (4.15)$$

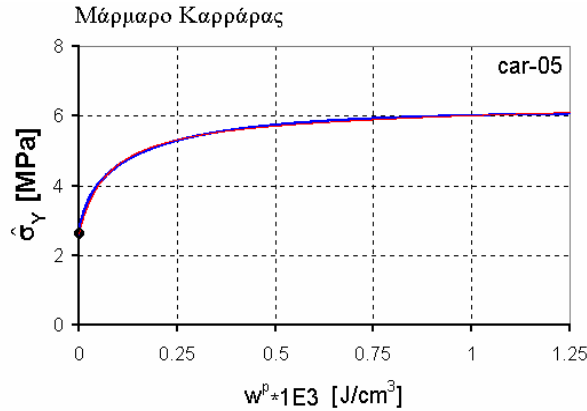
είτε με το ολικό έργο πλαστικής παραμορφώσεως

² Αγγλ. yield function

$$\Psi = w^p = \int \dot{w}^p dt \quad (4.16)$$

Σε κάθε περίπτωση ορίζουμε μια *συνάρτηση διαρροής* της μορφής (Εικ. 4-3),

$$F = \sigma_1 - \hat{\sigma}(\Psi) \quad (4.17)$$



Εικ. 4-3: Παράδειγμα τάσεως διαρροής σε εφελκυσμό δοκιμίων από μάρμαρο σε συνάρτηση με το πλαστικό έργο παραμορφώσεως.

Παρατηρούμε λοιπόν ότι πρωτογενώς η έννοια της φορτίσεως ορίζεται για μονοδιάστατες εντατικές καταστάσεις. Πράγματι φόρτιση έχουμε όταν κατά μία απειροστική μετάβαση ισχύουν οι σχέσεις:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \hat{\sigma}(\Psi) \\ \bar{\sigma}_1 &= \hat{\sigma}(\Psi + \Delta\Psi) \approx \hat{\sigma}(\Psi) + \frac{\partial \hat{\sigma}}{\partial \Psi} \Delta\Psi, \quad \Delta\Psi > 0 \end{aligned} \quad (4.18)$$

Για να γενικεύσουμε τις παραπάνω έννοιες σε τριδιάστατες εντατικές καταστάσεις, εισάγουμε την έννοια της *συναρτήσεως διαρροής* ή *συναρτήσεως φορτίσεως*, η οποία θεωρούμε ότι είναι μια *ισότροπη* συνάρτηση του ταυστή της (πραγματικής) τάσεως σ και μιας μη-φθίνουσας παραμέτρου Ψ , η οποία περιγράφει την κατάσταση πλαστικής κρατύνσεως³ του υλικού

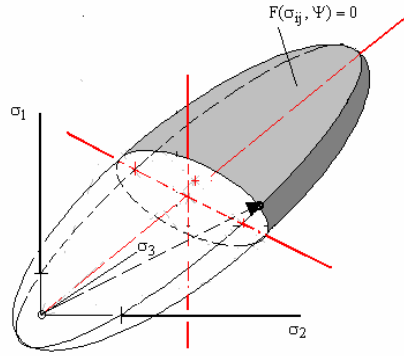
$$F = \hat{F}(\sigma_{ij}, \Psi) \quad (4.19)$$

Αντιστοίχως στο χώρο των τάσεων ορίζουμε μια *επιφάνεια διαρροής*⁴ που περιγράφεται αναλυτικά από την εξίσωση (Εικ. 4-4)

$$\hat{F}(\sigma_{ij}, \Psi) = 0 \quad (4.20)$$

³ Αγγλ. *hardening*

⁴ Αγγλ. *yield surface*



Εικ. 4-4: Επιφάνεια διαρροής

Τώρα υποθέτουμε ότι πλαστικές παραμορφώσεις D_{ij}^p παράγονται όταν η εντατική κατάσταση βρίσκεται και παραμένει πάνω στην επιφάνεια διαρροής, γεγονός που συνιστά την προαναφερθείσα *πλαστική φόρτιση*. Άρα πλαστική φόρτιση έχουμε όταν κατά μια απειροστική μετάβαση, $C^{(t)} \mapsto C^{(t+\Delta t)}$, όπου η μεταβολή της τάσεως είναι,

$$\sigma_{ij} \mapsto \bar{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij} + \Delta\sigma_{ij} = \sigma_{ij} + \dot{\sigma}_{ij}\Delta t \tag{4.21}$$

