3 ΠΛΑΣΤΙΚΗ ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑ ΥΛΙΚΩΝ

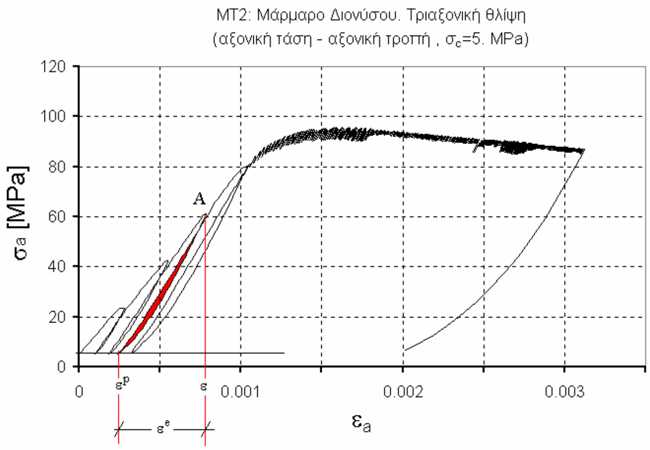
Στο Κεφάλαιο αυτό περιγράφεται σε αδρές γραμμές η ελαστοπλαστική συμπεριφορά των γεωυλικών[1].

[1] Vardoulakis, I., *Behavior of Granular Materials*. In: Handbook of Materials Behavior Models, Sect. 11.4, 1093-1105, 2001.

Ιωάννης Γ. Βαρδουλάκης, Dr-Ing., Καθηγητής της Μηχανικής στο Ε.Μ. Πολυτεχνείο

Τ.Θ. 144, Παιανία 190-02, http://geolab.mechan.ntua.gr/, I.Vardoulakis@mechan.ntua.gr

3.1 Ελαστοπλαστικός Διαχωρισμός της Τροπής



Εικ. 3-1: Χαρακτηριστική καμπύλη αξονικών τάσεων-τροπών για δοκίμιο μαρμάρου Διονύσου σε τριαξονική θλίψη.

Από φαινομενολογικής σκοπιάς πραγματικά υλικά εμφανίζουν κατ' εξοχήν μη-γραμμική συμπεριφορά καθώς και μη-αντιστρεπτές παραμορφώσεις, γεγονός που αναγνωρίζεται σε ένα πείραμα φορτίσεως–αποφορτίσεως. Όπως φαίνεται και στο παραπάνω γράφημα (Εικ. 3-1) η συμπεριφορά του υλικού (μαρμάρου εν προκειμένω) είναι ριζικά διαφορετική στο κλάδο φορτίσεως από το κλάδο αποφορτίσεως - επαναφορτίσεως. Επίσης οι τροπές κατά την αποφόρτιση υστερούν εκείνων κατά την φόρτιση, δηλαδή το υλικό δεν συμπεριφέρεται όπως ένα ελαστικό υλικό. Αν ε είναι η ολική τροπή μέχρι κάποιου σημείου A στη καμπύλη φόρτισης, τότε το πείραμα αποφορτίσεως μας δείχνει ότι μόνο ένα μέρος αυτής της τροπής, έστω ε^e η λεγόμενη και *ελαστική τροπή*[2], είναι αντιστρεπτή. Η *«παραμένουσα»* τροπή ε^p καλείται και *πλαστική τροπή* [3],

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p \tag{2.1}$$

Η *θεωρία πλαστικότητος* βασίζεται στην υπόθεση ότι δεν μπορούμε να διατυπώσουμε καταστατικές εξισώσεις που να αφορούν πεπερασμένες παραμορφώσεις, όπως κάνουμε στην περίπτωση ελαστικών και υπερ-ελαστικών υλικών. Πράγματι, η συμπεριφορά ενός πραγματικού υλικού δεν εξαρτάται μόνο από την τρέχουσα τιμή της τάσης, όπως υποθέτουμε ότι συμβαίνει στα ελαστικά υλικά, αλλά εξαρτάται και από την *«ιστορία»* της παραμόρφωσης. Για το λόγο αυτό οι εξισώσεις της θεωρίας πλαστικής ροής θα διατυπωθούν ως σχέσεις μεταξύ των ρυθμών τάσεων και τροπών, και θα έχουν τη μορφή *εξελικτικών εξισώσεων*[4]

