

2 ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΤΟΥ ΣΥΝΕΧΟΥΣ ΜΕΣΟΥ

| | | |
|-------|--|----|
| 2 | ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΤΟΥ ΣΥΝΕΧΟΥΣ ΜΕΣΟΥ | 45 |
| 2.1 | Η Βηματική Περιγραφή κατά Lagrange | 47 |
| 2.2 | Απειροστική Παραμόρφωση | 49 |
| 2.2.1 | Γραμμικά στοιχεία | 49 |
| 2.2.2 | Επιφανειακά Στοιχεία | 50 |
| 2.2.3 | Χωρικά Στοιχεία | 51 |
| 2.3 | Η Απειροστική Περιγραφή της Εντάσεως | 52 |
| 2.4 | Απειροστικές Τροπών Επάλληλες Πεπερασμένων Τροπών | 54 |
| 2.4.1 | Ορθογώνιες παραμορφώσεις | 54 |
| 2.4.2 | Επαλληλία καθαρής απειροστικής διατμήσεως | 57 |
| 2.4.3 | Ισότροπη, γραμμική πεπερασμένη υπερ-ελαστικότητα | 62 |
| 2.4.4 | Παράδειγμα: Μονοδιάστατη οιδημετρική θλίψη | 62 |
| 2.4.5 | Απειροστικές σχέσεις τάσεων –τροπών | 64 |
| 2.5 | Η Αρχή των Δυνατών Έργων και οι Εξισώσεις Ισορροπίας | 66 |
| 2.5.1 | Ισορροπία | 66 |
| 2.5.2 | Οι εξισώσεις συνεχιζόμενης ισορροπίας | 71 |
| 2.6 | Συντηρητικά και Ακολουθητικά Φορτία | 73 |
| 2.7 | Θεωρήματα Μοναδικότητας | 75 |
| 2.8 | Θέμα | 77 |

Στο Κεφάλαιο αυτό αναπτύσσουμε σε γενικές γραμμές την απειροστική Μηχανική του παραμορφώσιμου σώματος¹, η οποία θα χρειασθεί για την διατύπωση εξελικτικών της καταστατικών θεωριών της θεωρίας της Πλαστικότητας και συναφών προβλημάτων διακλαδώσεως της ισορροπίας².

¹ M. A. Biot, *Mechanics of Incremental Deformations*, Wiley, 1965.

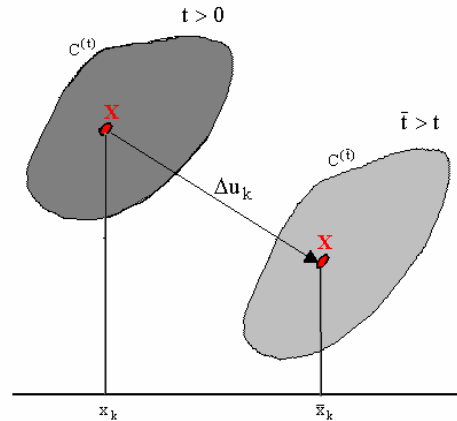
² I. Vardoulakis and J. Sulem, *Bifurcation Analysis in Geomechanics*, Sect. 3, Chapman & Hall, 1995.

2 ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΤΟΥ ΣΥΝΕΧΟΥΣ ΜΕΣΟΥ, 2009

Ιωάννης Γ. Βαρδουλάκης, Dr-Ing., Καθηγητής της Μηχανικής στο Ε.Μ. Πολυτεχνείο

Τ.Θ. 144, Παιανία 190-02, <http://geolab.mechan.ntua.gr/>, I.Vardoulakis@mechan.ntua.gr

2.1 Η Βηματική Περιγραφή κατά Lagrange



Εικ. 2-1: Απειροστική μετάβαση

Θεωρούμε ένα στερεό σώμα \mathbf{B} στην τρέχουσα απεικόνιση $C^{(t)}$, τη χρονική στιγμή $t > 0$ (Εικ. 2-1). Κατά τη λεγόμενη βηματική περιγραφή κατά Lagrange³ η τρέχουσα απεικόνιση $C^{(t)}$ χρησιμοποιείται και ως απεικόνιση αναφοράς. Το τυχόν Υ.Σ. $\mathbf{X} \in \mathbf{B}$ στην απεικόνιση $C^{(t)}$ έχει ως προς ένα σταθερό καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων τις συντεταγμένες x_i . Έστω $C^{(\bar{t})}$ η απεικόνιση του \mathbf{B} την χρονική στιγμή $\bar{t} > t$. Οι συντεταγμένες του Υ.Σ. \mathbf{X} ως προς το ίδιο σύστημα συντεταγμένων στην απεικόνιση $C^{(\bar{t})}$ συμβολίζονται με \bar{x}_i . Η παραμόρφωση $C^{(t)} \mapsto C^{(\bar{t})}$ περιγράφεται από την σχετική βαθμίδα παραμορφώσεως⁴

$$F_{ij}^t(x_k, \bar{t}) = \frac{\partial}{\partial x_j} \chi_i^{(t)}(x_k, \bar{t}) = \frac{\partial}{\partial x_j} (x_i + \Delta u_i(x_k, t)) \Rightarrow \quad (2.1)$$

$$F_{ij}^t(\bar{t}) = \delta_{ij} + \partial_j \Delta u_i \quad (2.2)$$

όπου με $\Delta u_i(x_k, t)$ συμβολίζουμε το διάνυσμα σχετικής μετατόπισης του Υ.Σ.

Θεωρούμε ότι το χρονικό βήμα, $\Delta t = \bar{t} - t$, είναι αρκετά μικρό, ώστε οι μεταβολές των διαφόρων μηχανικών μεγεθών κατά την μετάβαση $C^{(t)} \mapsto C^{(\bar{t})}$ να είναι απειροστικές. Στα πλαίσια μιας απειροστικής θεωρίας υποθέτουμε ότι η βαθμίδα της σχετικής μετατόπισης $\partial_j \Delta u_i$ είναι απειροστικό μέγεθος. Αυτό σημαίνει ότι στους διάφορους υπολογισμούς που θα κάνουμε στη συνέχεια, όροι μη-γραμμικοί ως προς $\partial_j \Delta u_i$ θα θεωρούνται αμελητέοι σε σύγκριση με γραμμικούς και μη-μηδενικούς ως προς $\partial_j \Delta u_i$ όρους.

Αντιστοίχως η σχετική βαθμίδα παραμορφώσεως που περιγράφει την απειροστική μετάβαση $C^{(t)} \mapsto C^{(\bar{t})}$ μπορεί να αναλυθεί αθροιστικά σε ένα μέρος που αντιστοιχεί σε στροφή και σε ένα μέρος που αντιστοιχεί σε τροπή,

³ Αγγλ. *updated Lagrangean formulation*.

⁴ Πρβλ. Ι. Βαρδουλάκης, *Μηχανική του Συνεχούς Μέσου*, Κεφ. 5, 2009.

$$\begin{aligned}
\bar{F}_{ij}^t &= F_{ij}^t(\bar{t}) = \delta_{ij} + \partial_j \Delta u_i \\
&= \delta_{ij} + \frac{1}{2}(\partial_j \Delta u_i - \partial_i \Delta u_j) + \frac{1}{2}(\partial_j \Delta u_i + \partial_i \Delta u_j) \\
&= \delta_{ij} + \Delta \omega_{ij} + \Delta \varepsilon_{ij}
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Στην παραπάνω έκφραση $\Delta \omega_{ij}$ και $\Delta \varepsilon_{ij}$ είναι ο απειροστικός τανυστής των στροφών και ο απειροστικός τανυστής των τροπών, αντιστοίχως

$$\begin{aligned}
\Delta \omega_{ij} &= \frac{1}{2}(\partial_j \Delta u_i - \partial_i \Delta u_j) \\
\Delta \varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2}(\partial_j \Delta u_i + \partial_i \Delta u_j)
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Παρατηρούμε ότι το διάνυσμα της σχετικής μετατοπίσεως κατά τη μετάβαση $C^{(t)} \mapsto C^{(\bar{t})}$ μπορεί να υπολογισθεί από την ταχύτητα στην απεικόνιση $C^{(t)}$

$$\Delta u_i = \bar{x}_i - x_i = \chi_i^{(t)}(x_k, \bar{t}) - x_i \approx \left. \frac{\partial \chi_i^{(t)}(x_k, \bar{t})}{\partial \bar{t}} \right|_{\bar{t}=t} (\bar{t} - t) \Rightarrow \Delta u_i \approx v_i(x_k, t) \Delta t \tag{2.5}$$

Ο ρυθμός μεταβολής της σχετικής βαθμίδας παραμορφώσεως στην περιοχή ενός ΥΣ \mathbf{X} στην τρέχουσα απεικόνιση $C^{(t)}$ του θεωρούμενου σώματος συμπίπτει με τη βαθμίδα της ταχύτητας στην απεικόνιση αυτή

$$\dot{F}_{ij}^t(x_k, t) = \frac{\partial}{\partial x_j} v_i^E(x_k, t) \tag{2.6}$$

οπότε,

$$\begin{aligned}
F_{ij}^t(x_k, \bar{t}) - F_{ij}^t(x_k, t) &\approx \dot{F}_{ij}^t(x_k, t) (\bar{t} - t) = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \Delta t \\
&= \frac{\partial}{\partial x_j} (v_i \Delta t) = \frac{\partial}{\partial x_j} \Delta u_i
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Άρα

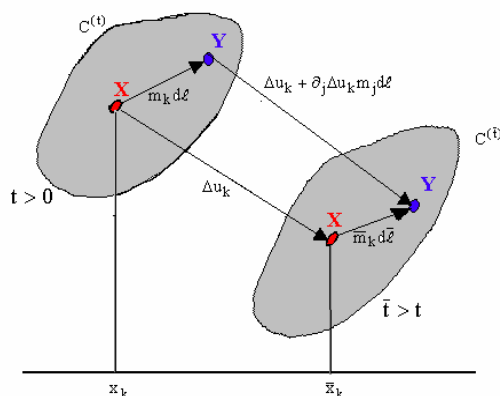
$$\partial_j \Delta u_i \approx L_{ij} \Delta t \tag{2.8}$$

Αυτό το αποτέλεσμα μας επιτρέπει να υπολογίσουμε τις απειροστικές τροπές και απειροστικές στροφές από τους αντίστοιχους τανυστές του ρυθμού παραμορφώσεως και στροβιλισμού στην απεικόνιση αναφοράς $C^{(t)}$ και αντιστρόφως

$$\begin{aligned}
\Delta \omega_{ij} \approx W_{ij} \Delta t &\Leftrightarrow W_{ij} \approx \frac{\Delta \omega_{ij}}{\Delta t} \\
\Delta \varepsilon_{ij} \approx D_{ij} \Delta t &\Leftrightarrow D_{ij} \approx \frac{\Delta \varepsilon_{ij}}{\Delta t}
\end{aligned} \tag{2.9}$$

2.2 Απειροστική Παραμόρφωση

2.2.1 Γραμμικά στοιχεία



Εικ. 2-2: Παραμόρφωση γραμμικών στοιχείων.

Έστω ένα υλικό γραμμικό στοιχείο (XY) στην απεικόνιση $C^{(t)}$ και $C^{(\bar{t})}$ αντιστοίχως

$$\begin{aligned} dx_i &= m_i d\ell, \quad d\ell = \sqrt{dx_i dx_i}, \quad m_i m_i = 1 \\ d\bar{x}_i &= \bar{m}_i d\bar{\ell}, \quad d\bar{\ell} = \sqrt{d\bar{x}_i d\bar{x}_i}, \quad \bar{m}_i \bar{m}_i = 1 \end{aligned} \quad (2.10)$$

Όπου

$$d\bar{x}_i = \bar{F}_{ij}^t dx_j, \quad d\bar{\ell} = d\ell + \Delta d\ell \quad (2.11)$$

Άρα⁵

$$\begin{aligned} d\bar{\ell} &= \sqrt{\bar{F}_{ij}^t dx_j \bar{F}_{ik}^t dx_k} = \sqrt{\bar{F}_{ij}^t \bar{F}_{ik}^t m_j m_k} d\ell^2 \\ &\approx d\ell \sqrt{(\delta_{ij} + \partial_j \Delta u_i)(\delta_{ik} + \partial_k \Delta u_i) m_j m_k} \\ &\approx d\ell \sqrt{1 + 2\Delta \varepsilon_{jk} m_j m_k} \\ &\approx (1 + \Delta \varepsilon_{jk} m_j m_k) d\ell \end{aligned} \quad (2.12)$$

και

$$\Delta d\ell = d\bar{\ell} - d\ell = \Delta \varepsilon_{jk} m_j m_k d\ell \Rightarrow \underline{\underline{\Delta \varepsilon_m = \frac{\Delta d\ell}{d\ell} = \Delta \varepsilon_{jk} m_j m_k}} \quad (2.13)$$

Ο παραπάνω τύπος μας επιτρέπει να υπολογίσουμε από τον ταυστή των απειροστικών τροπών την «ανηγμένη»⁶ παραμόρφωση $\Delta \varepsilon_m$ ενός γραμμικού στοιχείου, που στην απεικόνιση αναφοράς $C^{(t)}$ είχε την κατεύθυνση του μοναδιαίου διανύσματος m_i . Συμφώνως προς τον τύπο αυτό η $\Delta \varepsilon_m$ είναι μία τετραγωνική μορφή. Π.χ. σε δύο διαστάσεις έχουμε αναλυτικά

⁵ $\sqrt{1+2x} = 1 + x + O(x^2)$

⁶ Αρχ. Ελλ. άγομαι, πρκ. ήγμαι (ηγμένοι εισί), ανάγομαι=αναφέρομαι

$$\{\bar{m}\} = \begin{Bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{Bmatrix}, [\Delta\bar{\varepsilon}] = \begin{bmatrix} \Delta\varepsilon_{11} & \Delta\varepsilon_{12} \\ \Delta\varepsilon_{21} & \Delta\varepsilon_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow \quad (2.14)$$

$$\Delta\varepsilon_m = \{\cos \alpha \quad \sin \alpha\} \begin{bmatrix} \Delta\varepsilon_{11} & \Delta\varepsilon_{12} \\ \Delta\varepsilon_{21} & \Delta\varepsilon_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{Bmatrix} \quad (2.15)$$

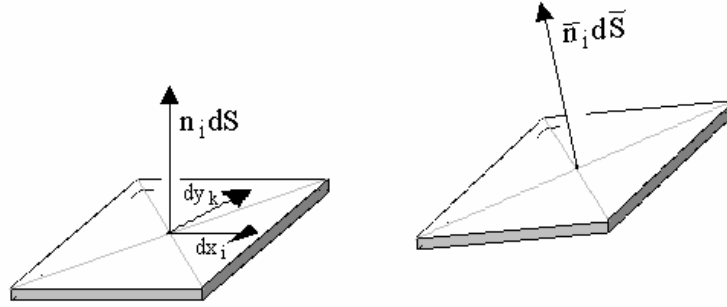
ή

$$\begin{aligned} \Delta\varepsilon_m &= \Delta\varepsilon_{11} \cos^2 \alpha + (\Delta\varepsilon_{12} + \Delta\varepsilon_{21}) \cos \alpha \sin \alpha + \Delta\varepsilon_{22} \sin^2 \alpha \\ &= \frac{1}{2}(\Delta\varepsilon_{11} + \Delta\varepsilon_{22}) + \frac{1}{2}(\Delta\varepsilon_{11} - \Delta\varepsilon_{22}) \cos 2\alpha + \Delta\varepsilon_{12} \sin 2\alpha \end{aligned} \quad (2.16)$$

Ομοίως βρίσκουμε ότι,

$$\bar{m}_i = m_i + \Delta m_i \Rightarrow \underline{\Delta m_i = m_i (\delta_{ik} - m_i m_k) \partial_l \Delta u_k} \quad (2.17)$$

2.2.2 Επιφανειακά Στοιχεία



Εικ. 2-3: Παραμόρφωση επιφανειακού στοιχείου.