η μεταβολή της πλαστικής παραμέτρου είναι,

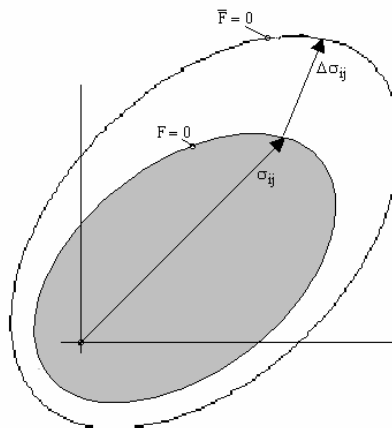
$$\Psi \mapsto \bar{\Psi} = \Psi + \Delta\Psi = \Psi + \dot{\Psi}\Delta t \quad , \quad \dot{\Psi} > 0 \tag{4.22}$$

και ισχύει ότι

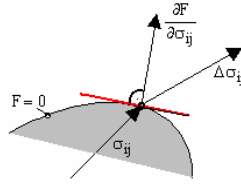
$$F = 0 \mapsto \bar{F} = F + \Delta F = F + \dot{F}\Delta t = 0 \tag{4.23}$$

Η

$$\dot{F} = \frac{\partial \hat{F}}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} + \frac{\partial \hat{F}}{\partial \Psi} \dot{\Psi} = 0 \tag{4.24}$$



Εικ. 4-5: Γεωμετρική απεικόνιση της διαδικασίας φορτίσεως ενός υλικού.



Εικ. 4-6: Γεωμετρική απεικόνιση της απειροστικής φορτίσεως ενός κρατυνόμενου υλικού.

Άρα με τη βοήθεια της γεωμετρικής έννοιας της επιφάνειας διαρροής μπορούμε σχετικά εύκολα να γενικεύσουμε για τρισδιάστατες εντατικές καταστάσεις την έννοια της φορτίσεως ενός υλικού. Φόρτιση έχουμε όταν (Εικ. 4-5):

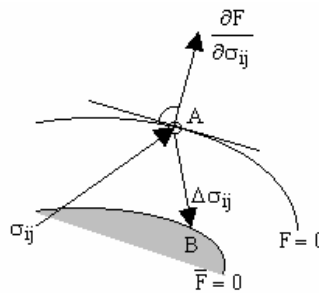
$$F = 0, \dot{F} = 0, \dot{\Psi} > 0 \quad (4.25)$$

Παρατηρούμε ότι κατά την φόρτιση το διάνυσμα της μεταβολής της τάσης δείχνει προς τα «έξω» της επιφάνειας διαρροής (Εικ. 4-6). Αυτό καθορίζεται από το πρόσημο του εσωτερικού γινομένου (στον \mathbb{R}^9) μεταξύ του διανύσματος $\Delta\sigma_{ij}$ και της καθέτου $\partial\hat{F}/\partial\sigma_{ij}$ στην επιφάνεια διαρροής στο σημείο $\{\sigma_{ij}\}$. Άρα, κατά την φόρτιση ισχύουν οι κάτωθι σχέσεις:

$$F = 0, \dot{F} = 0, \frac{\partial\hat{F}}{\partial\sigma_{ij}}\dot{\sigma}_{ij} > 0, \dot{\Psi} > 0 \quad (\text{κράτυνση}) \quad (4.26)$$

Η παραπάνω ανισότητα $(\partial\hat{F}/\partial\sigma_{ij})\dot{\sigma}_{ij} > 0$ ισχύει μόνο στη περίπτωση όπου κατά την φόρτιση η ίδια η επιφάνεια διαρροής κινείται προς τα «έξω», δηλαδή στην περίπτωση όπου το υλικό υφίσταται «κράτυνση». Όταν το υλικό υφίσταται «χαλάρωση», τότε η ανισότητα αυτή δεν ισχύει και έχουμε ότι (Εικ. 4-7),