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\sigma}, \ldots, \boldsymbol{D}) \qquad (2.2)^5$$

ή

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{\sigma}, \dot{\boldsymbol{\sigma}} \ldots) \tag{2.3}$$

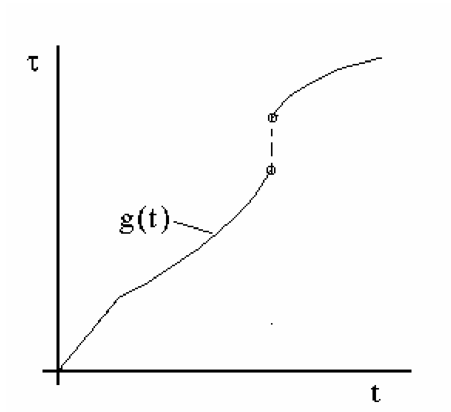
---

[2] Δείκτης *(e): elastic)*

[3] Δείκτης *(p: plastic)*. Πλάσσω (αρχ.): μορφώνω, διαπλάθω, σχηματίζω (Liddle and Scott's, *Greek-English Lexicon*, Calendron Press 1889: *πλάσσω*= to form, mould, shape). (αρχ.) επιθ.: πλαστικός.

[4] Αγγλ. *evolution equations*

[5] Οι τελείες στη λίστα των μεταβλητών σημαίνουν εξάρτηση του ρυθμού της τάσης και από μία σειρά παραμέτρων (εσωτερικών μεταβλητών), που περιγράφουν την «ιστορία» της παραμορφώσεως.



Εικ. 3-2: Μονότονος μετασχηματισμός της χρονικής μεταβλητής.

Θα περιορισθούμε εδώ σε υλικά που συμπεριφέρονται αμιγώς ανεξάρτητα της ταχύτητας παραμορφώσεως[6]. Στην περίπτωση αυτή η οποιαδήποτε αλλαγή στη ταχύτητα φορτίσεως, που αντιστοιχεί σε κάποιο μετασχηματισμό της χρονικής μεταβλητής της μορφής, $\tau = g(t)$, αφήνει αναλλοίωτη τις παραπάνω καταστατικές εξισώσεις (Εικ. 3-2). Στην περίπτωση του καταστατικού νόμου (2.2) χρονικώς ανεξάρτητη συμπεριφορά σημαίνει ότι ο ρυθμός $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ θα είναι μια ομογενής πρώτου βαθμού γραμμική ή μη-γραμμική συνάρτηση του ρυθμού παραμορφώσεως, π.χ. μια συνάρτηση της μορφής,

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{C} : \boldsymbol{D} + \boldsymbol{A}\|\boldsymbol{D}\| + \cdots \tag{2.4}$$

Ένας τέτοιος γενικός νόμος καλείται *υπο-πλαστικός*[7] και αφορά γενικώς σε μια μη-γραμμική εξάρτηση του ρυθμού της τάσεως από τον ρυθμό της παραμορφώσεως. Λόγω της ανεξαρτησίας από την ταχύτητα παραμορφώσεως, στην συνέχεια θα χρησιμοποιούμε αδιακρίτως είτε το ρυθμό μεταβολής μιας ποσότητας είτε την απειροστική της μεταβολή. Έτσι ο παραπάνω διαχωρισμός της τροπής σε ελαστικό και πλαστικό μέρος θα γραφθεί είτε για τον ρυθμό παραμορφώσεως είτε για την μεταβολή της απειροστικής τροπής,

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{D}^e + \boldsymbol{D}^p \ , \ \Delta\boldsymbol{\varepsilon} = \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^e + \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p \tag{2.5}$$

Παρατηρούμε τέλος ότι για τις ελαστικές τροπές θα δεχθούμε γενικώς ότι ισχύει ένας *υπο-ελαστικός* νόμος, της μορφής,

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{C}^e : \boldsymbol{D}^e \tag{2.6}$$

όπου στις περισσότερες εφαρμογές ο ελαστικός τανυστής στιβαρότητας θα είναι εκείνος που περιγράφει ελαστικό υλικό τύπου Hooke,