Θεωρούμε δύο επιφανειακά στοιχεία στις απεικονίσεις $C^{(t)}$ και $C^{(T)}$, που αναπτύσσονται από τα υλικά γραμμικά στοιχεία dx_i , dy_k και $d\bar{x}_i$, $d\bar{y}_k$, αντιστοίχως

$$dS_i = \varepsilon_{ijk} dx_j dy_k = n_i dS \quad (n_i n_i = 1) \quad (2.18)$$

$$d\bar{S}_i = \varepsilon_{ijk} d\bar{x}_j d\bar{y}_k = \bar{n}_i d\bar{S} \quad (\bar{n}_i \bar{n}_i = 1) \quad (2.19)$$

$$dS = \sqrt{dS_i dS_i}, \quad d\bar{S} = \sqrt{d\bar{S}_i d\bar{S}_i} \quad (2.20)$$

Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} d\bar{x}_i &= F_{ij}^t dx_j \quad ; \quad dS_i = \varepsilon_{ijk} dx_j dy_k \quad ; \quad \varepsilon_{ijk} F_{jl}^t F_{km}^t = \varepsilon_{nlm} adF_{ni}^t \\ \Rightarrow d\bar{S}_i &= \varepsilon_{ijk} d\bar{x}_j d\bar{y}_k = \varepsilon_{ijk} F_{jl}^t F_{km}^t dx_l dx_m = \varepsilon_{nlm} dx_l dx_m adF_{ni}^t = adF_{ni}^t dS_n \end{aligned} \quad (2.21)$$

όπου για απειροστικές παραμορφώσεις παίρνουμε,

$$\begin{aligned} adF_{11}^t &= F_{22}^t F_{33}^t - F_{23}^t F_{32}^t \approx 1 + \partial_2 \Delta u_2 + \partial_3 \Delta u_3 \\ adF_{12}^t &= F_{32}^t F_{13}^t - F_{33}^t F_{12}^t \approx -\partial_2 \Delta u_1 \end{aligned} \quad (2.22)$$

...

και γενικώς

$$adF'_{ij} \approx (1 + \partial_k \Delta u_k) \delta_{ij} - \partial_j \Delta u_i \quad (2.23)$$

Θέτοντας

$$d\bar{S} = dS + \Delta dS \quad (2.24)$$

και

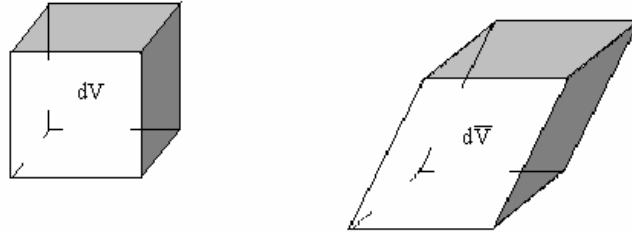
$$\bar{n}_i = n_i + \Delta n_i \quad (2.25)$$

παίρνουμε

$$\Delta dS \approx (\Delta \varepsilon_{kk} - \Delta \varepsilon_{\ell n} n_\ell n_m) dS \quad (2.26)$$

$$\Delta n_i = n_k (n_i n_\ell - \delta_{i\ell}) \partial_\ell \Delta u_k \quad (2.27)$$

2.2.3 Χωρικά Στοιχεία



Εικ. 2-4: Παραμόρφωση χωρικών στοιχείων.

Ομοίως για τα χωρικά στοιχεία στις απεικονίσεις $C^{(t)}$ και $C^{(\bar{t})}$ έχουμε

$$dV = \varepsilon_{ijk} dx_i dy_j dz_k \quad (2.28)$$

$$d\bar{V} = \varepsilon_{ijk} d\bar{x}_i d\bar{y}_j d\bar{z}_k \quad (2.29)$$

Επειδή

$$d\bar{V} = J' dV, \quad J' = \det[\bar{F}'(\bar{t})] \approx 1 + \partial_k \Delta u_k = 1 + \Delta \varepsilon_{kk} \quad (2.30)$$

παίρνουμε τελικά το γνωστό από την Τεχνική Μηχανική τύπο για την αλλαγή του στοιχειώδους όγκου

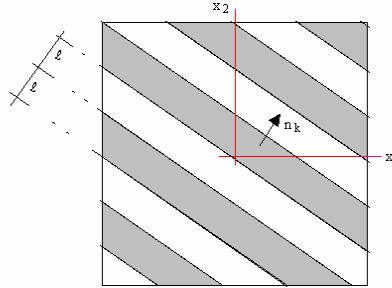
$$\Delta d\bar{V} = d\bar{V} - dV = \Delta \varepsilon_{kk} dV \Rightarrow \frac{\Delta dV}{dV} = \Delta \varepsilon_{kk} \quad (2.31)$$

Άσκηση

Δίδεται το πεδίο μετατοπίσεων

$$\Delta u_i = A_i \sin(qn_k x_k) \quad (i=1,2), \quad \Delta u_3 = 0 \quad (2.32)$$

που αντιστοιχεί στο εικονιζόμενο μοτίβο (Εικ. 2-5). Να υπολογισθεί και να σχολιασθεί η κατανομή της συναρτήσεως $\Delta \varepsilon_{kk} = \Theta(x_i)$ για διάφορες τιμές των παραμέτρων A_i και qn_k .

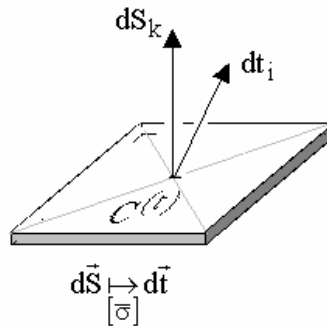


Εικ. 2-5: Κυλίομενο μοτίβο

2.3 Η Απειροστική Περιγραφή της Εντάσεως

Στη Μηχανική του Συνεχούς Μέσου⁷ ορίζουμε διάφορους τανυστές τάσεων που μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε για την περιγραφή της εντατικής καταστάσεως στην τρέχουσα απεικόνιση $C^{(t)}$ ενός σώματος \mathbf{B} . Ανάμεσα σ' αυτούς τους τανυστές ξεχωρίσαμε τον τανυστή Cauchy, ο οποίος απεικονίζει το διάνυσμα $d\vec{S}$, της στοιχειώδους προσανατολισμένης υλικής επιφάνειας στην τρέχουσα απεικόνιση του σώματος $C^{(t)}$, πάνω στο στοιχειώδη ελκυστή $d\vec{t}$ στην ίδια απεικόνιση του σώματος (Εικ. 2-6),

$$dt_i = \sigma_{ki} dS_k \quad (2.33)$$



Εικ. 2-6: Ο τανυστής των τάσεων κατά Cauchy.

Ομοίως ορίζουμε τη τάση κατά Cauchy στην απεικόνιση $C^{(\bar{t})}$

$$d\bar{t}_i = \bar{\sigma}_{ki} d\bar{S}_k \quad (2.34)$$

Η ένταση στην απεικόνιση $C^{(\bar{t})}$ μπορεί να περιγραφεί και με τη βοήθεια ενός ονομαστικού τανυστή π . Ο τανυστής αυτός καλείται σχετικός 1. Piola-Kirchhoff και αναφέρεται στην τρέχουσα απεικόνιση $C^{(t)}$. Έστω

$$dS_k \xrightarrow{[\bar{\pi}]} d\bar{t}_k \quad (2.35)$$

ή

$$d\bar{t}_i = \pi_{ik} dS_k \quad (2.36)$$

⁷ Πρβλ. Ι. Βαρδουλάκης, *Μηχανική του Συνεχούς Μέσου*, Κεφ. 8, 2008.

Από τις Εξ. (2.34), (2.36) και (2.21) παίρνουμε,

$$d\bar{t}_i = \bar{\sigma}_{ki} d\bar{S}_k = \bar{\sigma}_{ki} adF'_{jk} dS_j \Rightarrow \pi_{ij} = \bar{\sigma}_{ki} adF'_{jk} \quad (2.37)$$

Αν τώρα δεχθούμε ότι για μια απειροστική μετάβαση $C^{(t)} \rightarrow C^{(\bar{t})}$ η τάση κατά Cauchy μεταβάλλεται κατά

$$\Delta\sigma_{ij} = \bar{\sigma}_{ij} - \sigma_{ij} \approx \dot{\sigma}_{ij}(x_k, t)\Delta t \quad (2.38)$$

όπου με $\dot{\sigma}_{ij}$ συμβολίζουμε και πάλι την υλική χρονική παράγωγο της τάσεως κατά Cauchy,

$$\dot{\sigma}_{ij} = \frac{D\sigma_{ij}}{Dt} = \frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial t} + v_k \frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_k} \quad (2.39)$$

Αντιστοίχως έχουμε

$$\Delta\pi_{ij} = \pi_{ij} - \sigma_{ij} \approx \dot{\pi}_{ij}(x_k, t)\Delta t \quad (2.40)$$

Από τις Εξ. (2.37) -, (2.40) και (2.23) παίρνουμε

$$\begin{aligned} \Delta\pi_{ij} &= \pi_{ij} - \sigma_{ij} = \bar{\sigma}_{ki} adF'_{jk} - \sigma_{ij} \\ &= (\sigma_{ki} + \Delta\sigma_{ki}) \left((1 + \partial_k \Delta u_k) \delta_{jk} - \partial_k \Delta u_j \right) - \sigma_{ij} \\ &= \sigma_{ji} + \Delta\sigma_{ji} + \left(\partial_k \Delta u_k \delta_{jk} - \partial_k \Delta u_j \right) \sigma_{ki} - \sigma_{ij} \\ &= \Delta\sigma_{ji} + \partial_k \Delta u_k \sigma_{ji} - \sigma_{ki} \partial_k \Delta u_j \end{aligned} \quad (2.41)$$

Αν κάνουμε και πάλι χρήση της συμμετρίας του ταυνοστή των τάσεων κατά Cauchy η Εξ. (2.41) γράφεται,

$$\Delta\pi_{ij} = \Delta\sigma_{ij} + \sigma_{ij} \partial_k \Delta u_k - \sigma_{ik} \partial_k \Delta u_j \quad (2.42)$$

Όπως ήδη αναφέραμε η μεταβολή $\Delta\sigma_{ij}$ δίδεται από την υλική παράγωγο της τάσεως κατά Cauchy, Εξ. (2.38), που με τη σειρά της μπορεί να συνδεθεί με την κατά Jaumann παράγωγο και μεταβολή

$$\dot{\Delta}\sigma_{ij} \approx \dot{\sigma}_{ij} \Delta t \quad (2.43)$$

$$\dot{\sigma}_{ij} = \overset{\circ}{\sigma}_{ij} + W_{ik} \sigma_{kj} - \sigma_{ik} W_{kj} \Rightarrow \Delta\sigma_{ij} = \overset{\circ}{\Delta}\sigma_{ij} + \Delta\omega_{ik} \sigma_{kj} - \sigma_{ik} \Delta\omega_{kj} \quad (2.44)$$

Άρα

$$\Delta\pi_{ij} = \overset{\circ}{\Delta}\sigma_{ij} + \Delta\omega_{ik} \sigma_{kj} - \sigma_{ik} \Delta\epsilon_{kj} - \sigma_{ik} \Delta\epsilon_{kk} \quad (2.45)$$

Τέλος, η τάση κατά Kirchhoff στις απεικονίσεις $C^{(t)}$ και $C^{(\bar{t})}$ ορίζεται ως ακολούθως

$$T_{ij} = J\sigma_{ij}, \quad \bar{T}_{ij} = \bar{J}\bar{\sigma}_{ij} \quad (2.46)$$

όπου οι ιακωβιανές αναφέρονται στην παραμόρφωση ως προς την «αρχική» απεικόνιση $C^{(0)}$,

$$\bar{J} = \det[\bar{F}(\bar{t})] = \det([\bar{F}'(\bar{t})][\bar{F}(t)]] = J^t J \approx (1 + \Delta\epsilon_{kk})J \quad (2.47)$$