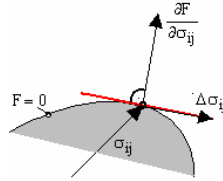
$$F = 0, \dot{F} = 0, \frac{\partial\hat{F}}{\partial\sigma_{ij}}\dot{\sigma}_{ij} < 0, \dot{\Psi} > 0 \quad (\text{χαλάρωση}) \quad (4.27)$$



Εικ. 4-7: Γεωμετρική απεικόνιση της απειροστικής φορτίσεως ενός χαλαρώνοντος υλικού.

Όταν κατά την θεωρούμενη απειροστική μεταβολή το διάνυσμα της μεταβολής της τάσεως βρίσκεται πάνω στο εφαπτομενικό επίπεδο στην επιφάνεια διαρροής, τότε έχουμε την περίπτωση της λεγόμενης *ουδέτερης φορτίσεως*⁵ (Εικ. 4-8):

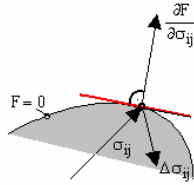
$$F = 0, \frac{\partial \hat{F}}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} = 0, \dot{\Psi} = 0 \quad (\text{ουδέτερη φόρτιση}) \quad (4.28)$$



Εικ. 4-8: Γεωμετρική απεικόνιση της απειροστικής ουδέτερης φορτίσεως ενός υλικού.

Όταν η εντατική κατάσταση βρίσκεται πάνω στην επιφάνεια διαρροής, αλλά το διάνυσμα της μεταβολής της τάσεως δείχνει προς τα «μέσα» της επιφάνειας διαρροής, δεν παράγονται πλαστικές τροπές και έχουμε *αποφόρτιση*⁶ (Εικ. 4-9),

$$F = 0, \frac{\partial \hat{F}}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} < 0, \dot{\Psi} = 0 \quad (\text{αποφόρτιση}) \quad (4.29)$$



Εικ. 4-9: Γεωμετρική απεικόνιση της απειροστικής αποφόρτισεως ενός υλικού.

Στο σημείο αυτό παρατηρούμε ότι υπάρχει μια τεχνική δυσκολία στο να ξεχωρίσουμε μεταξύ αποφόρτισεως και χαλαρώσεως. Η δυσκολία αυτή θα ξεπεραστεί παρακάτω, όπου θα καθορίσουμε το νόμο πλαστικής ροής, δηλαδή τις καταστατικές εκείνες σχέσεις που θα μας επιτρέψουν να προσδιορίσουμε τις πλαστικές τροπές και να παρακολουθήσουμε την εξέλιξη της επιφάνειας διαρροής στις διάφορες φάσεις φορτίσεως, αποφόρτισεως κλ.π.⁷. Εδώ περιοριζόμαστε στην παρατήρηση ότι στο μονοδιάστατο παράδειγμα ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις (Εικ. 4-10)

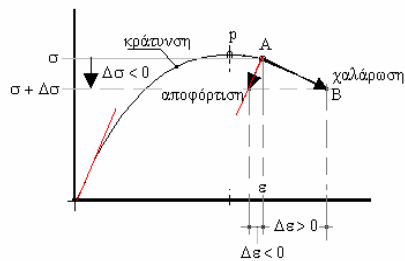
- Κράτνση: $\Delta \sigma \Delta \epsilon > 0, \Delta \Psi > 0$
- Χαλάρωση: $\Delta \sigma \Delta \epsilon < 0, \Delta \Psi > 0$
- Αποφόρτιση: $\Delta \sigma \Delta \epsilon > 0, \Delta \Psi = 0$

⁵ Αγγλ. *neutral loading*

⁶ Αγγλ. *unloading*

⁷ Q.S. Nguyen and H.D. Bui (1974). Sur les materiaux elastoplastiques a ecrouissage positif ou negatif. *J. de Mecanique*, Vol. 3, 322-432.