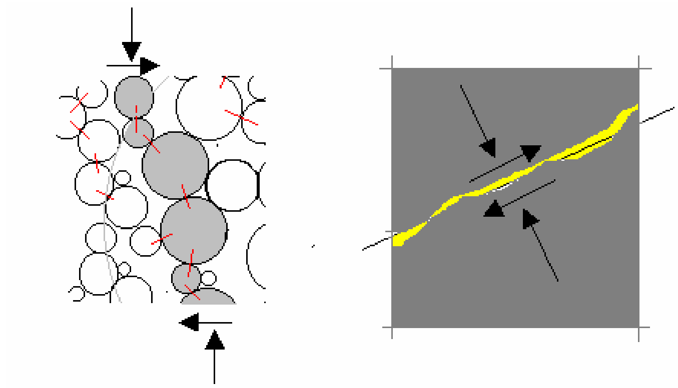
$$C^e_{ijkl} = G\left(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk} + \frac{2\nu}{1-2\nu}\delta_{ij}\delta_{kl}\right) \tag{2.7}$$

---

[6] Αγγλ. *rate independent materials*. Τα ανεξάρτητα της ταχύτητας παραμορφώσεως υλικά είναι αποτελούν μία μαθηματική εξιδανίκευση και μία οριακή συμπεριφορά. Γενικώς πραγματικά υλικά συμπεριφέρονται διαφορετικά όταν η ταχύτητα παραμορφώσεως αλλάζει. Μια τέτοια συμπεριφορά καλείται ιξοδοελαστική ή «ιξοδοπλαστική» (visco-elastic, visco-plastic). Πρβλ. P.Perzyna (1963). The constitutive equations for rate sensitive plastic materials. *Q. Appl. Math.*, Vol. 20, 321-332.).

[7] W. Wu, E. Bauer and D. Kolymbas (1996). Hypoplastic constitutive model with critical state for granular materials. *Mechanics of Materials*, Vol. 23, 45-69

3.2 Συνθήκη Διαρροής



Εικ. 3-3: Υλικά με εσωτερική τριβή: α) κοκκώδης μικροδομή και β) μικροδομή με μικρορωγμές.

Η ιδιότητα η οποία διακρίνει τα λεγόμενα *«γεωυλικά»*[8], όπως π.χ. τα εδάφη, τα πετρώματα και το σκυρόδεμα, από άλλα υλικά, όπως π.χ. τα μέταλλα, είναι η προεξάρχουσα ευαισθησία τους στην επιβαλλόμενη μέση ορθή τάση[9], η οποία αποδίδεται στην ύπαρξη *«εσωτερικής τριβής»*. Η εσωτερική τριβή αναπτύσσεται σε μικρο-δομικό επίπεδο είτε μεταξύ κόκκων είτε στα χείλη εσωτερικών μικρορωγμών, τυχαία κατανεμημένων μέσα στο (REV), Εικ. 3-3.

Για υλικά *ευαίσθητα στην μέση ορθή τάση*[10] και υπό καθεστώς συνεχιζόμενης φορτίσεως η ένταση διατμητικής τάσεως $T=\sqrt{J_{2s}}$ συναρτάται με την μέση ορθή θλιπτική τάση $\mathrm{p}=\mathrm{I}_{1\sigma}/3$. Υπό μορφή καταστατικής εξισώσεως προτείνεται αντίστοιχα ένας περιορισμό, που ονομάζεται *συνθήκη διαρροής*[11], π.χ. μία σχέση της μορφής[12]

$$T+fp=0 \tag{2.8}$$

όπου

$$f=\frac{c}{|p|}+f_C\left(1+c_1|p|+\cdots\right) \tag{2.9}$$

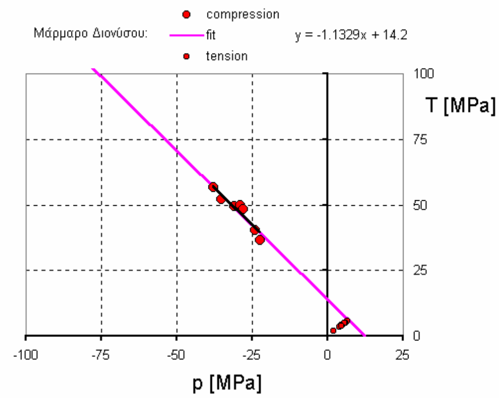
Η σταθερά c καλείται *συνεκτικότητα*[13] *και* ο συντελεστής f_C, συντελεστής *«εσωτερικής» τριβής*[14].