Άρα

$$\begin{aligned}\bar{T}_{ij} &= J' J \bar{\sigma}_{ij} \approx J(1 + \Delta \varepsilon_{kk})(\sigma_{ij} + \Delta \sigma_{ij}) \\ &\approx T_{ij} + J \Delta \sigma_{ij} + T_{ij} \Delta \varepsilon_{kk}\end{aligned}\quad (2.48)$$

Και

$$\Delta T_{ij} = \bar{T}_{ij} - T_{ij} = J \Delta \sigma_{ij} + T_{ij} \Delta \varepsilon_{kk} \quad (2.49)$$

Στα πλαίσια της βηματικής κατά Lagrange περιγραφής επιλέγουμε τη τρέχουσα απεικόνιση ως απεικόνιση αναφοράς, $C^{(0)} \equiv C^{(t)}$, οπότε

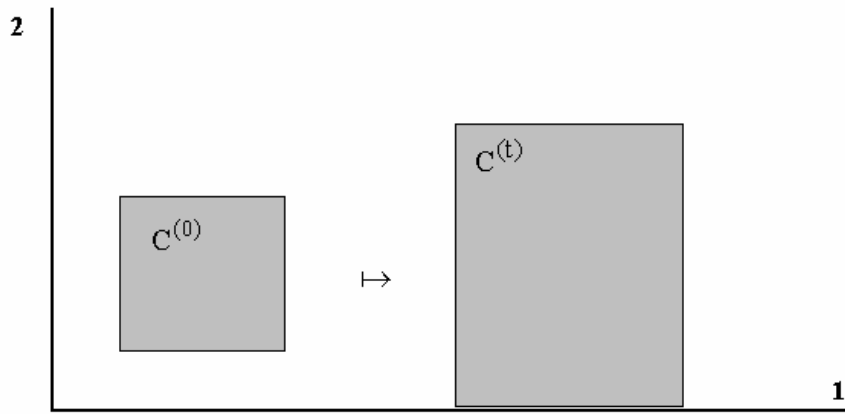
$$T_{ij}^t = T_{ij}^t(t) = J^{-1} T_{ij} = \sigma_{ij}, \quad \bar{T}_{ij}^t = T_{ij}^t(\bar{t}) = \bar{J}^{-1} \bar{T}_{ij} = J^t \sigma_{ij} \quad (2.50)$$

και

$$\Delta T_{ij}^t = \bar{T}_{ij}^t - T_{ij}^t = \Delta \sigma_{ij} + \sigma_{ij} \Delta \varepsilon_{kk} \quad (2.51)$$

2.4 Απειροστικές Τροπών Επάλληλες Πεπερασμένων Τροπών⁸

2.4.1 Ορθογώνιες παραμορφώσεις



Εικ. 2-7: Ορθογώνια παραμόρφωση

Θεωρούμε μία πεπερασμένη ορθογώνια παραμόρφωση $C^{(0)} \mapsto C^{(t)}$, που περιγράφεται από τις παρακάτω εξισώσεις κινήσεως,

$$x_i = \xi_i + a_{(i)} \xi_i, \quad a_i = \hat{a}_i(t), \quad \hat{a}(0) = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \quad (2.52)$$

$$\Leftrightarrow \xi_i = \frac{x_i}{1 + a_{(i)}} \quad (2.53)$$

Κατά την παραμόρφωση αυτή οι κύριοι άξονες του (αριστερού) Cauchy-Green τανυστή των τροπών παραμένουν σταθεροί, οπότε μπορούμε εύκολα στο κύριο αυτό σύστημα αξόνων να υπολογίσουμε τον (αριστερό) λογαριθμικό τανυστή των τροπών κατά Hencky,

$$\lambda^\ell = \ln V, \quad V^2 = \mathbf{F} \mathbf{F}^T \quad (2.54)$$

⁸ C. Truesdell and W. Noll. *The Non-Linear Field Theories of Mechanics*, Encyclopaedia of Physics, Vol. III/3, Sect. 68bis: Infinitesimal strain superimposed upon a given strain, Springer, 1965. M.A. Biot, *Mechanics of Incremental Deformations*, Wiley, 1965.

$$[\bar{\lambda}^{\ell}] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ln(1+a_1) & 0 & 0 \\ 0 & \ln(1+a_2) & 0 \\ 0 & 0 & \ln(1+a_3) \end{bmatrix} \quad (2.55)$$

Μία κλάση ελαστικών υλικών, τα λεγόμενα *υπερ-ελαστικά υλικά*, ορίζεται αν υποθέσουμε ότι η ειδική εσωτερική ενέργειά τους είναι μία συνάρτηση των κύριων λογαριθμικών τροπών,

$$e = \hat{e}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \quad (2.56)$$

Ας θεωρήσουμε τώρα μια επέκταση της ορθογωνικής παραμορφώσεως $C^{(t)} \rightarrow C^{(T)}$ ($T = t + \Delta t$), έτσι ώστε

$$\bar{\lambda}_i = \lambda_i + \Delta\lambda_i \quad (2.57)$$

και

$$\begin{aligned} \Delta\lambda_i &= \ln(1+\bar{a}_i) - \ln(1+a_i) = \ln \frac{1+\bar{a}_i}{1+a_{(i)}} \\ &= \ln \left(1 + \frac{\Delta a_i}{1+a_{(i)}} \right) \approx \frac{\Delta a_i}{1+a_{(i)}} \end{aligned} \quad (2.58)$$

Λαμβάνοντας τώρα υπ' όψιν ότι

$$\begin{aligned} x_i &= \xi_i + a_{(i)}\xi_i \\ \bar{x}_i &= \xi_i + \bar{a}_{(i)}\xi_i \end{aligned} \Rightarrow \Delta u_i = \bar{x}_i - x_i = \Delta a_i \xi_i = \Delta a_i \frac{x_i}{1+a_{(i)}} \quad (2.59)$$

Και

$$\Delta \varepsilon_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \Delta u_i = \frac{\Delta a_i}{1+a_{(i)}}, \quad \Delta \varepsilon_i \approx D_{i(i)} \Delta t \quad (2.60)$$

τελικά παίρνουμε την παρακάτω ισότητα μεταξύ των απειροστικών τροπών,

$$\Delta\lambda_i = \Delta \varepsilon_i \quad (2.61)$$

Στην περίπτωση που εξετάζουμε η παραμόρφωση υποτίθεται ότι είναι ισόθερμη, οπότε από την ενεργειακή εξίσωση παίρνουμε επίσης ότι η μεταβολή της εσωτερικής ενέργειας ισούται με την ισχύ των εσωτερικών δυνάμεων,

$$\rho \dot{e} = P \Rightarrow \rho \Delta e = \sigma_i \Delta \varepsilon_i \quad (2.62)$$

ή

$$\sigma_i \Delta \varepsilon_i = \rho \frac{\partial \hat{e}}{\partial \lambda_i} \Delta \lambda_i \Rightarrow \sigma_i = \rho \frac{\partial \hat{e}}{\partial \lambda_i} \quad (2.63)$$

Αν κάνουμε χρήση του ορισμού της τάσεως Kirchhoff,

$$T_i = J \sigma_i = \frac{\rho^{(0)}}{\rho} \sigma_i \quad (2.64)$$

τότε παίρνουμε την εξής καταστατική εξίσωση

$$T_i = \rho^{(0)} \frac{\partial \hat{e}}{\partial \lambda_i} \quad (2.65)$$

Η σχέση αυτή εξασφαλίζει την ομοαξονικότητα των τανυστών \mathbf{T} και $\boldsymbol{\lambda}^\ell$, οπότε οι τανυστές αυτοί είναι ενεργειακώς συζυγείς. Άρα για τη θεωρούμενη επέκταση της ορθογώνιας παραμορφώσεως μπορούμε να καταγράψουμε την παρακάτω ενεργειακώς συνεπή καταστατική σχέση για τις μεταβολές των κυρίων συνιστωσών της τάσεως κατά Kirchhoff,

$$\Delta T_i = \frac{\partial T_i}{\partial \lambda_k} \Delta \lambda_k = \frac{\partial^2 \hat{e}}{\partial \lambda_i \partial \lambda_k} \Delta \varepsilon_i \quad (2.66)$$

Η παραπάνω απειροστική σχέση μπορεί να γραφεί και υπό μορφή ρυθμών

$$\begin{aligned} \dot{T}_{11} &= R_{1111} \dot{\varepsilon}_{11} + R_{1122} \dot{\varepsilon}_{22} + R_{1133} \dot{\varepsilon}_{33} \\ \dot{T}_{22} &= R_{2211} \dot{\varepsilon}_{11} + R_{2222} \dot{\varepsilon}_{22} + R_{2233} \dot{\varepsilon}_{33} \\ \dot{T}_{33} &= R_{3311} \dot{\varepsilon}_{11} + R_{3322} \dot{\varepsilon}_{22} + R_{3333} \dot{\varepsilon}_{33} \\ \dot{T}_{12} &= \dot{T}_{21} = \dot{\varepsilon}_{12} = \dot{\varepsilon}_{21} = 0 \end{aligned} \quad (2.67)$$

όπου

$$\begin{aligned} R_{1111} &= \frac{\partial^2 \hat{e}}{\partial \lambda_1 \partial \lambda_1} \\ R_{1122} &= R_{2211} = \frac{\partial^2 \hat{e}}{\partial \lambda_1 \partial \lambda_2} = \frac{\partial^2 \hat{e}}{\partial \lambda_2 \partial \lambda_1} \\ R_{1133} &= R_{3311} = \frac{\partial^2 \hat{e}}{\partial \lambda_1 \partial \lambda_3}, \dots (\lambda_{11} = \lambda_1, \dots) \end{aligned} \quad (2.68)$$

Επειδή δε η εν προκειμένω επέκταση της ορθογώνιας παραμορφώσεως είναι απαλλαγμένη στροφών ($W_{ij} = 0$), έπεται ότι η υλική παράγωγος του τανυστή των τάσεων ταυτίζεται με την αντικειμενική κατά Jaumann παράγωγό του,

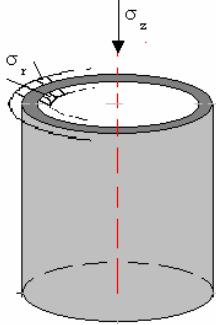
$$\dot{T}_{ij} = \overset{\circ}{T}_{ij} \quad (2.69)$$

ή

$$C^{(t)} \mapsto C^{(t+\Delta t)} : \Delta T_{ij} = \overset{\circ}{\Delta} T_{ij} \quad (2.70)$$

Παρατήρηση

Η παραπάνω διαδικασία ορθογώνιας παραμορφώσεως μπορεί να υλοποιηθεί στο εργαστήριο, αν θεωρήσουμε π.χ. την περίπτωση τριαξονικής θλίψης ή εφελκυσμού ενός κυλινδρικού δοκιμίου. Για λόγους που θα εξηγήσουμε στο αμέσως επόμενο κεφάλαιο, θεωρούμε ως παράδειγμα μια διάταξη που επιτρέπει την τριαξονική, αξονοσυμμετρική καταπόνηση ενός σωληνωτού δοκιμίου (Εικ. 2-8).



Εικ. 2-8: Σωληνωτό δοκίμιο υποκείμενο σε αξονοσυμμετρική θλίψη ή εφελκυσμό

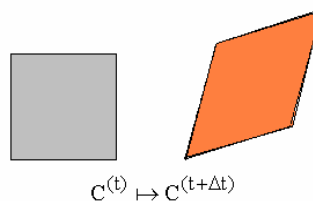
Στην περίπτωση αυτή η ορθογώνια παραμόρφωση έγκειται στο ότι το ορθό κοίλο κυλινδρικό δοκίμιο παραμένει ορθός κύλινδρος και μετά την καταπόνηση. Αυτό εξασφαλίζεται (για ισότροπο υλικό) από την αξονοσυμμετρική καταπόνηση. Έτσι σε κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων με άξονα z το γεωμετρικό άξονα του δοκιμίου έχουμε την εξής εντατική κατάσταση που περιγράφει τριαξονική, αξονοσυμμετρική θλίψη (ή εφελκυσμό),

$$[\bar{\sigma}]_{(r,\theta,z)} = \begin{bmatrix} \sigma_{rr} & \sigma_{r\theta} & \sigma_{rz} \\ \sigma_{\theta r} & \sigma_{\theta\theta} & \sigma_{\theta z} \\ \sigma_{zr} & \sigma_{z\theta} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_r & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_\theta & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix}, \quad \sigma_\theta = \sigma_r = -p \quad (2.71)$$

Η ισότητα της ακτινικής τάσεως με την εφαπτομενική τάση εξασφαλίζεται με το να εφαρμόζουμε στην εσωτερική και την εξωτερική κυλινδρική επιφάνεια την ίδια παράπλευρη πίεση p .