και σημειώνουμε πάλι ότι η πλαστική παράμετρος δεν μειώνεται. Αυτός είναι ο βασικός περιορισμός που καθιστά τις εξισώσεις της θεωρίας πλαστικής ροής ικανές να περιγράψουν μη-αντιστρεπτές παραμορφώσεις.

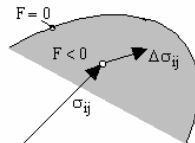


Εικ. 4-10: Γεωμετρική σύγκριση μεταξύ χαλαρώσεως και αποφορτίσεως.

Τέλος παρατηρούμε ότι στην περίπτωση όπου η εντατική κατάσταση βρίσκεται «εντός» της επιφάνειας διαρροής, τότε πλαστικές παραμορφώσεις δεν παράγονται, οποιαδήποτε και αν είναι η κατεύθυνση του διανύσματος μεταβολής της τάσεως,

$$F < 0, \dot{\Psi} = 0 \quad (4.30)$$

Στη περίπτωση αυτή η συμπεριφορά του υλικού για οποιαδήποτε απειροστική μετάβαση είναι ελαστική. Για το λόγο αυτό, η εσωτερική περιοχή της επιφάνειας διαρροής στο χώρο των τάσεων $F < 0$ καλείται «ελαστική» περιοχή (Εικ. 4-11).



Εικ. 4-11: Γεωμετρική απεικόνιση απειροστικής «ελαστικής» καταπονήσεως ενός υλικού..

4.4 Νόμος Πλαστικής Ροής και Συνθήκη Συμβατότητας

Στα πλαίσια της θεωρίας πλαστικής ροής θα δεχθούμε ότι ο ρυθμός πλαστικής παραμορφώσεως έχει τους ίδιους κύριους άξονες με την (πραγματική) τάση. Στη περίπτωση αυτή λέμε ότι οι ταυιστές \mathbf{D}^p και $\boldsymbol{\sigma}$ είναι *ομοαξονικοί*⁸. Ένας μαθηματικά απλός τρόπος να ικανοποιήσουμε αυτή την παραδοχή και παράλληλα να απλοποιήσουμε το πρόβλημα προσδιορισμού των 6 συνιστωσών του ρυθμού πλαστικής παραμορφώσεως είναι ο εξής: α) Υποθέτουμε ότι όλες οι συνιστώσες του \mathbf{D}^p είναι ανάλογες του ρυθμού μεταβολής της πλαστικής παραμέτρου⁹ $\dot{\Psi}$. β) Υποθέτουμε ότι υπάρχει μία ισότροπη συνάρτηση του ταυιστή των τάσεων και της πλαστικής παραμέτρου,

$$Q = \hat{Q}(\sigma_{ij}, \Psi) \quad (4.31)$$

⁸ Αγγλ. *coaxial*

⁹ Για το λόγο αυτό ο $\dot{\Psi}$ θα ονομασθεί και «πλαστικός» πολλαπλασιαστής.

η λεγόμενη συνάρτηση πλαστικού δυναμικού¹⁰, έτσι ώστε

$$D_{ij}^p = \frac{\partial \hat{Q}}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\Psi} \quad (4.32)$$

Η παραπάνω Εξ. (4.32) καλείται νόμος πλαστικής ροής¹¹.

Στη περίπτωση που δεν θα εισάγουμε νέα συνάρτηση στη καταστατική περιγραφή και δεχθούμε ότι η συνάρτηση διαρροής παίζει το ρόλο του πλαστικού δυναμικού, τότε λέμε πως ο νόμος πλαστικής ροής είναι *συνηρημένος*¹²,

$$F \equiv Q \Rightarrow D_{ij}^p = \frac{\partial \hat{F}}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\Psi} \quad (4.33)$$

Στην περίπτωση αυτή το διάνυσμα ρυθμού πλαστικής παραμορφώσεως, παριστάμενο στον χώρο των τάσεων¹³, είναι κάθετο στην επιφάνεια διαρροής στη θέση που αντιστοιχεί στη τρέχουσα τιμή της εντάσεως και της πλαστικής παραμέτρου. Όπως είδαμε στο Κεφ. 3 η παραλληλία μεταξύ D_{ij}^p και της καθέτου στην επιφάνεια διαρροής ($\partial \hat{F} / \partial \sigma_{ij}$) καλείται *συνθήκη καθετότητας*¹⁴.