Σε πρώτη προσέγγιση για ένα υλικό *τύπου Coulomb* έχουμε ότι η συνθήκη διαρροής είναι γραμμική ως προς p

$$T\approx c-f_C p \tag{2.10}$$

---

[8] Αγγλ. *geomaterials*
[9] Αγγλ. *pressure sensitivity*
[10] Αγγλ. *pressure-sensitive materials*
[11] Αγγλ. *yield condition*
[12] θλιπτικές τάσεις λαμβάνονται με αρνητικό πρόσημο.
[13] Αγγλ. *cohesion*
[14] Αγγλ. *friction coefficient*

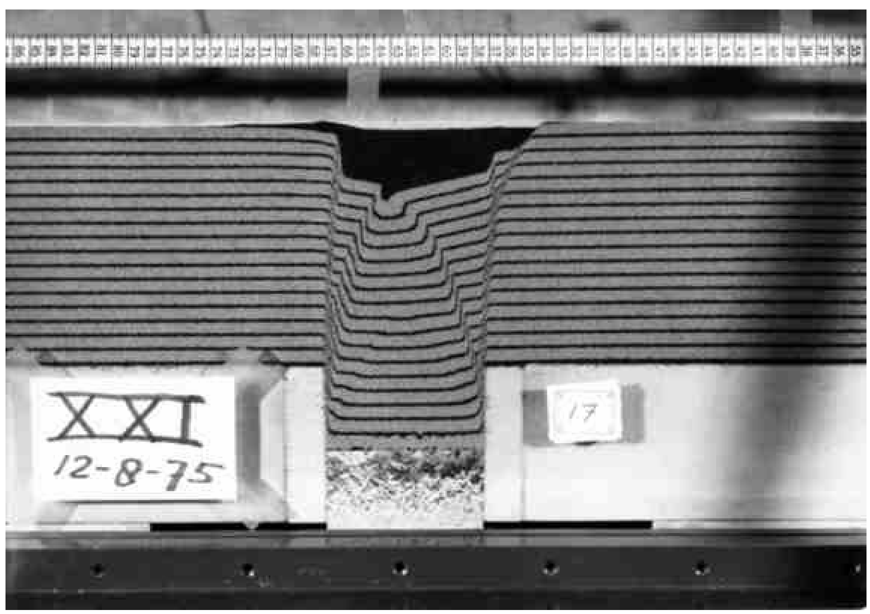


Εικ. 3-4: Γραμμική συνθήκη διαρροής για μάρμαρο Διονύσου.

Από την παραπάνω καταστατική εξ. (2.10) προκύπτει ότι κάτω από αρκετά μεγάλες πιέσεις τα γεωυλικά συμπεριφέρονται ως αμιγώς μη-συνεκτικά υλικά,

$$T \approx -f_C p \quad (p < 0\ , c << |p|) \tag{2.11}$$

Ένα κοκκώδες υλικό, όπως η άμμος, είναι τυπικό παράδειγμα ενός μη-συνεκτικού υλικού (*«τριβώδους»*[15]). Για παράδειγμα αναφέρουμε εδώ ότι πολλά προσομοιώματα τεκτονικών μακρο-δομών, όπως τα γεωλογικά ρήγματα (όπου στη πραγματικότητα οι γεωστατικές τάσεις είναι πολύ μεγάλες), πραγματοποιούνται στο εργαστήριο υπό κλίμακα με μη-συνεκτική ή ελαφρώς συνεκτική άμμο κάτω από συνθήκες κανονικής βαρύτητας.[16]



Εικ. 3-5: Προσομοίωμα τεκτονικού ρήγματος στο εργαστήριο με τη βοήθεια ξηρής άμμου. Οι λωρίδες χρωματισμένης άμμου δείχνουν καθαρά τη γεωμετρική μορφή των ημικατακόρυφων ρηγμάτων που προκαλούνται από μία έντονη βύθιση της βάσης (μηχανισμός καταπακτής, trap – door mechanism).