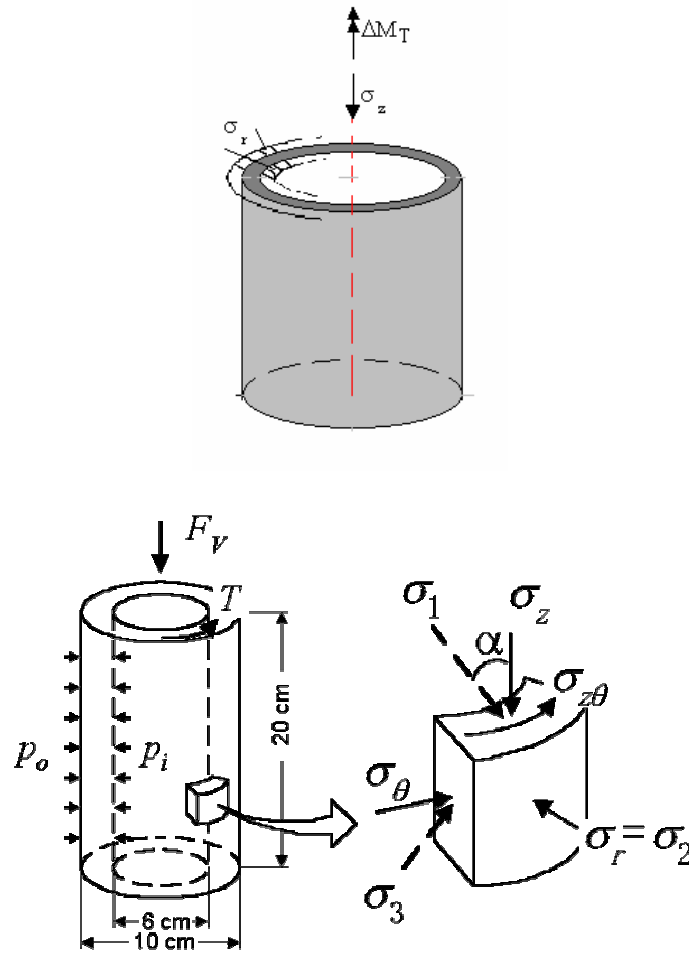
2.4.2 Επαλληλία καθαρής απειροστικής διατμήσεως

Όπως πολλαπλώς αναφέραμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, κατά τη διάρκεια μιας ορθογώνιας παραμορφώσεως οι κύριοι άξονες της πραγματικής τάσεως (κατά Cauchy ή κατά Kirchhoff) και της τροπής (κατά Cauchy-Green ή κατά Hencky) παραμένουν σταθεροί στο χώρο, οπότε η θεωρητική μελέτη της παραμορφώσεως αυτής ή το αντίστοιχο πείραμα στο εργαστήριο δε μας επιτρέπουν να μελετήσουμε την συμπεριφορά του υλικού, στην περίπτωση που έχουμε στροφή των κυρίων αξόνων της εντάσεως και της παραμορφώσεως. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί, αν στην ορθογώνια παραμόρφωση προσθέσουμε μία απειροστική καθαρή διατμητική παραμόρφωση (Εικ. 2-9).



Εικ. 2-9: Απειροστική διατμητική μετάβαση.

Στο πείραμα θλίψεως ή εφελκυσμού κοίλου κυλίνδρου, που αναφέραμε πιο πάνω, αυτό γίνεται με το να πραγματοποιήσουμε μετά την ορθογώνια παραμόρφωση του δοκιμίου μία απειροστική στρέψη κατά τον άξονα αυτού.



Εικ. 2-10: Απειροστική στρέψη σωληνωτού δοκιμίου.

Χάρην απλότητας επιστρέφουμε τώρα σε μία καρτεσιανή περιγραφή της διαδικασίας. Έτσι θεωρούμε μια επέκταση της παραμορφώσεως $C^{(t)} \rightarrow C^{(T)}$ που περιγράφεται από τις εξής σχέσεις,

$$\begin{aligned}\bar{x}_1 &= x_1 + \frac{1}{2} \Delta \gamma x_2 \\ \bar{x}_2 &= x_2 + \frac{1}{2} \Delta \gamma x_1 \\ \bar{x}_3 &= x_3\end{aligned}\tag{2.72}$$

και που αντιστοιχεί σε επάλληλη καθαρή διάτμηση. Η παραμόρφωση αυτή γίνεται στη συνέχεια της ορθογώνιας παραμορφώσεως που αναλύσαμε πιο πάνω, οπότε

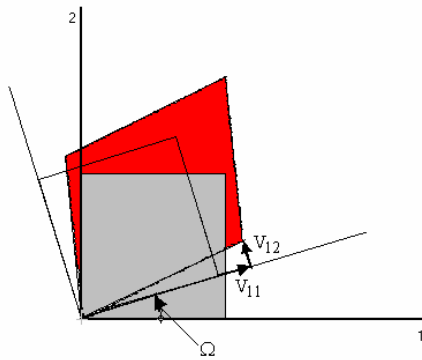
$$\begin{aligned}\bar{x}_1 &= (1 + a_1) \xi_1 + \frac{1}{2} \Delta \gamma (1 + a_2) \xi_2 \\ \bar{x}_i &= \chi_i(\xi_k, t + \Delta t) : \bar{x}_2 = \frac{1}{2} \Delta \gamma (1 + a_1) \xi_1 + (1 + a_2) \xi_2 \\ \bar{x}_3 &= (1 + a_3) \xi_3\end{aligned}\tag{2.73}$$

Από την περιγραφή αυτή της κινήσεως υπολογίζουμε την αντίστοιχη βαθμίδα παραμορφώσεως,

$$C^{(t)} \mapsto C^{(\bar{t})} : \bar{F}_{ij} = \frac{\partial}{\partial \xi_j} \chi_i(\xi_k, \bar{t}) \quad (2.74)$$

όπου

$$[\bar{F}(\bar{t})] = \begin{bmatrix} 1+a_1 & \frac{1}{2}(1+a_2)\Delta\gamma & 0 \\ \frac{1}{2}(1+a_1)\Delta\gamma & 1+a_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1+a_3 \end{bmatrix} \quad (2.75)$$



Εικ. 2-11: Αριστερή πολική ανάλυση της παραμορφώσεως, Εξ. (2.75)

Πραγματοποιούμε τώρα την αριστερή πολική ανάλυση

$$\mathbf{F} = \mathbf{V}\mathbf{R} \quad (2.76)$$

ή

$$[\bar{F}(\bar{t})] = \begin{bmatrix} V_{11} & V_{12} & 0 \\ V_{12} & V_{22} & 0 \\ 0 & 0 & V_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \Omega & \sin \Omega & 0 \\ -\sin \Omega & \cos \Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.77)$$

Οπότε απαιτώντας όπως ο τανυστής \mathbf{V} είναι συμμετρικός παίρνουμε κατ' αρχήν,

$$\tan \Omega = -\frac{a_1 - a_2}{2 + a_1 + a_2} \frac{1}{2} \Delta\gamma \quad (2.78)$$

και

$$\begin{aligned} V_{11} &= (1+a_1) \cos \Omega + \frac{1}{2}(1+a_2)\Delta\gamma \sin \Omega \\ V_{12} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}((1+a_1) + (1+a_2))\Delta\gamma \cos \Omega - (a_1 - a_2) \sin \Omega \right) \\ V_{22} &= -\frac{1}{2}(1+a_1)\Delta\gamma \sin \Omega + (1+a_2) \cos \Omega \end{aligned} \quad (2.79)$$

Άσκηση

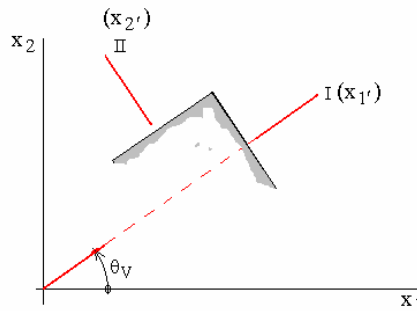
Να επαληθευθούν οι παραπάνω εκφράσεις για τις συνιστώσες του \mathbf{V} .

Στην περίπτωση απειροστικής διατμήσεως, $|\Delta\gamma| \ll 1$, έχουμε τις εξής προσεγγιστικές εκφράσεις:

$$\Omega \approx -\frac{a_1 - a_2}{2 + a_1 + a_2} \frac{1}{2} \Delta\gamma, \quad \cos \Omega \approx 1, \quad |\sin \Omega| \ll 1 \quad (2.80)$$

$$\begin{aligned} V_{11} &\approx 1 + a_1 \\ V_{22} &\approx 1 + a_2 \end{aligned} \quad (2.81)$$

$$V_{12} \approx \frac{(1 + a_1)^2 + (1 + a_2)^2}{2 + a_1 + a_2} \frac{1}{2} \Delta\gamma$$



Εικ. 2-12: Μετασχηματισμός σε κύριους άξονες.

Από τις εκφράσεις αυτές μπορούμε να υπολογίσουμε τις κύριες τροπές του \mathbf{V} και τις κατευθύνσεις των κυρίων αξόνων του (Εικ. 2-12),

$$V_{I,II} = V_{11} \cos^2 \theta_V + V_{22} \sin^2 \theta_V + V_{12} \sin 2\theta_V \quad (2.82)$$

Όπου

$$\tan 2\theta_V = \frac{2V_{12}}{V_{11} - V_{22}} \quad (2.83)$$

Με την παραπάνω υπόθεση περί απειροστικής διάτμησης ($|\Delta\gamma| \ll 1$) παίρνουμε τελικώς,

$$\begin{aligned} V_I &\approx V_{11} \approx 1 + a_1 \\ V_{II} &\approx V_{22} \approx 1 + a_2 \end{aligned} \quad (2.84)$$

$$\theta_V \approx \frac{(1 + a_1)^2 + (1 + a_2)^2}{(1 + a_1)^2 - (1 + a_2)^2} \frac{1}{2} \Delta\gamma \quad (2.85)$$

Κάνουμε τώρα την παραδοχή ότι το υλικό είναι ισότροπο και κάτω από πεπερασμένες παραμορφώσεις. Αυτή η υπόθεση μας επιτρέπει να δεχθούμε ότι οι κύριοι άξονες της πραγματικής τάσεως (και συνεπώς της τάσεως κατά Kirchhoff) συμπίπτουν με εκείνους της τροπής \mathbf{V} (και συνεπώς με εκείνους της αριστερής λογαριθμικής τροπής κατά Hencky), άρα οι καταστατικές σχέσεις ισχύουν για τις κύριες κατευθύνσεις, οπότε

$$\begin{aligned} T_{11} &\approx T_I = \rho^{(0)} \frac{\partial \hat{e}}{\partial \lambda_I} \\ T_{22} &\approx T_{II} = \rho^{(0)} \frac{\partial \hat{e}}{\partial \lambda_{II}} \end{aligned} \quad (2.86)$$

Από τις γενικές σχέσεις μετασχηματισμού

$$\begin{aligned} T_{11} &= \frac{1}{2}(T_{I'1'} + T_{2'2'}) + \frac{1}{2}(T_{I'1'} - T_{2'2'}) \cos 2\theta + T_{I'2'} \sin 2\theta \\ T_{12} &= -\frac{1}{2}(T_{I'1'} - T_{2'2'}) \sin 2\theta + T_{I'2'} \cos 2\theta \end{aligned} \quad (2.87)$$

και για

$$\begin{aligned} T_{I'1'} &= T_I \\ T_{2'2'} &= T_{II} \\ T_{I'2'} &= 0 \\ \theta &= -\theta_V \end{aligned} \quad (2.88)$$

παίρνουμε τελικά ότι,

$$\Delta T_{12} = T_{12} = (T_{11} - T_{22}) \frac{(1+a_1)^2 + (1+a_2)^2}{(1+a_1)^2 - (1+a_2)^2} \frac{1}{2} \Delta \gamma \quad (2.89)$$

Εν προκειμένω η μεταβολή κατά Jaumann της διαμητικής τάσεως δίδεται από την σχέση

$$\dot{\Delta} T_{12} = \Delta T_{12} - (T_{11} - T_{22}) \Delta \omega \quad (2.90)$$

όπου

$$\Delta \omega = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Delta u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \Delta u_1}{\partial x_2} \right) \quad (2.91)$$

Στη θεωρούμενη απειροστική μετάβαση $C^{(t)} \mapsto C^{(t+\Delta t)}$ η στροφή στερεού σώματος είναι μηδέν (γιατί;)

$$\Delta \omega = 0 \quad (2.92)$$

οπότε τελικά παίρνουμε⁹,

$$\dot{\Delta} T_{12} = R_{1212} \Delta \varepsilon_{12} + R_{1221} \Delta \varepsilon_{21} \quad (2.93)$$

όπου

$$R_{1212} = R_{1221} = R_{2112} = R_{2121} = \frac{1}{2} (T_{11} - T_{22}) \frac{(1+a_1)^2 + (1+a_2)^2}{(1+a_1)^2 - (1+a_2)^2} \quad (2.94)$$

⁹ R. Hill. Aspects of Invariance in Solid Mechanics. In: Advances in Applied Mechanics, Vol. 18, Academic Press, p-1-75, 1978.

2.4.3 Ισότροπη, γραμμική πεπερασμένη υπερ-ελαστικότητα

Θεωρούμε ως παράδειγμα την ειδική περίπτωση όπου η καταστατική σχέση για την ειδική εσωτερική ενέργεια ως συνάρτηση των κύριων λογαριθμικών τροπών έχει την εξής μορφή¹⁰,

$$\rho^{(0)}e = G \left((\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2) + \frac{\nu}{1-2\nu} (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^2 \right) \quad (2.95)$$

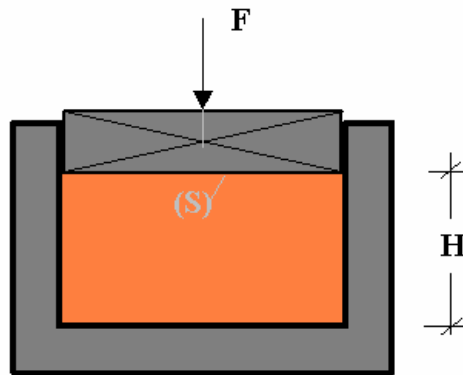
όπου $G, \nu = \text{σταθ.}$. Οπότε σε κύριους άξονες η ορθογώνια παραμόρφωση $C^{(0)} \mapsto C^{(t)}$ περιγράφεται από τις παρακάτω γραμμικές σχέσεις μεταξύ της τάσης κατά Kirchhoff και της πεπερασμένης αριστερής λογαριθμικής τροπής κατά Hencky, οι οποίες μοιάζουν τυπικά με το νόμο του Hooke της γραμμικής θεωρίας της Ελαστικότητας:

$$T_i = \rho^{(0)} \frac{\partial \hat{e}}{\partial \lambda_i} = 2G \left(\lambda_i + \frac{\nu}{1-2\nu} (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) \right) \quad (2.96)$$

Από τις καταστατικές αυτές εκφράσεις για το τανυστή των τάσεων κατά Kirchhoff μπορούμε να υπολογίσουμε τις κύριες τάσεις κατά Cauchy

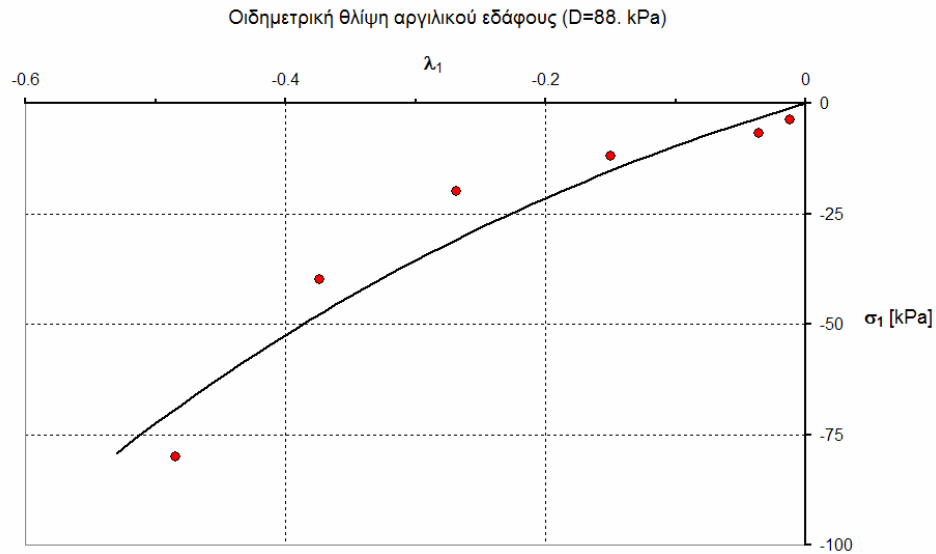
$$\sigma_i = J^{-1} T_i = \exp(-(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)) T_i \quad (2.97)$$

2.4.4 Παράδειγμα: Μονοδιάστατη οιδημετρική θλίψη



Εικ. 2-13: Πειραματική διάταξη μονοδιάστατης οιδημετρικής θλίψης

¹⁰ V. Tvergaard, A. Needleman and K.K. Lo (1981). Flow localization in the plane strain tensile test. J. Mech. Phys. Solids, 29, 115-142.