Παρατηρούμε ότι με δεδομένη την συνάρτηση πλαστικού δυναμικού, η κινηματική αοριστία του ελστοπλαστικού προβλήματος περιορίζεται στον υπολογισμό: α) Των 3 βαθμών ελευθερίας κινήσεως του ΥΣ, δηλαδή στο προσδιορισμό των συνιστουσών της ταχύτητας v_i ($i=1,2,3$). β) Στον προσδιορισμό της πλαστικής παραμέτρου $\dot{\Psi}$. Για την απαλοιφή της κινηματικής αγνώστου $\dot{\Psi}$ κάνουμε χρήση της υποθέσεως ότι πλαστικές τροπές, και λόγω τις Εξ.(4.32), $\dot{\Psi} > 0$, θα παράγεται, όταν θα λαμβάνει χώρα φόρτιση της επιφάνειας διαρροής. Με άλλα λόγια η απαλοιφή του $\dot{\Psi} > 0$ θα γίνει με το να απαιτήσουμε ο νόμος πλαστικής ροής, Εξ. (4.32), να είναι συμβατός με την φόρτιση της επιφάνειας διαρροής. Αυτή η διαδικασία γίνεται ως εξής:

Όπως αναφέραμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, κατά την φόρτιση ισχύουν οι σχέσεις

$$F = 0 \quad (4.34)$$

και

$$\dot{F} = \frac{\partial \hat{F}}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} + \frac{\partial \hat{F}}{\partial \Psi} \dot{\Psi} = 0 \quad (4.35)$$

Ο ρυθμός του τανυστή των τάσεων κατά Cauchy δίδεται μέσω των καταστατικών σχέσεων της υπο-ελαστικότητας,

$$\dot{\sigma}_{ij} = C_{ijkl}^e D_{kl}^e \quad (4.36)$$

και των γεωμετρικών σχέσεων που συνδέουν την υλική του παράγωγό του με την κατά Jaumann αντικειμενική του παράγωγο,

¹⁰ Αγγλ. *plastic potential function*

¹¹ Αγγλ. *plastic flow-rule*

¹² Αγγλ. *associated*

¹³ Αυτό είναι δυνατό λόγω ομοαξονικότητας μεταξύ D^p και σ .

¹⁴ Αγγλ. *normality condition*

$$\dot{\sigma}_{ij} = \overset{\circ}{\sigma}_{ij} + W_{ik}\sigma_{kj} - \sigma_{ik}W_{kj} \quad (4.37)$$

Παρατηρούμε τώρα ότι επειδή ο τανυστής $(\partial\hat{F}/\partial\sigma_{ij})$ είναι συμμετρικός, ενώ ο στροβιλισμός είναι αντισυμμετρικός τανυστής, ισχύει η σχέση

$$\frac{\partial\hat{F}}{\partial\sigma_{ij}}\dot{\sigma}_{ij} = \frac{\partial\hat{F}}{\partial\sigma_{ij}}\overset{\circ}{\sigma}_{ij} \Rightarrow \frac{\partial\hat{F}}{\partial\sigma_{ij}}\dot{\sigma}_{ij} = \frac{\partial\hat{F}}{\partial\sigma_{ij}}C_{ijkl}^e D_{kl}^e \quad (4.38)$$

Τέλος, κάνοντας χρήση του διαχωρισμού του ρυθμού παραμορφώσεως

$$D_{ij} = D_{ij}^e + D_{ij}^p \quad (4.39)$$

και του νόμου πλαστικής ροής

$$D_{ij}^p = \frac{\partial\hat{Q}}{\partial\sigma_{ij}}\dot{\Psi} \quad (4.40)$$