---

[15] Αγγλ. *frictional*

[16] M.K.. Hubbert, *Mechanics of deformation of crustal rocks: Historical development*. In: Mechanical Behavior of Crustal Rocks-The Handin Volume (Ed. N.L. Carter et al.) Americal Geophysical Union, 1981, 1-9.

3.3 Νόμος Πλαστικής Ροής

Ένας απλός τρόπος να συσχετίσουμε την *πλαστική διαρροή* με την *πλαστική ροή* είναι να δούμε την έκφραση για το στοιχειώδες πλαστικό έργο παραμορφώσεως, που υποθέτουμε ότι εξ ολοκλήρου αναλίσκεται

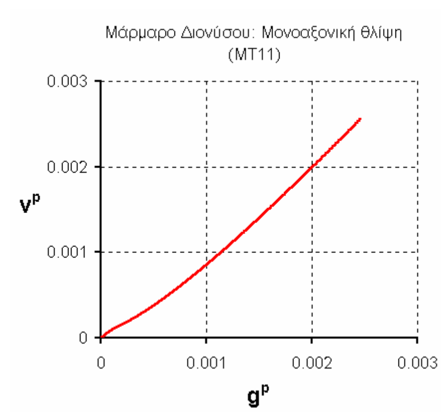
$$\dot{w}^p = \sigma_{ij} D_{ij}^p = p\dot{v}^p + T\dot{g}^p \tag{2.12}$$

Στην έκφραση αυτή $\dot{v}^p$ και $\dot{g}^p$ είναι ο ρυθμός πλαστικής ογκομετρικής παραμορφώσεως και ο ρυθμός πλαστικής διατμητικής παραμορφώσεως, που είναι ενεργειακώς συζυγείς προς την μέση τάση και την ένταση της διατμητικής τάσεως αντιστοίχως.

Εκτός από εσωτερική τριβή, γεωυλικά εμφανίζουν και πλαστική *διασταλτικότητα*[17], η οποία θεωρείται ως ένας *εσωτερικός περιορισμός*[18] μεταξύ του ρυθμού της πλαστικής ογκομετρικής τροπής $\dot{v}^p = D_{kk}^p$ και του ρυθμού πλαστικής διατμητικής τροπής $\dot{g}^p$ [19]

$$\dot{v}^p = d_R \dot{g}^p \tag{2.13}$$

Ο παραπάνω περιορισμός συνιστά τον *νόμο πλαστικής ροής*[20]. Η παράμετρος d_R στην παραπάνω καταστατική εξίσωση καλείται συντελεστής διασταλτικότητας[21] κατά *Reynolds*[22].



Εικ. 3-6: Διάγραμμα πλαστικής διατμητικής τροπής-πλαστικής ογκομετρικής τροπής για μάρμαρο Διονύσου.

Στην ειδική περίπτωση όπου $d_R = 0$, το υλικό είναι *πλαστικά ασυμπίεστο*,

$$\dot{v}^p = 0 \tag{2.14}$$

---

[17] Αγγλ. *dilatancy*
[18] Αγγλ. *internal constraint*
[19] Οι ποσότητα αυτή ορίζεται επακριβώς σε επόμενο κεφάλαιο.
[20] Αγγλ. *flow rule*
[21] Αγγλ. *dilatancy coefficient*
[22] Reynolds, O. (1885). On the dilatancy of media composed of rigid particles in contact. With experimental illustrations. Phil. Mag. (**2**) **20**, 469-481. Also: Truesdell, C. and Noll, W.: The Non-Linear Field Theories of Mechanics, Handbuch der Physik Band III/3, section 119, Springer 1965.

Γενικώς θα δεχθούμε ότι τόσο οι συντελεστές τριβής και διασταλτικότητας όσο και συνεκτικότητα είναι συναρτήσεις κάποιας παραμέτρου Ψ που εκφράζει τη κατάσταση πλαστικής παραμορφώσεως.

$$c = \hat{c}(...;\Psi)\ ,\ f_C = \hat{f}(...;\Psi)\ ,\ d_R = \hat{d}(...;\Psi) \tag{2.15}$$