Εικ. 2-14: Διάγραμμα τάσεων τροπών συμφώνως προς την καταστατική υπόθεση, Εξ. (2.100)

Στη περίπτωση αυτή έχουμε τους εξής ορισμούς για την πραγματική τάση και τη λογαριθμική τροπή

$$\sigma_1 = -\frac{F}{S} \leq 0 \tag{2.98}$$

$$\lambda_1 = \ln\left(\frac{H}{H_0}\right) \leq 0, \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \tag{2.99}$$

όπου $S = \text{σταθ.}$ η επιφάνεια της διατομής το δοκιμίου, H_0 και H το αρχικό και τρέχον ύψος αυτού.

Συμφώνως προς την παραπάνω Εξ. (2.97) της πεπερασμένη ισότροπης, υπερ-ελαστικότητας, η τάση κατά Cauchy και η λογαριθμική τροπή στην προκειμένη περίπτωση συνδέονται μεταξύ τους μη-γραμμικά,

$$\sigma_1 = D\lambda_1 e^{-\lambda_1} \tag{2.100}$$

Παρατήρηση

Η παραπάνω γραμμική, ισότροπη σχέση Εξ. (2.96) μεταξύ των τανυστών Hencky (λογ. τροπές) και Kirchhoff, προέρχεται από την υπόθεση ότι η ειδική εσωτερική ενέργεια είναι ισότροπη συνάρτηση της λογαριθμικής τροπής. Γενικώς για ανισότροπα υπερ-ελαστικά υλικά αυτή η υπόθεση δεν μπορεί να γίνει. Για τον λόγο αυτό θεωρούμε συνήθως ένα άλλο ζεύγος συζυγών τανυστών, τους Green και 2. Piola-Kirchhof. Καμία φορά στη βιβλιογραφία θα δούμε να προτείνεται ad hoc μια ισότροπη, γραμμική σχέση, μεταξύ του 2.P.-K. τανυστή των και του ενεργειακώς συζυγούς του τανυστή των τροπών Green,

$$K_{ij} = 2G\left(G_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu}G_{kk}\right) \tag{2.101}$$

Δυστυχώς η εξίσωση αυτή οδηγεί σε μία ελαττωματική έκφραση για την ειδική εσωτερική ενέργεια, η οποία στο όριο μεγάλων παραμορφώσεων όγκου, $J \rightarrow 0$ ($\rho \rightarrow \infty$), παραμένει πεπερασμένη, $\lim_{J \rightarrow 0} e(G_{ij}) < \infty$.

2.4.5 Απειροστικές σχέσεις τάσεων –τροπών

Επιστρέφουμε τώρα στην ανάλυση της απειροστικής μεταβάσεως $C^{(t)} \rightarrow C^{(t+\Delta t)}$. Αυτή περιγράφεται από τις εξής απειροστικές καταστατικές εξισώσεις

$$\dot{\Delta} T_{ij} = R_{ijkl} \Delta \varepsilon_{kl} \quad (2.102)$$

ή

$$\dot{T}_{ij} = R_{ijkl} D_{kl} \quad (2.103)$$

όπου

$$R_{ijkl} = G \left(\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{kj} + \frac{2\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \delta_{kl} \right), \quad (i = j, k = l) \quad (2.104)$$

$$R_{1212} = R_{1221} = \dots = G^* = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\tanh(\lambda_1 - \lambda_2)} G \quad (2.105)$$

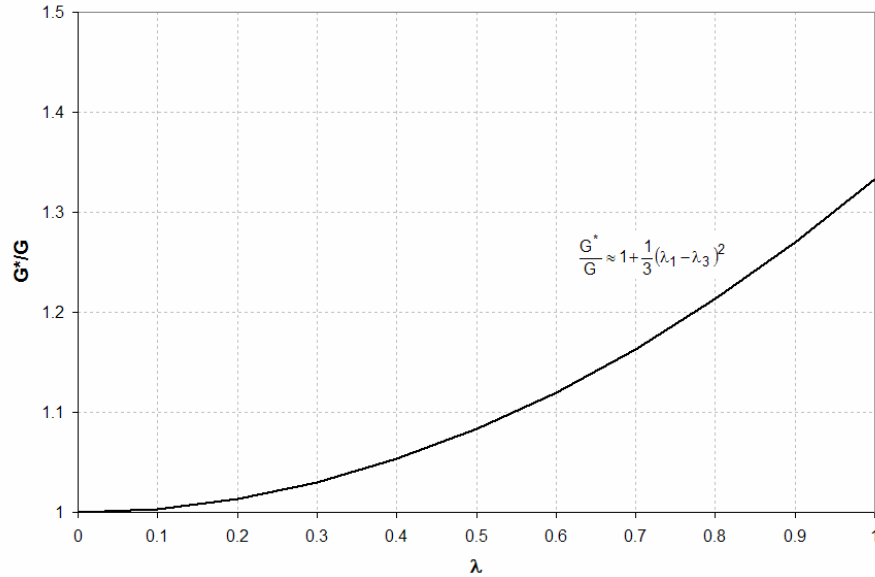
Παρατηρούμε τώρα¹¹ ότι στα πρώτα στάδια της ιστορίας της παραμορφώσεως, δηλαδή για μικρή αποκλίνουσα τροπή, τα μέτρα διατμήσεως ως προς κύριους άξονες και ως προς άξονες στραμμένους κατά 45° ταυτίζονται,

$$d = |\lambda_1 - \lambda_2| \ll 1 \Rightarrow G^* \approx G \quad (2.106)$$

Στη συνέχεια της διαδικασίας ορθογώνιας παραμορφώσεως και για σχετικά μεγάλες αποκλίσεις από την αρχική ισότροπη κατάσταση τα μέτρα διατμήσεως αποκλίνουν σημαντικά και μάλιστα $G^* > G$, γεγονός που χαρακτηρίζεται στη βιβλιογραφία ως μια *τροπικά επιβεβλημένη ανισοτροπία*¹² (Εικ. 2-15).

¹¹ $\tanh x = x + O(x^3)$

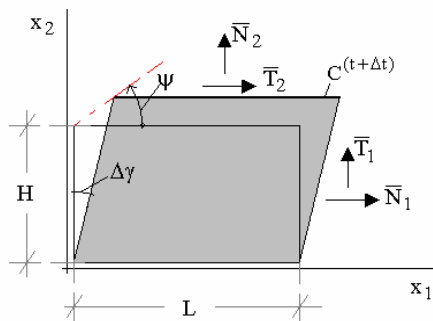
¹² Αγγλ. *strain-induced anisotropy*



Εικ. 2-15: Τροπικά επιβεβλημένη ανισοτροπία

Ασκήσεις

1. Να αποδειχθεί η παραπάνω Εξ. (2.105) για το μέτρο διάτμησης G^* , που περιγράφει στροφές κυρίων αξόνων.
2. Θεωρούμε μια επίπεδη ομογενή απειροστική παραμόρφωση $C^{(t)} \mapsto C^{(t+\Delta t)}$ ενός δοκιμίου όπως φαίνεται στην Εικ. 2-16.



Εικ. 2-16: Απλή διασταλτική διάτμηση

Έστω N_i, T_i και \bar{N}_i, \bar{T}_i οι δυνάμεις που ασκούνται στα σύνορα του δοκιμίου στις απεικονίσεις $C^{(t)}$ και $C^{(t+\Delta t)}$, αντιστοίχως. Δίδονται: Το ύψος, μήκος και πάχος του δοκιμίου στην απεικόνιση $C^{(t)}$: H, L, B , η (απειροστική) γωνία διατμήσεως $\Delta\gamma$, η γωνία διασταλτικότητας ψ , η ένταση στο επίπεδο της παραμορφώσ στην απεικόνιση $C^{(t)}$

$$[\bar{\sigma}] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{bmatrix} \tag{2.107}$$

και τέλος οι μεταβολές των συνοριακών δυνάμεων¹³: $\Delta T_i = \bar{T}_i - T_i$, $\Delta N_i = \bar{N}_i - N_i$.

Να υπολογισθούν οι συνιστώσες της κατά Jaumann μεταβολής της τάσης κατά Cauchy,

$$\begin{bmatrix} \dot{\Delta}\sigma_{11} & \dot{\Delta}\sigma_{12} \\ \dot{\Delta}\sigma_{21} & \dot{\Delta}\sigma_{22} \end{bmatrix} \quad (2.108)$$

Αριθμητική εφαρμογή: $H = 10.cm$, $L = 20.cm$, $B = 10.cm$, $\Delta\gamma = 0.01$, $\psi = 10^\circ$, $\Delta N_2 = 0$, $\Delta T_2 = 100 N$, $\Delta N_1 = -100 N$ και

$$[\bar{\sigma}] = \begin{bmatrix} -100 \text{ kPa} & 0 \\ 0 & -100 \text{ kPa} \end{bmatrix} \quad (2.109)$$

2.5 Η Αρχή των Δυνατών Έργων και οι Εξισώσεις Ισορροπίας

Στο κεφάλαιο αυτό θα τοποθετήσουμε το γενικό πρόβλημα συνοριακών τιμών σε μια βηματική κατά Lagrange περιγραφή της κινήσεως ενός σώματος B . Για το σκοπό αυτό θα θεωρήσουμε ότι το σώμα B βρίσκεται σε ισορροπία στη τρέχουσα απεικόνιση $C^{(t)}$ τη χρονική στιγμή $t > 0$ και θα εξετάσουμε την ισορροπία σε μια απειροστικά παρακείμενη απεικόνιση $C^{(\bar{t})}$ τη χρονική στιγμή $\bar{t} = t + \Delta t$.

2.5.1 Ισορροπία

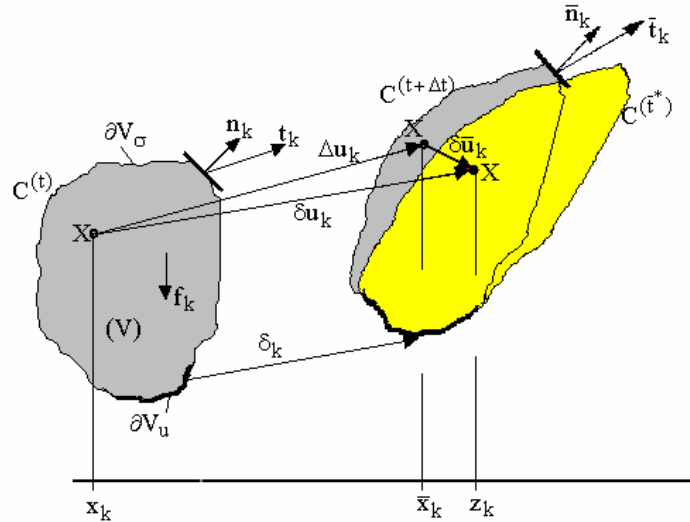
Για κάθε καλώς ορισμένη αλλαγή των καθολικών δυνάμεων είτε των συνοριακών συνθηκών ενός σώματος B στην τρέχουσα απεικόνιση $C^{(t)}$ το εν λόγω σώμα θα παραμορφωθεί και θα λάβει μια νέα θέση στο χώρο που θα περιγράφεται από τη γεωμετρική του απεικόνιση $C^{(\bar{t})}$. Θεωρούμε μια δυνατή¹⁴ μετατόπιση των $Y\Sigma$ του B στην απεικόνιση $C^{(\bar{t})}$, που περιγράφεται από κατάλληλα επιλεγμένες συναρτήσεις της μορφής

$$\delta \bar{u}_i = \bar{\varphi}_i(\bar{x}_k) \quad (2.110)$$

Οι συναρτήσεις $\bar{\varphi}_i(\cdot)$ οφείλουν να είναι τμηματικώς παραγωγίσιμες και να ικανοποιούν κάποιους περιορισμούς στο σύνορο το σώματος, τους οποίους θα καθορίσουμε παρακάτω. Η δυνατή αυτή μετατόπιση του σώματος B οδηγεί σε μία νέα θέση αυτού που δεν ανταποκρίνεται κατ' ανάγκη σε μία θέση που όντως το σώμα αυτό μπορεί να καταλάβει κάτω από την επίδραση μηχανικών αιτίων. Έστω $C^{(\bar{t})}$ η γεωμετρική απεικόνιση της δυνατής αυτής θέσης των $Y\Sigma$ του σώματος (Εικ. 2-17).