η Εξ. (4.35) δίδει,

$$\frac{\partial\hat{F}}{\partial\sigma_{ij}}C_{ijkl}^e \left(D_{kl} - \frac{\partial\hat{Q}}{\partial\sigma_{kl}}\dot{\Psi} \right) + \frac{\partial\hat{F}}{\partial\Psi}\dot{\Psi} = 0 \quad (4.41)$$

Λαμβανομένου υπ' όψιν του γεγονότος ότι ο ρυθμός παραμορφώσεως είναι το συμμετρικό μέρος της βαθμίδας της ταχύτητας

$$D_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_i v_j + \partial_j v_i) \quad (4.42)$$

καθίσταται φανερό ότι η παραπάνω Εξ. (4.41) μας επιτρέπει την απαλοιφή του ρυθμού του πλαστικού πολλαπλασιαστή. Στη τελική έκφραση για το $\dot{\Psi}$ κάνουμε χρήση των εξής συμβολισμών:

$$N_{ij} = \frac{\partial\hat{F}}{\partial\sigma_{ij}} \quad , \quad N'_{ij} = \frac{\partial\hat{Q}}{\partial\sigma_{ij}} \quad (4.43)$$

$$B_{ij} = N_{kl}C_{klij}^e$$

$$H_t = -\frac{\partial\hat{F}}{\partial\psi} \quad (\text{μέτρο κράτνσης}^{15}) \quad (4.44)$$

$$H_0 = N_{kl}C_{klmn}^e N'_{mn} > 0 \quad (\text{μέτρο αντεπιστροφής}^{16}) \quad (4.45)$$

$$H = H_0 + H_t > 0 \quad (\text{πλαστικό μέτρο}^{17}) \quad (4.46)$$

Με αυτούς τους συμβολισμούς η Εξ. (4.41) δίδει,

$$\dot{\Psi} = \frac{1}{H} B_{kl} D_{kl} \quad (4.47)$$

¹⁵ Αγγλ. *hardening modulus*

¹⁶ Αγγλ. *snap-back modulus*

¹⁷ Αγγλ. *plastic modulus*

Επειδή τώρα εξ ορισμού ο πλαστικός πολλαπλασιαστής $\dot{\Psi}$ δεν μπορεί να πάρει αρνητικές τιμές, γι' αυτό η παραπάνω εξίσωση γράφεται ως εξής

$$\dot{\Psi} = \frac{\langle 1 \rangle^{(p)}}{H} B_{kl} D_{kl} \quad (4.48)$$

όπου εισάγαμε το λεγόμενο σύμβολο ή αγκύλη Foerpl-Macauley

$$\langle 1 \rangle^{(p)} = \begin{cases} 1 & : F = 0 \wedge B_{kl} D_{kl} > 0 \\ 0 & : F < 0 \vee (F = 0 \wedge B_{kl} D_{kl} \leq 0) \end{cases} \quad (4.49)$$

Με το τρόπο αυτό πετύχαμε μια έκφραση για τον ρυθμό μεταβολής της πλαστικής παραμέτρου, ο οποίος είναι συμβατός με τους ορισμούς φόρτισης και αποφόρτισης της επιφάνειας διαρροής που δώσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Για το λόγο αυτό η συνθήκη (4.48) λέγεται και *συνθήκη συμβατότητας κατά Prager*¹⁸.

4.5 Εξισώσεις Ρυθμού της Θεωρίας Πλαστικής Ροής

Επιστρέφουμε στις εξισώσεις υπο-ελαστικότητας, που τώρα μπορούν να γραφούν συναρτήσει του ρυθμού της ολικής παραμορφώσεως

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{ij} &= C_{ijkl}^e D_{kl}^e = C_{ijkl}^e (D_{kl} - D_{kl}^p) = C_{ijkl}^e (D_{kl} - \dot{\Psi} N'_{kl}) \\ &= C_{ijkl}^e (D_{kl} - \frac{\langle 1 \rangle^{(p)}}{H} B_{pq} D_{pq} N'_{kl}) \end{aligned} \quad (4.50)$$