Λαμβάνοντας υπ' όψη ότι,

$$T \approx c - f_C p \tag{2.16}$$

και

$$\dot{v}^p = d_R \dot{g}^p \tag{2.17}$$

Παίρνουμε

$$\dot{w}^p = \left(c + (-p)\ \ (f_C - d_R)\right)\dot{g}^p \tag{2.18}$$

Αυτό σημαίνει ότι από τη σκοπιά της καταναλώσεως έργου παραμορφώσεως, ένα υλικό με εσωτερική τριβή και διασταλτικότητα συμπεριφέρεται ως ένα υλικό με εσωτερική τριβή που παραμορφώνεται ισόχωρα και έχει *ισοδύναμο συντελεστή εσωτερικής τριβής* την διαφορά

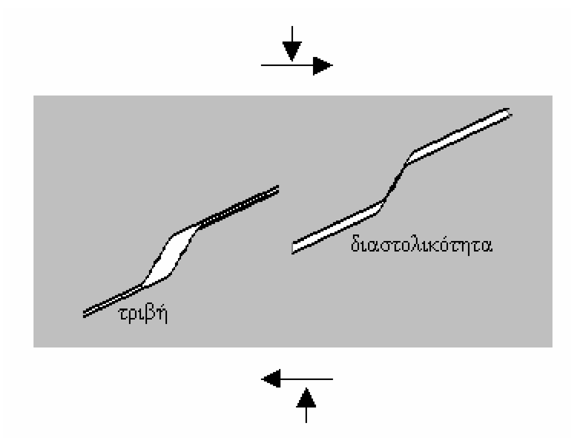
$$f_{eq} = f_C - d_R \tag{2.19}$$

Τα πειραματικά δεδομένα ενισχύουν την υπόθεση ότι ο ισοδύναμος συντελεστής τριβής είναι σταθερός

$$f_{eq} = \sigma\tau\alpha\theta. \tag{2.20}$$

Η παραπάνω σχέση οδηγεί στην γνωστή από την Βραχομηχανική υπόθεση ότι η «αντοχή» ενός πετρώματος εξαρτάται από την συνεκτικότητα c και την εσωτερική τριβή, που με τη σειρά της συνίσταται σε αντίσταση λόγω τριβής και σε αντίσταση λόγω διασταλτικότητας (Εικ. 3-7)

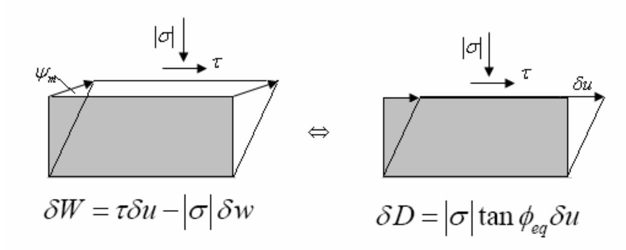
$$f_C = f_{eq} + d_R \tag{2.21}$$



Εικ. 3-7: Αντίσταση λόγω εσωτερικής τριβής και διασταλτικότητας.

Στην περίπτωση απλής, διασταλτικής διατμήσεως η παραπάνω υπόθεση Εξ. (2.21) εκφράζεται συναρτήσει της γωνίας εσωτερικής τριβής[23] φ και της γωνίας διασταλτικότητας[24] ψ του υλικού (Εικ. 3-8)

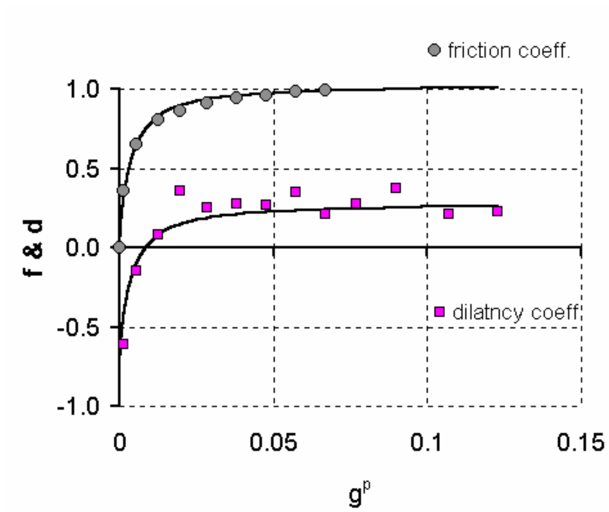
$$\tan\varphi_{eq} = \tan\varphi - \tan\psi = \sigma\tau\alpha\theta. \tag{2.22}$$