¹³ Η ΔT_1 προκύπτει από την ισορροπία ροπών στην $C^{(t+\Delta t)}$.

¹⁴ Ο όρος «δυνατός» σημαίνει εδώ ο δυνατός εφικτός και όχι κατ' ανάγκη φυσικά εφικτός. Ο όρος αυτός στη Μηχανική αποδίδει τον ξενόγλωσσο όρο virtual (virtuel). Λατ. virtus



Εικ. 2-17: Μετατόπιση και δυνατή μετατόπιση σώματος.

Η Αρχή των δυνατών έργων (Α.δ.ε.) στην απεικόνιση $C^{(\bar{t})}$ εκφράζεται από μία ολοκληρωτική σχέση της μορφής

$$\delta\bar{W}^{(ext)} = \delta\bar{W}^{(int)} \quad (2.111)$$

όπου οι ποσότητες $\delta\bar{W}^{(ext)}$ και $\delta\bar{W}^{(int)}$ καλούνται το δυνατό έργο των εσωτερικών και εξωτερικών δυνάμεων αντιστοίχως.

1. Το δυνατό έργο των εξωτερικών δυνάμεων ορίζεται ως εξής:

$$\delta\bar{W}^{(ext)} = \int_{(\bar{V})} \bar{f}_k \delta\bar{u}_k d\bar{V} + \int_{(S_N)} \bar{t}_k \delta\bar{u}_k d\bar{S} \quad (2.112)$$

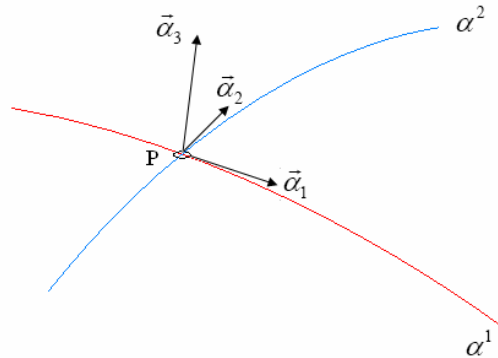
όπου

- $\bar{f}_k d\bar{V}$: είναι καθολικές δυνάμεις στην απεικόνιση $C^{(\bar{t})}$, ορισμένες ανά μονάδα όγκου στην απεικόνιση $C^{(\bar{t})}$.
- $\bar{t}_k d\bar{S}$: είναι συνοριακές δυνάμεις στην απεικόνιση $C^{(\bar{t})}$, ορισμένες ανά μονάδα επιφάνειας στην απεικόνιση $C^{(\bar{t})}$.

Η περιβάλλουσα επιφάνεια $\partial\bar{V}$ του υλικού όγκου \bar{V} του σώματος \mathbf{B} στην απεικόνιση $C^{(\bar{t})}$ θεωρείται ως μία δισδιάστατη λεία πολλαπλότητα¹⁵. Κάθε σημείο της πολλαπλότητας αυτής έχει ένα διανυσματικό βαθμό ελευθερίας, τουτέστιν εκείνο του διανύσματος της μετατοπίσεως του ΥΣ στην εν λόγω θέση. Η θέση κάθε σημείου πάνω στην επιφάνεια $P \in \partial\bar{V}$ ορίζεται από τις επιφανειακές (καμπυλόγραμμες) συντεταγμένες του α^1 και α^2 (Εικ. 2-18). Η θέση γειτονικών σημείων εκτός της περιβάλλουσας επιφάνειας $\partial\bar{V}$ καθορίζεται από την συντεταγμένη α^3 , που μετρά την κάθετη απόσταση αυτών από την θεωρούμενη επιφάνεια. Στο τυχόν σημείο $P(\alpha^1, \alpha^2, 0)$ πάνω στην επιφάνεια ορίζουμε την αντίστοιχη συναλλοίωτη βάση, $(\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \bar{\alpha}_3)$, όπως φαίνεται στην Εικ. 2-18. Από την

¹⁵ Περιβάλλουσες επιφάνειες με ακμές εξαιρούνται εμ' προκειμένο χάριν απλότητας.

βάση αυτή μπορούμε γενικώς να κατασκευάσουμε την αντίστοιχη ανταλλοιώτη βάση $(\bar{\alpha}^1, \bar{\alpha}^2, \bar{\alpha}^3)^{16,17}$.



Εικ. 2-18: Τοπικό σύστημα συντεταγμένων σε τυχόν σημείο της περιβάλλουσας επιφάνειας

Ένα επιτρεπτό σύνολο συνοριακών συνθηκών στο σημείο $P(\alpha^1, \alpha^2, 0)$ είναι εκείνο το των αμιγώς τύπου *Dirichlet*, με τα δεδομένα προβεβλημένα σε μια τοπική ανταλλοιώτη βάση

$$\{P \in \partial \bar{V} : \{\bar{S}_D : [p]_P = [u_1 \ u_2 \ u_3]\} \cup \{\bar{S}_N = \emptyset : [q]_P = [\times \ \times \ \times]\}\} \quad (2.113)$$

Αντιστοίχως οι αμιγώς τύπου *Neumann type* συνοριακές συνθήκες εκφράζονται στην συναλλοιώτη βάση,

$$\{P \in \partial \bar{V} : \{\bar{S}_D = \emptyset : [p]_P = [\times \ \times \ \times]\} \cup \{\bar{S}_N : [q]_P = [t^1 \ t^2 \ t^3]\}\} \quad (2.114)$$

Συνοριακές συνθήκες μεικτού τύπου είναι επίσης επιτρεπτές. Θα παρατηρήσουμε όμως ότι αν για παράδειγμα δίδεται η πληροφορία για την τιμή p_i τότε η τιμή της «αντιδράσεως» q^i δεν μπορεί να δοθεί ανεξάρτητα, και αντιστρόφως, π.χ.

$$\{P \in \partial \bar{V} : \{\bar{S}_D : [p]_P = [\times \ \times \ u_3]\} \cup \{\bar{S}_N : [q]_P = [t^1 \ t^2 \ \times]\}\} \quad (2.115)$$

Στο παράδειγμα που δίδεται πιο πάνω από την Εξ. (2.115) έχουμε την εξής πληροφορία: Στην εγγύς περιοχή του σημείου $P(\alpha^1, \alpha^2, 0)$ και κατά μήκος των καταλλήλως επιλεγμένων επιφανειακών α^α -γραμμών ($\alpha=1,2$) (δηλαδή στο εφαπτομενικό επίπεδο) προσδιορίζονται οι αντίστοιχες συνιστώσες του ελκυστή, ενώ καθέτως προς την επιφάνεια προσδιορίζεται η μετατόπιση.

Με τους παραπάνω ορισμούς παρατηρούμε ότι το ολοκλήρωμα $\int_{(\bar{S}_N)} \bar{t}_k \delta \bar{u}_k d\bar{S}$ στην Εξ.

(2.112) είναι ένα γενικευμένο ολοκλήρωμα τύπου Lebesgue. Για να άρουμε αυτή την δυσκολία, υποθέτουμε ότι πάνω στο \bar{S}_D , οι δυνατές μετατοπίσεις μηδενίζονται,

$$\delta \bar{u}_i = 0 \quad (2.116)$$

¹⁶ McConnell, A.J., Applications of Tensor Analysis, Ch. XIV, Dover, 1957.

¹⁷ Klingbeil, E., Tensorrechnung für Ingenieure, Kap. 4, BI, 1966.

και ότι οι αντίστοιχες συναρτήσεις δοκιμής, Εξ. (2.110), επεκτείνονται συνεχώς εντός το \bar{V} και στα συμπληρωματικά μέρη του συνόρου. Αυτό σημαίνει ότι το εν λόγω ολοκλήρωμα μπορεί να επεκταθεί σε όλο το σύνολο,

$$\int_{(\bar{S}_N)} \bar{t}_k \delta \bar{u}_k d\bar{S} + \int_{(\bar{S}_D)} \bar{t}_k 0 d\bar{S} = \int_{(\partial \bar{V})} \bar{t}_k \delta \bar{u}_k d\bar{S} \quad (2.117)$$

οπότε η Εξ. (2.112) γράφεται

$$\delta \bar{W}^{(ext)} = \int_{(\bar{V})} \bar{f}_k \delta \bar{u}_k d\bar{V} + \int_{(\partial \bar{V})} \bar{t}_k \delta \bar{u}_k d\bar{S} \quad (2.118)$$

και το δεύτερο ολοκλήρωμα στην παραπάνω έκφραση είναι ένα κανονικό επιφανειακό ολοκλήρωμα τύπου Riemann.

2. Το δυνατό έργο των εσωτερικών δυνάμεων

$$\delta \bar{W}^{(int)} = \int_{(\bar{V})} \bar{\sigma}_{km} \delta \bar{\varepsilon}_{km} d\bar{V} \quad (2.119)$$

όπου

- $\delta \bar{\varepsilon}_{km}$ είναι το συμμετρικό μέρος της βαθμίδας του δυνατού πεδίου μετατοπίσεων, ορισμένης ως προς τις συντεταγμένες των ΥΣ στην απεικόνιση $C^{(\bar{t})}$

$$\delta \bar{\varepsilon}_{km} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{\varphi}_k}{\partial \bar{x}_m} + \frac{\partial \bar{\varphi}_m}{\partial \bar{x}_k} \right) \quad (2.120)$$

Ο τανυστής των τάσεων κατά Cauchy είναι συμμετρικός,

$$\bar{\sigma}_{ij} = \bar{\sigma}_{ji} \quad (2.121)$$

οπότε η Εξ. (2.119) παίρνει την εξής μορφή:

$$\delta \bar{W}^{(i)} = \int_{(\bar{V})} \bar{\sigma}_{km} \frac{\partial}{\partial \bar{x}_m} \delta \bar{u}_k d\bar{V} \quad (2.122)$$

Με τη βοήθεια των παραπάνω Εξ. (2.118) και (2.122) η Εξ. (2.111) των δυνατών έργων στην απεικόνιση $C^{(\bar{t})}$ γράφεται ως ,

$$\int_{(\bar{V})} \bar{f}_k \delta \bar{u}_k d\bar{V} + \int_{(\partial \bar{V})} \bar{t}_k \delta \bar{u}_k d\bar{S} = \int_{(\bar{V})} \bar{\sigma}_{km} \frac{\partial}{\partial \bar{x}_m} \delta \bar{u}_k d\bar{V} \quad (2.123)$$

Η έκφραση για το έργο των εσωτερικών δυνάμεων μετασχηματίζεται στην τρέχουσα απεικόνιση με τη βοήθεια του σχετικού τανυστή 1.P.-K ως εξής,

$$\begin{aligned} \delta \bar{W}^{(int)} &= \int_{(\bar{V})} \bar{\sigma}_{km} \frac{\partial}{\partial \bar{x}_m} \delta \bar{u}_k d\bar{V} = \int_{(V)} \bar{\sigma}_{km} \frac{\partial}{\partial \bar{x}_m} \chi_p^{(t)-1} \frac{\partial}{\partial x_p} \delta \bar{u}_k J^t dV \\ &= \int_{(V)} J^t \bar{\sigma}_{mk} F_{pm}^{-1} \partial_p \delta \bar{u}_k dV = \int_{(V)} \pi_{kp} \partial_p \delta \bar{u}_k dV \end{aligned} \quad (2.124)$$

Αντιστοίχως ορίζουμε τις εξής ποσότητες:

- $b_k dV = \bar{f}_k d\bar{V}$: καθολικές δυνάμεις στην απεικόνιση $C^{(\bar{t})}$, ορισμένες ανά μονάδα όγκου στην απεικόνιση $C^{(t)}$.

- $\pi_k dS = \bar{t}_k d\bar{S}$: συνοριακές δυνάμεις στην απεικόνιση $C^{(\bar{t})}$, ορισμένες ανά μονάδα επιφανείας στην απεικόνιση $C^{(t)}$.

Με τους ορισμούς αυτούς η έκφραση για το έργο των εσωτερικών δυνάμεων μετασχηματίζεται ως εξής,

$$\begin{aligned} \delta\bar{W}^{(ext)} &= \int_{(\bar{V})} \bar{f}_k \delta\bar{u}_k d\bar{V} + \int_{(\partial\bar{V})} \bar{t}_k \delta\bar{u}_k d\bar{S} \\ &= \int_{(V)} b_k \delta\bar{u}_k dV + \int_{(\partial V)} \pi_k \delta\bar{u}_k dS \end{aligned} \quad (2.125)$$

Τέλος γράφουμε τις παραπάνω σχέσεις αναφορικά προς τις αντίστοιχες μεταβολές των διαφόρων στατικών μεγεθών,

- $\pi_{ij} = \sigma_{ij} + \Delta\pi_{ij}$
- $b_k = f_k + \Delta b_k$
- $\pi_k = t_k + \Delta\pi_k$

και

$$\int_{(V)} (f_k + \Delta b_k) \delta\bar{u}_k dV + \int_{(\partial V)} (t_k + \Delta\pi_k) \delta\bar{u}_k dS = \int_{(V)} (\sigma_{km} + \Delta\pi_{km}) \frac{\partial}{\partial x_m} \delta\bar{u}_k dV \quad (2.126)$$

Τώρα παρατηρούμε ότι για $\bar{t} = \sigma\alpha\theta.$,

$$\delta\bar{u}_k = \bar{\varphi}_k(\bar{x}_m) = \bar{\varphi}_k(\chi_m^{(t)}(x_p, \bar{t})) = \varphi_k(x_p) \quad (2.127)$$

όπου

$$\delta\bar{u}_k = 0, \text{ on } S_D \quad (2.128)$$

και S_D είναι η απεικόνιση του \bar{S}_D στην $C^{(t)}$.