Οι εξισώσεις αυτές γράφονται σε απλή, συνοπτική μορφή κάνοντας χρήση των παρακάτω συμβολισμών:

$$C_{ijkl}^e = G \left(\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk} + \frac{2\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \delta_{kl} \right) \text{ (ελαστική στιβαρότητα)} \quad (4.51)$$

$$C_{ijkl}^p = \frac{1}{H} N'_{mn} C_{mnij}^e N_{pq} C_{pqkl}^e \text{ (πλαστική στιβαρότητα)} \quad (4.52)$$

$$C_{ijkl}^{ep} = C_{ijkl}^e - \langle 1 \rangle^{(p)} C_{ijkl}^p \text{ (ελαστο-πλαστική στιβαρότητα)} \quad (4.53)$$

Οπότε

$$\dot{\sigma}_{ij} = C_{ijkl}^{ep} D_{kl} \quad (4.54)$$

Αυτές είναι οι καταστατικές εξισώσεις της θεωρίας πλαστικής ροής μεταξύ του αντικειμενικού ρυθμού της πραγματικής τάσεως και του ρυθμού της παραμορφώσεως. Λόγω των αγκυλών Foerpl-Macauley ο ελαστο-πλαστικός τανυστής C_{ijkl}^{ep} είναι ένας *οιονεί γραμμικός τελεστής*¹⁹. Καμία φορά οι Εξ. (4.54) θα χαρακτηρισθούν και ως *δι-γραμμικές*, αφού είναι σε δύο περιοχές, κατά περιοχή γραμμικές:

$$C_{ijkl}^{ep} \equiv C_{ijkl}^e \text{ στην ελαστική περιοχή} \quad (4.55)$$

¹⁸ Αγγλ. *Prager's consistency condition*

¹⁹ Αγγλ. *quasi-linear operator*

$$\text{αλλιώς } C_{ijkl}^{ep} \equiv C_{ijkl}^e - C_{ijkl}^p \quad (4.56)$$

Ένας άλλος τρόπος να δει κανείς τις εξισώσεις της θεωρίας της πλαστικής ροής είναι ότι αυτές συνιστούν διόρθωση των εξισώσεων της (υπο-) ελαστικότητας,

$$\dot{\sigma}_{ij} = C_{ijkl}^e D_{kl} - \langle 1 \rangle^{(p)} C_{ijkl}^p D_{kl} \quad (4.57)$$

Γι' αυτό καμιά φορά θα αναφερθεί ότι οι καταστατικές εξισώσεις της θεωρίας πλαστικής ροής συνιστούν μια *κανονική διαταραχή* εκείνων της θεωρίας (υπο-) ελαστικότητας.

Παρατηρούμε τέλος ότι αν ο ελαστικός τανυστής ικανοποιεί τις συνθήκες μείζονος συμμετρίας,

$$C_{ijkl}^e = C_{klij}^e = C_{ijlk}^e = C_{jikl}^e = \dots \quad (4.58)$$

τότε ο ελαστο-πλαστικός τανυστής τις ικανοποιεί μόνον όταν ο νόμος πλαστικής ροής είναι συνηρημένος

$$N'_{ij} = N_{ij} \Rightarrow C_{ijkl}^{ep} = C_{klij}^{ep} = \dots \quad (4.59)$$

Όπως αναφέραμε εισαγωγικά και θα αναπτύξουμε στο επόμενο κεφάλαιο, για πολλά γεωυλικά, λόγω του φαινομένου της διαστολικότητας, δεν ισχύει ο νόμος καθετότητας, οπότε ο νόμος πλαστικής ροής δεν συναρτάται απ' ευθείας με την επιφάνεια διαρροής. Παρ' όλα αυτά στη βιβλιογραφία θα βρούμε μια ασθενέστερη μορφή, τον λεγόμενο *αποκλίνοντα νόμο καθετότητας*^{20,21}, που συνοψίζεται στη σχέση

$$N'_{ij} - N_{ij} = \lambda \delta_{ij} \quad (4.60)$$

και ο λ είναι βαθμωτό μέγεθος.

²⁰ Αγγλ. *deviatoric normality condition*

²¹ G. Gudehus (1972). Elasto-plastic constitutive equations for dry sand. *Arch. Mech. Stosw.*, Vol. 24, 395-402.