Εικ. 3-8: Συνθήκη Taylor

Αυτή η σχέση είναι γνωστή στην Εδαφομηχανική ως η συνθήκη του Taylor[25]. Αξίζει να σημειωθεί ότι τόσο ο Rowe[26,27] όσο και ο de Joselin de Jong[28] χρησιμοποίησαν την ίδια ιδέα και ονόμασαν την φ_{eq} ως την *πραγματική γωνία τριβής*[29] και την ταύτισαν με την γωνία τριβής φ_μ μεταξύ των κόκκων ενός κοκκώδους υλικού. Ενας άλλος τρόπος να δούμε την παραπάνω Εξ. (2.22)να λύσουμε ως προς

$$d_R = f_C - f_{eq} \tag{2.23}$$



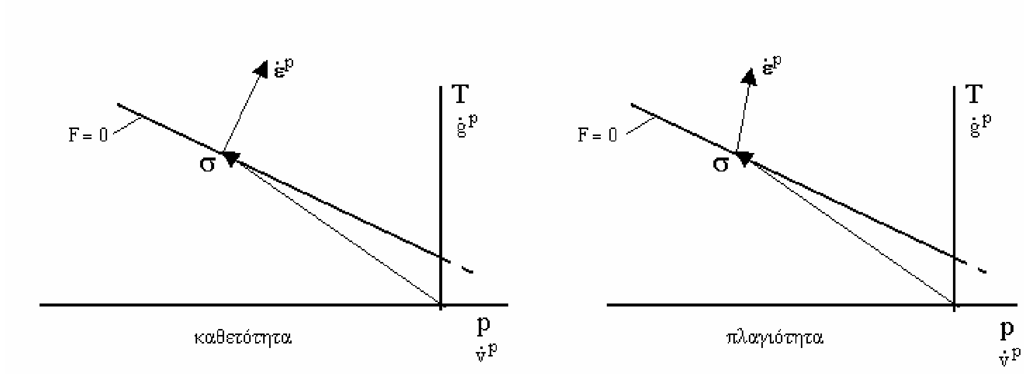
Εικ. 3-9: Υπόθεση Taylor:Συντελεστές εσωτερικής τριβής και διαστολικότητας για μία μετρίως πυκνή άμμο σε τριαξονικό πείραμα θλίψης

---

[23] Αγγλ. *friction angle*
[24] Αγγλ. *dilatancy angle*
[25] D.W. Taylor. *Fundamentals of Soil Mechanics,* John Wiley, 1948.
[26] P.W. Rowe (1962). The stress-dilatancy relation for static equilibrium of an assembly of particles in contact. *Proc. Roy. Soc.,* **269**, 500-527.
[27] P.W. Rowe (1971). Theoretical meaning and observed values of deformation parametrs for soil. *Proc. Roscoe Mem. Symp.*, Cambridge, 143-194.
[28] De Josselin de Jong (1976). Rowe's stress-dilatancy relation based on friction. Géotechnique, **26**, 527-534.
[29] Αγγλ. *true angle of friction*

Η Εξ. (2.23) αποτελεί την απλούστερη γενίκευση της *συνθήκης καθετότητος*[30] της κλασσικής θεωρίας πλαστικής ροής. Πράγματι σε ένα ισότροπο υλικό οι κύριοι άξονες της τάσεως και του ρυθμού της πλαστικής τροπής συμπίπτουν. Στην περίπτωση αυτή τόσο η συνθήκη διαρροής όσο και ο νόμος πλαστικής ροής παρίστανται στο ίδιο επίπεδο. Στο επίπεδο αυτό και σε κάθε σημείο $\sigma = (p, T)$ της *«επιφάνειας διαρροής» (yield surface)*, $F(p, T, \psi) = 0$, προσάπτουμε το αντίστοιχο διάνυσμα ρυθμού πλαστικής παραμορφώσεως, $\dot{\varepsilon}^p = (\dot{g}^p, \dot{v}^p)^T$ [31]. Οταν ισχύει η συνθήκη καθετότητος τότε το διάνυσμα $\dot{\varepsilon}^p$ είναι κάθετο στην *επιφάνεια διαρροής*. Η συνθήκη καθετότητος εκφράζεται εν προκειμένω απλά από την ισότητα συντελεστού τριβής και συντελεστού διασταλτικότητας, που οδηγεί σε μηδενικό ενεργό συντελεστή εσωτερικής τριβής,