Από την Α.δ.ε. ως μιας εκφράσεως της ισορροπίας στην τρέχουσα απεικόνιση $C^{(t)}$ έχουμε ότι,

$$\int_{(V)} f_k \varphi_k dV + \int_{(\partial V)} t_k \varphi_k dS = \int_{(V)} \sigma_{km} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_m} dV \quad (2.129)$$

Αυτό φαίνεται αμέσως από το μετασχηματισμό του δεξιά μέρους της Εξ. (2.129):

$$\begin{aligned} \int_{(V)} \sigma_{km} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_m} dV &= \int_{(V)} \frac{\partial}{\partial x_m} (\sigma_{km} \varphi_k) dV - \int_{(V)} \frac{\partial \sigma_{km}}{\partial x_m} \varphi_k dV \\ &= \int_{(\partial V)} \sigma_{mk} n_m \varphi_k dS - \int_{(V)} \frac{\partial \sigma_{km}}{\partial x_m} \varphi_k dV \end{aligned} \quad (2.130)$$

οπότε η Εξ. (2.129) δίδει,

$$\int_{(V)} f_k \varphi_k dV + \int_{(\partial V)} t_k \varphi_k dS = \int_{(\partial V)} \sigma_{mk} n_m \varphi_k dS - \int_{(V)} \frac{\partial \sigma_{km}}{\partial x_m} \varphi_k dV \quad (2.131)$$

ή

$$\int_{(V)} \left(\frac{\partial \sigma_{km}}{\partial x_m} + f_k \right) \varphi_k dV + \int_{(S_N)} (t_k - \sigma_{mk} n_m) \varphi_k dS = 0 \quad (2.132)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός α) ότι ο τανυστής της τάσεως κατά Cauchy είναι συμμετρικός και β) ότι οι «δοκιμαστικές» συναρτήσεις $\varphi_k(x_m)$ ικανοποιούν τη συνοριακή συνθήκη Εξ. (2.128). Από την Εξ. (2.132) προκύπτουν οι γνωστές εξισώσεις ισορροπίας, αρκεί να δεχθούμε ότι αυτή ισχύει για τυχαία επιλογή λείων δοκιμαστικών συναρτήσεων $\varphi_k(x_m)$, που ικανοποιούν τον περιορισμό Εξ. (2.128):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{km}}{\partial x_m} + f_k &= 0 \quad \forall x_k \in V \\ \sigma_{mk} n_m &= t_k \quad \text{on } S_N \end{aligned} \quad (2.133)$$

Αντιστρόφως από τις εξισώσεις ισορροπίας (2.133) έπεται η Α.δ.ε., Εξ.(2.129) (γιατί). Άρα αν υποθέσουμε ισορροπία στην τρέχουσα απεικόνιση $C^{(t)}$, από τις Εξ. (2.126) ως (2.129) παίρνουμε κατ' αρχήν την εξής ολοκληρωτική εξίσωση για τις μεταβολές,

$$\int_{(V)} \Delta b_k \delta \bar{u}_k dV + \int_{(\partial V)} \Delta \pi_k \delta \bar{u}_k dS = \int_{(V)} \Delta \pi_{km} \frac{\partial}{\partial x_m} \delta \bar{u}_k dV \quad (2.134)$$

Το πεδίο των δυνατών μετατοπίσεων μπορεί τώρα να γραφεί ως εξής,

$$\delta \bar{u}_i = \delta u_i - \Delta u_i = \psi_i(x_k) \quad (2.135)$$

όπου Δu_i είναι το πραγματικό (και γενικώς άγνωστο) πεδίο μετατοπίσεων που περιγράφει την απειροστική μετάβαση $C^{(t)} \rightarrow C^{(\bar{t})}$. Η Α.δ.ε, Εξ. (2.134), για μία επέκταση της ισορροπίας στην απεικόνιση $C^{(\bar{t})}$ γράφεται,

$$\int_{(V)} \Delta b_k \psi_k dV + \int_{(\partial V)} \Delta \pi_k \psi_k dS = \int_{(V)} \Delta \pi_{km} \frac{\partial \psi_k}{\partial x_m} dV \quad (2.136)$$

όπου

$$\psi_i = 0 \quad \text{on } S_D \quad (2.137)$$

Από την εξίσωση αυτή προκύπτουν με τον ίδιο τρόπο όπως δείξαμε πιο πάνω οι εξισώσεις ισορροπίας συναρτήσεως της μεταβολής του σχετικού 1.P.-K. τανυστή των τάσεων

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta \pi_{km}}{\partial x_m} + \Delta b_k &= 0 \quad \forall x_k \in V \\ \Delta \pi_{km} n_m &= \Delta \pi_k \quad \text{on } S_N \end{aligned} \quad (2.138)$$

Οι παραπάνω ισοδύναμες εκφράσεις ισορροπίας, Εξ. (2.136), (2.137) και (2.138), συμπληρώνονται από τη συνοριακή συνθήκη για τη μετατόπιση,

$$\Delta u_i = \delta_i \quad \text{on } S_D \quad (2.139)$$

2.5.2 Οι εξισώσεις συνεχιζόμενης ισορροπίας

Συμφώνως προς την ανάλυση της εντάσεως που έγινε στο Κεφ. 2.3 η μεταβολή (ή ο ρυθμός) του σχετικού τανυστή της τάσεως κατά 1.P.-K. εξαρτάται, α) από την αντικειμενική μεταβολή της τάσεως και β) από διορθωτικούς (γεωμετρικούς) όρους που λαμβάνουν υπ' όψιν την «προένταση» και την αλλαγή της γεωμετρίας :

$$\begin{aligned}\Delta\pi_{ij} &= \overset{\circ}{\Delta}\sigma_{ij} + \Delta\omega_{ik}\sigma_{kj} - \sigma_{ik}\Delta\varepsilon_{kj} - \sigma_{ik}\Delta\varepsilon_{kk} \\ \Leftrightarrow \dot{\pi}_{ij} &= \overset{\circ}{\sigma}_{ij} + W_{ik}\sigma_{kj} - \sigma_{ik}D_{kj} - \sigma_{ik}D_{kk}\end{aligned}\quad (2.140)$$

και

$$\begin{aligned}\Delta\pi_{ij} &= \overset{\circ}{\Delta}T'_{ij} + \Delta\omega_{ik}\sigma_{kj} - \sigma_{ik}\Delta\varepsilon_{kj} \\ \Leftrightarrow \dot{\pi}_{ij} &= \overset{\circ}{T}'_{ij} + W_{ik}\sigma_{kj} - \sigma_{ik}D_{kj}\end{aligned}\quad (2.141)$$

Σημειώνουμε ότι στις εκφράσεις αυτές οι αντικειμενικές μεταβολές του τανυστή των τάσεων δίδονται συνήθως από κατάλληλες «καταστατικές» σχέσεις μέσω ενός τανυστή 4ης τάξεως στιβαρότητας¹⁸,

$$\overset{\circ}{\Delta}\sigma_{ij} = L_{ijkl}\Delta\varepsilon_{kl} \Leftrightarrow \overset{\circ}{\sigma}_{ij} = L_{ijkl}D_{kl}\quad (2.142)$$

και

$$\overset{\circ}{\Delta}T'_{ij} = R_{ijkl}\Delta\varepsilon_{kl} \Leftrightarrow \overset{\circ}{T}'_{ij} = R_{ijkl}D_{kl}\quad (2.143)$$

Οι παραπάνω σχέσεις μπορούν να συνοψισθούν σε εξισώσεις που εκφράζουν την μεταβολή του σχετικού I.P.-K. ως συναρτήσεως της απειροστικής βαθμίδας μετατοπίσεως,

$$\Delta\pi_{ij} = C_{ijkl}\partial_l\Delta u_k \Leftrightarrow \dot{\pi}_{ij} = C_{ijkl}L_{kl}\quad (2.144)$$

όπου

$$C_{ijkl} = L_{ijkl} - \frac{1}{2}(\sigma_{ij}\delta_{kl} + \sigma_{kj}\delta_{il} + \sigma_{il}\delta_{jk} - \sigma_{ij}\delta_{ik})\quad (2.145)$$

Από τις σχέσεις αυτές και τις εξισώσεις ισορροπίας (4.22) προκύπτουν οι λεγόμενες εξισώσεις συνεχιζόμενης ισορροπίας^{19,20}.

Παραδειγματος χάριν ας θεωρήσουμε ότι στην απεικόνιση $C^{(t)}$ η προένταση είναι σταθερή, και ότι η συνεχιζόμενη παραμόρφωση είναι επίπεδη, τότε σε σύστημα κυρίων αξόνων της προεντάσεως έχουμε,

$$\partial_1\overset{\circ}{\sigma}_{11} + \partial_2\overset{\circ}{\sigma}_{21} + (\sigma_1 - \sigma_2)\partial_2\dot{\omega} = 0\quad (2.146)$$

$$\partial_1\overset{\circ}{\sigma}_{12} + \partial_2\overset{\circ}{\sigma}_{22} + (\sigma_1 - \sigma_2)\partial_1\dot{\omega} = 0$$

όπου

$$2\dot{\omega} = \partial_1v_2 - \partial_2v_1\quad (2.147)$$

Οι εξισώσεις αυτές αποτελούν τη βάση για την επίλυση προβλημάτων διακλαδώσεως της ισορροπίας μέσα στα πλαίσια μιας συνεπούς θεωρίας 1^{ης} τάξεως^{21,22}. Παρατηρούμε ότι οι

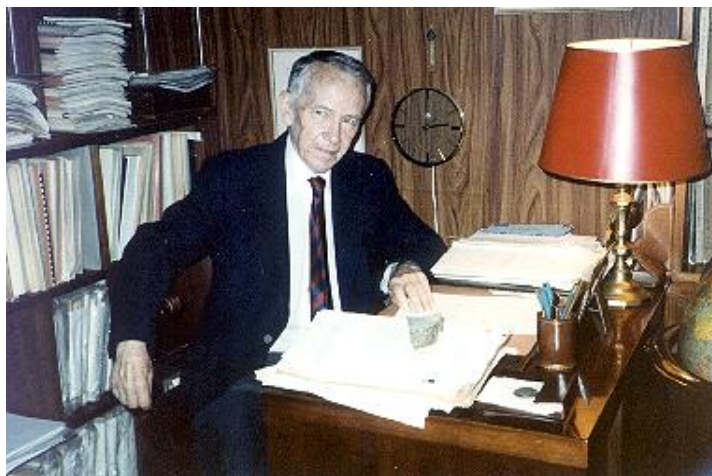
¹⁸ Αγγλ. *stiffness tensor*. Πρβλ. Κεφ. 2.4.5.

¹⁹ M. A. Biot, *Mechanics of Incremental Deformations*, Wiley, 1965.

²⁰ I. Vardoulakis (1978). Equilibrium bifurcation of granular earth bodies. In: *Advances in Analysis of Geotechnical Instabilities*, Univ. of Waterloo Press, SM Study No 13, paper 3, 65-120.

²¹ R. Hill and J. Hutchinson (1975). Bifurcation phenomena in the plane tension test. *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 34, 183-198.

εξισώσεις συνεχιζόμενης ισορροπίας διαφέρουν από τις γνωστές εξισώσεις ισορροπίας της Τεχνικής Μηχανικής μόνο στον όρο που λαμβάνει υπ' όψιν την επίδραση της προεντάσεως και του στροβιλισμού. Άρα για ισότροπες καταστάσεις προεντάσεως οι εξισώσεις της θεωρίας 1^{ης} τάξεως δεν διαφέρουν από εκείνες της Τεχνικής Μηχανικής.



Εικ. 2-19: Ο MAURICE ANTHONY BIOT στο γραφείο του στις Βρυξέλλες (né à Anvers le 25 mai 1905, décédé à Bruxelles le 12 septembre 1985.)

2.6 Συντηρητικά και Ακολουθητικά Φορτία

Η Α.δ.ε, Εξ. (2.136) για τη συνεχιζόμενη ισορροπία εκφράστηκε συναρτήσει των μεταβολών των συνοριακών και καθολικών δυνάμεων. Χάριν απλότητας θα θεωρήσουμε ότι οι καθολικές δυνάμεις είναι νεκρά φορτία (π.χ. φορτία λόγω ιδίου βάρους), οπότε από τις σχέσεις

$$b_k dV = \bar{f}_k d\bar{V} = \text{σταθ.} \Rightarrow b_k dV = \bar{f}_k dV(1 + \Delta \varepsilon_{kk}) \quad (2.148)$$

και

$$b_k = f_k + \Delta b_k \Rightarrow \Delta b_k = 0 \quad (2.149)$$

Στην περίπτωση αυτή θα θεωρήσουμε το εξής γενικό πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$\int_{(\partial V)} \Delta \pi_k \psi_k dS = \int_{(V)} \Delta \pi_{km} \frac{\partial \psi_k}{\partial x_m} dV \quad (2.150)$$

Ένα καλώς ορισμένο πρόβλημα συνοριακών τιμών προϋποθέτει το σαφή ορισμό των μεταβολών των συνοριακών φορτιών²³, που υπεισέρχονται στην παραπάνω έκφραση της Α.δ.ε., Εξ. (2.150). Τα συνοριακά φορτία στην απεικόνιση αναφοράς $C^{(t)}$ θα ορισθούν από σχέσεις της μορφής

$$dt_k = p \alpha_k dS \quad \alpha_i n_i > 0, \quad \alpha_i \alpha_i = 1 \quad (2.151)$$

²² Vardoulakis I. (1981). Bifurcation analysis of the plane rectilinear deformation on dry sand samples. Int. J. Solids Structures, Vol. 17, 1085-1101.

²³ Sia Nemat-Nasser (1972). On the local stability of finitely deformed solid subjected to follower type loads. Quart. Appl. Math., Vol. 26, 119-129.

όπου το διάνυσμα α_k δείχνει προς τα έξω της επιφάνειας dS στην κατεύθυνση του φορτίου και p είναι η έντασή του.

Αντιστοίχως έχουμε τον ορισμό των φορτίων στην απεικόνιση $C^{(\bar{r})}$

$$d\bar{t}_k = \bar{p}\bar{\alpha}_k d\bar{S} \quad \bar{\alpha}_i \bar{n}_i > 0, \quad \bar{\alpha}_i \bar{\alpha}_i = 1 \quad (2.152)$$

Γενικώς έχουμε τους παρακάτω ορισμούς για τα ονομαστικά φορτία

$$d\bar{t}_k = \pi_k dS = \bar{t}_k d\bar{S} \quad (2.153)$$

$$\pi_k = t_k + \Delta\pi_k \quad (2.154)$$

Υπενθυμίζουμε τις σχέσεις για την παραμόρφωση γραμμικών και επιφανειακών στοιχείων:

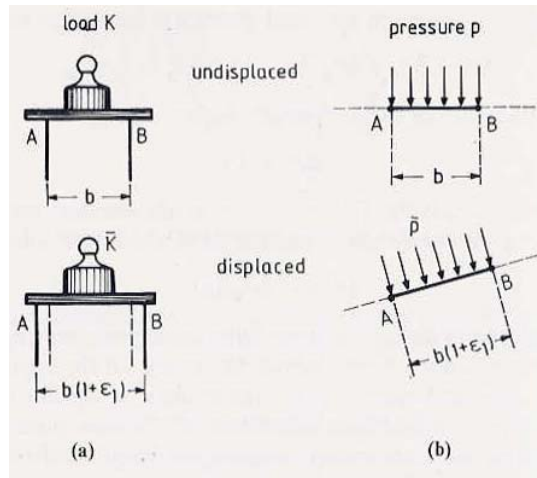
$$dx_i = m_i d\ell, \quad m_i m_i = 1 \quad ; \quad d\bar{x}_i = \bar{m}_i d\bar{\ell}, \quad \bar{m}_i \bar{m}_i = 1 \quad (2.155)$$

$$\bar{m}_i = m_i + \Delta m_i \Rightarrow \Delta m_i = m_i (\delta_{ik} - m_i m_k) \partial_\ell \Delta u_k$$

$$dS_i = n_i dS, \quad n_i n_i = 1 \quad ; \quad d\bar{S}_i = \bar{n}_i d\bar{S}, \quad \bar{n}_i \bar{n}_i = 1$$

$$d\bar{S} = dS + \Delta dS \Rightarrow \Delta dS = (\Delta \varepsilon_{kk} - \Delta \varepsilon_{\ell n} n_\ell n_m) dS \quad (2.156)$$

$$\bar{n}_i = n_i + \Delta n_i \Rightarrow \Delta n_i = n_i (n_i n_\ell - \delta_{i\ell}) \partial_\ell \Delta u_k$$



Εικ. 2-20: Σχηματική παράσραση νεκρών και υδροστατικών φορτίσεων

Νεκρά Φορτία²⁴:

Ένα σύστημα φορτίων καλείται σύστημα νεκρών ή συντηρητικών φορτίων, όταν αυτά διατηρούν κατά την παραμόρφωση φορά και ένταση,

$$dt_k = d\bar{t}_k \Rightarrow p_k = \pi_k \Rightarrow \Delta\pi_k = 0 \quad (2.157)$$

Στην περίπτωση αυτή το πρόβλημα συνοριακών τιμών για την εξακολούθηση της ισοροπίας περιγράφεται από την εξής μορφή της Α.δ.ε.,

$$\int_{(V)} C_{ijkl} \frac{\partial \Delta u_k}{\partial x_i} \frac{\partial \psi_i}{\partial x_j} dV = 0 \quad (2.158)$$

²⁴ Αγγλ. *dead loads*

Ακολουθητικά φορτία²⁵:

Ένα σύστημα φορτίων καλείται ακολουθητικό, όταν τα φορτία αυτά παρακολουθούν την παραμόρφωση της επιφανείας πάνω στην οποία αυτά δρουν,

$$\bar{m}_k \bar{\alpha}_k = m_k \alpha_k \quad (2.159)$$

Αν ισχύει $\bar{p} = p$, τότε έχουμε να κάνουμε με ακολουθητικούς ελκυστές, ενώ όταν ισχύει $\bar{p} d\bar{S} = p dS$, τότε έχουμε να κάνουμε με ακολουθητικά φορτία.

«Υδροστατική» πίεση:

Στην περίπτωση αυτή τα φορτία παραμένουν κάθετα στην επιφάνεια που δρουν και διατηρούν την έντασή τους, έστω $-p$,

$$dt_k = -pn_k dS, \quad d\bar{t}_k = -p\bar{n}_k d\bar{S} \quad (2.160)$$

οπότε

$$\Delta\pi_i = -p(n_j \delta_{ik} - n_i \delta_{jk}) \partial_k \Delta u_j = \pi_{ijk} \partial_k \Delta u_j \quad (2.161)$$

Στην περίπτωση αυτή η Α.δ.ε. παίρνει την εξής μορφή,

$$\int_{(\partial V)} \pi_{ijk} \frac{\partial \Delta u_j}{\partial x_k} \psi_i dS = \int_{(V)} C_{ijkl} \frac{\partial \Delta u_k}{\partial x_l} \frac{\partial \psi_i}{\partial x_j} dV \quad (2.162)$$

Και στις δύο παραπάνω περιπτώσεις ισχύουν οι παρακάτω συνοριακές συνθήκες τύπου Dirichlet για τη μετατόπιση

$$\Delta u_k = \delta_i \quad \text{on } S_D \quad (2.163)$$

2.7 Θεωρήματα Μοναδικότητας

Κάτω από νεκρά φορτία η Α.δ.ε για συνεχιζόμενη καθολική ισορροπία ενός σώματος **B** με όγκο V και σύνορο ∂V στη τρέχουσα απεικόνιση έχει ως εξής

$$\int_{(V)} \Delta\pi_{ij} \partial_j \delta u_i dV = 0 \quad (2.164)$$

$$\delta u_i = \delta_i \quad \text{on } S_D$$

Έστω $\{\Delta\pi_{ij}, \Delta u_i\}^{(1)}$ και $\{\Delta\pi_{ij}, \Delta u_i\}^{(2)}$ δύο λύσεις του παραπάνω απειροστικού προβλήματος συνοριακών τιμών. Η διαφορά τους

$$\Delta\pi_{ij} = \Delta\pi_{ij}^{(1)} - \Delta\pi_{ij}^{(2)} \quad (2.165)$$

$$\Delta u_i = \Delta u_i^{(1)} - \Delta u_i^{(2)}$$

ικανοποιεί τις εξής ομογενείς εξισώσεις

$$\int_V \Delta\pi_{ij} \partial_j \Delta u_i dV = 0 \quad (2.166)$$

$$\Delta u_i = 0 \quad \text{on } S_D$$

²⁵ Αγγλ. *follower loads*

Ορισμός:

Η ποσότητα

$$\Delta_2 w = \Delta \pi_{ij} \partial_j \Delta u_i \quad (2.167)$$

καλείται έργο 2^{as} τάξεως των ονομαστικών τάσεων.

Θεώρημα

Η συνθήκη²⁶

$$\int_V \Delta_2 w \, dV \geq 0 \quad (\text{DL-GU}) \quad (2.168)$$

είναι μία ικανή συνθήκη για καθολική μοναδικότητα του απειροστικού προβλήματος συνοριακών τιμών κάτω από νεκρά φορτία, αρκεί αυτή η συνθήκη να ικανοποιείται για κάθε επιτρεπτό πεδίο μετατοπίσεων $\Delta u_i = 0$ on S_D . Η ισότητα στην παραπάνω συνθήκη (DL-GU) ισχύει μόνο για την τετριμμένη λύση, $\Delta u_i = 0$, ($\forall x_k \in V$)

Για υπερελαστικά υλικά το παραπάνω θεώρημα είναι γνωστό στη βιβλιογραφία ως το γραμμικοποιημένο κριτήριο ευστάθειας του Hadamard^{27,28}. Ο Hadamard απέδειξε ότι για να ικανοποιεί ένα υπερελαστικό υλικό σε μία απεικόνιση ισορροπίας την παραπάνω ικανή συνθήκη μοναδικότητας (DL-GU), είναι αναγκαίο όπως για κάθε ζεύγος διανυσμάτων g_i, n_i και για κάθε σημείο του χωρίου V να ισχύει η εξής συνθήκη²⁹

$$\dot{\pi}_{ij} = C_{ijkl} D_{kl} : C_{ijkl} g_i g_k n_j n_l \geq 0 \quad (\text{Ha}) \quad (2.169)$$

Η ικανή καθολική συνθήκη για μοναδικότητα της λύσεως, συνθήκη (DL-GU), ικανοποιείται, αν υποθέσουμε ως αληθή μία ισχυρότερη ικανή τοπική συνθήκη, η οποία επιτάσσει όπως το έργο 2^{as} τάξεως του σχετικού 1.P.-K. τανυστή των τάσεων είναι θετικό παντού στο συγκεκριμένο χωρίο V και για κάθε επιλογή της βαθμίδας μετατοπίσεως

$$\Delta_2 w > 0 \Leftrightarrow C_{ijkl} \partial_i \phi_j \partial_k \psi_l > 0 \quad (\text{DL-LU}) \quad (2.170)$$

Η ικανή αυτή τοπική συνθήκη μοναδικότητας είναι από τη μεριά της ένας περιορισμός ισχυρότερος από τη λεγόμενη ισχυρή συνθήκη ελλειπτικότητας³⁰ για τον τανυστή στιβαρότητας,

$$C_{ijkl} g_i g_k n_j n_l > 0 \quad (\text{SE}) \quad (2.171)$$

η οποία εξασφαλίζει ότι οι μερικές διαφορικές εξισώσεις

$$\partial_j \Delta \pi_{ij} = 0 \Leftrightarrow C_{ijkl} \partial_j \partial_l \Delta u_k = 0 \quad (2.172)$$

που περιγράφουν το απειροστικό πρόβλημα συνοριακών τιμών είναι ελλειπτικού τύπου.

²⁶ (DL-GU): Dead Load Global Uniqueness

²⁷ Hadamard, J. Lecons sur la propagation des ondes at les equations de l'hydrodynamique. Paris:Hermann 1903. Reprinted New York: Chelsea Publishing Co. 1949.

²⁸ M.F. Beatty (1966). Some static and dynamic implications of the general theory of elastic stability. Arch. Rat. Mech. Anal., 10, 167-186.

²⁹ Truesdell C. and Noll W.. Nonlinear Field Theories of Mechanics, Handbuch der Physik, Vol. III/3, Sections 68,68bis,69,99,100, Springer 1965.

³⁰ Αγγλ. *strong-ellipticity condition*. Πρβλ. L. Szabó (2000). Comments on loss of strong ellipticity in elastoplasticity. Int. J. Solids and Struct., 33, 3775-3806.

Παρατηρούμε τώρα ότι στα πλαίσια μιας θεωρίας μικρών παραμορφώσεων μπορούμε να δεχθούμε ότι οι διάφοροι ρυθμοί συμπίπτουν

$$\dot{\pi}_{ij} \approx \dot{\sigma}_{ij} \approx \dot{T}'_{ij} \approx \dot{\sigma}_{ij} \quad (2.173)$$

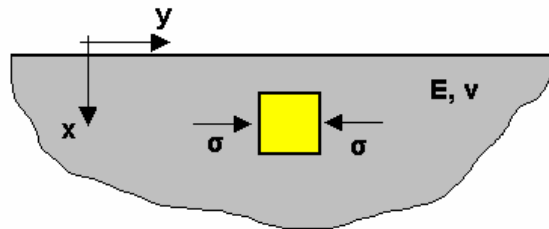
οπότε

$$\Delta_2 w > 0 \Rightarrow \Delta \sigma_{ij} \Delta \varepsilon_{ij} > 0 \quad (2.174)$$

Αυτή η ανισότητα εμφανίζεται στη βιβλιογραφία ως αίτημα υλικής ευστάθειας³¹. Υλικά τα οποία ικανοποιούν το ως άνω «αίτημα» καλούνται ευσταθή υλικά³². Αντιθέτως όταν το έργο 2^{us} τάξεως της τάσεως είναι αρνητικό τότε το υλικό καλείται ασταθές³³.

2.8 Θέμα

Δίδεται ένας ομογενής ημίχωρος αποτελούμενος από ισότροπο υπερ-ελαστικό υλικό κάτω από την επίδραση μιας προεντάσεως, με την μέγιστη θλιπτική τάση παράλληλη προς την ελεύθερη επιφάνεια και τις άλλες δύο κύριες τάσεις μηδενικές (Εικ. 2-21)



Εικ. 2-21: Ελαστικός ημίχωρος σε προένταση

Ζητείται να διατυπωθεί το επίπεδο πρόβλημα λυγισμού του ημίχωρου κάτω από την επίδραση της προεντάσεως και να υπολογισθεί η τιμή της κρίσιμης τάσεως λυγισμού σ_{cr} κστη βάση των καταστατικών σχέσεων που αναπτύξαμε στο Κεφ. 2.4.5. Να διερευνηθεί η σχέση μεταξύ του προβλήματος διακλαδώσεως της ισορροπίας λυγισμού και της ικανότητας του ημίχωρου να διαδίδει επιφανειακά κύματα τύπου Rayleigh.

Βιβλιογραφία

- [1] Benallal, A., Bilardon, R. and Geymonat G. (1989). Conditions de bifurcation à l'interieur et aux frontières pour une classe de matériaux non standards. Acad. Sci., Paris, 308, série II, 893-898.
- [2] Biot, M.A. 1965. *Mechanics of Incremental Deformations*. John Wiley & Sons, New York.
- [3] Dorris, J.F. and S. Nemat-Nasser (1980). Instability of a layer on a half-space. J. Appl. Mech. 47, 2, 304-12.
- [4] Horii, H. and Nemat-Nasser, S. (1982). Instability of a half-space with frictional materials. J. Appl. Math. and Phys. (ZAMP) 33, 1-15.
- [5] Vardoulakis, I. and Sulem, J. *Bifurcation Analysis in Geomechanics*. Sect. 4, Chapman & Hall, 1995.

³¹ Αγγλ. *postulate for material stability*

³² Αγγλ. *stable materials*

³³ Vardoulakis, I. (1994). Potentials and limitations of softening models in geomechanics (The role of second order work). Europ. J. of Mechanics, A/Solids, 13, 195-226.