$$d_R = f_C \Rightarrow f_{eq} = 0 \tag{2.24}$$



Εικ. 3-10: Νόμοι πλαστικής ροής

Ο νόμος πλαστικής ροής, που αντιστοιχεί στην παραπάνω συνθήκη καθετότητος, συνήθως καλείται *συνηρτημένος*[32]. Όταν το διάνυσμα ρυθμού πλαστικής παραμορφώσεως δεν είναι κάθετο προς την επιφάνεια διαρροής

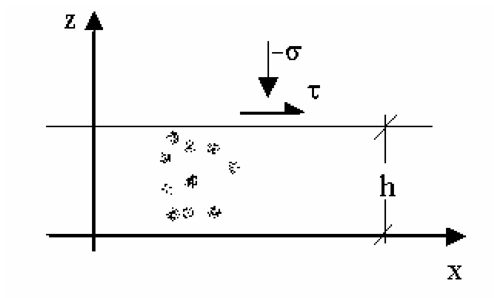
$$d_R < f_C \Rightarrow f_{eq} > 0 \tag{2.25}$$

τότε ο νόμος πλαστικής ροής καλείται *μη-συνηρτημένος*[33], αν και η συνθήκη του Taylor, Εξ. (2.23) εκφράζει μια απλή συσχέτιση μεταξύ d_R και f_C.

Ασκηση

Θεωρούμε το πρότυπο Reynolds για ένα κοκκώδες υλικό στο παράδειγμα της απλής διαστολικής διατμήσεως μιας λεπτής ζώνης διατμήσεως πάχους h υπό την επίδραση ορθής τάσεως σ και διατμητικής τάσεως τ.

[30] Αγγλ. *normality condition*
[31] Πρβλ. Ι. Βαρδουλάκη. *Τεχνική Μηχανική ΙΙ*, Κεφ. 10, Εκδ. Συμμετρία, 1999.
[32] Αγγλ. *associated flow rule*
[33] Αγγλ. *non-associated flow rule*



Εικ. 3-11: Ζώνη διατμήσεως

Θεωρούμε ότι οι μεταβολές όγκου δίδονται με ικανοποιητική ακρίβεια από την απειροστική ογκομετρική τροπή $\Delta\varepsilon = \Delta h / h$. Η ογκομετρική τροπή διαχωρίζεται σε ελαστική και πλαστική,

$$\Delta\varepsilon = \Delta\varepsilon^e + \Delta\varepsilon^p \tag{2.26}$$

Υποθέτουμε ότι η ελαστική ογκομετρική τροπή συνδέεται κατ' ευθείαν με την ορθή τάση,

$$\Delta\varepsilon^e = \frac{\Delta\sigma}{D} \ , \ D > 0 \tag{2.27}$$

Όπου D είναι το *ελαστικό οιδημετρικό μέτρο*

Παράλληλα υποθέτουμε ότι πλαστικές ογκομετρικές τροπές προκαλούνται λόγω της διαστολικότητας του κοκκώδους υλικού. Η θεωρία του Reynolds αφορά στην περίπτωση όπου η ορθή τάση είναι σταθερή. Συμφώνως προς την θεωρία αυτή έχουμε ότι

$$\sigma = const. \quad : \quad \varepsilon^p = \frac{\tau^2}{\delta} \ (\delta > 0) \tag{2.28}$$

1. Να προσδιορισθεί ο συντελεστής εσωτερικής τριβής

$$f = \hat{f}(\sigma) \ , \ f = \frac{\tau}{|\sigma|} \tag{2.29}$$

   στην περίπτωση όπου το κοκκώδες υλικό αυτό υφίσταται μία ισόχωρη απλή διάτμηση $(\varepsilon = 0)$.

2. Να σχεδιασθεί στο χώρο (τ, σ) η αντίστοιχη καμπύλη διαρροής

$$\tau + \sigma\hat{f}(\sigma) = 0 \tag{2.30}$$