9. Η ΑΡΧΗ ΔΙΑΤΗΡΗΣΕΩΣ ΤΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ

Στο κεφάλαιο αυτό θα μας απασχολήσει η Αρχή Διατηρήσεως της Ενέργειας (Α.Δ.Ε.) η οποία και θα επεξηγηθεί με αναφορές στις θεωρίες της Ελαστικότητας, της Πλαστικότητας και Θερμο-ελαστο-πλαστικότητας.

Ιωάννης Γ. Βαρδουλάκης, Dr-Ing., Καθηγητής της Μηχανικής στο Ε. Μ. Πολυτεχνείο

http://geolab.mechan.ntua.gr/**,** I.Vardoulakis@mechan.ntua.gr

9.1 Ορισμοί

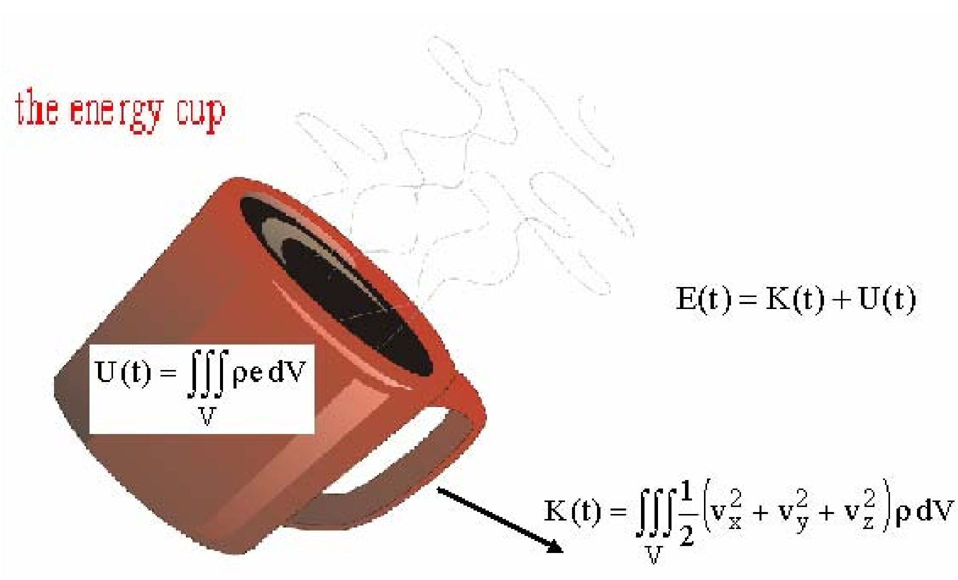
Η Αρχή Διατήρησης της Ενέργειας (Α.Δ.Ε.) είναι μία έκφράση του *1ου Θερμοδυναμικού Αξιώματος*. Η ενέργεια είναι μία φυσική ποσότητα με διαστάσεις μηχανικού έργου. Στη Μηχανική και σε σύστημα SI η ενέργεια μετράται σε Joule[1]. Η θερμική ενέργεια μετράται σε cal. Με βάση το 1ο θερμοδυναμικό αξίωμα μπορούμε να ορίσουμε μία ποσότητα j, το *μηχανικό ισοδύναμο της θερμότητας,* $j = 4.2\,J/cal$ για να μετατρέπουμε θερμική ενέργεια σε ισοδύναμη μηχανική, όταν αυτές βρίσκονται σε μία έκφραση του 1ου θερμοδυναμικού αξιώματος.

Η *ολική ενέργεια* ενός σώματος αποτελείται από δύο μέρη (Εικ. 9-1):

$$\mathrm{E} = K + U \tag{9.1}$$

1. Ένα μέρος της ολικής ενέργειας ενός σώματος εξαρτάται από την κινητική του κατάσταση και λέγεται *κινητική ενέργεια* K.

2. Το υπόλοιπο μέρος της ολικής ενέργειας δεν εξαρτάται από την κινητική κατάσταση του σώματος και λέγεται *εσωτερική ενέργεια* U.



Εικ. 9-1: Σχηματική παράσταση της ολικής ενέργειας του πίπτοντας κύπελλου με ζεστό καφέ, όπως αυτή παρατηρείται από εξωτερικό, αμήχανο παρατηρητή

[1] $1 Joule = 1 Nm$

Σε ένα Συνεχές Μέσο τη χρονική στιγμή t η κινητική ενέργεια $K(t)$ δίδεται ως το ολοκλήρωμα της κινητικής ενέργειας όλων των υλικών του σημείων: Έστω $\rho = \rho^E(x_k, t)$ η πυκνότητα του συνεχούς και $v_i = v_i^E(x_k, t)$ η ταχύτητα των ΥΣ , η κινητική ενέργεια υπολογίζεται από το ολοκλήρωμα,

$$K = \int_{(B)} \frac{1}{2} v_k v_k dm = \int_{(V)} \frac{1}{2} \rho v_k v_k dV \tag{9.2}$$

Η εσωτερική ενέργεια του σώματος ορίζεται μέσω της *ειδικής εσωτερικής ενέργειας*, $e = e^E(x_k, t)$:

$$U = \int_{(B)} edm = \int_{(V)} \rho edV \tag{9.3}$$

Η ειδική εσωτερική ενέργεια εξαρτάται με τη σειρά της από την κατάσταση στην οποία βρίσκεται το σώμα. π.χ. από τη θερμοκρασία του $\theta = \theta^E(x_k, t)$, την εντατική του κατάσταση $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^E(x_k, t)$ ή και άλλες μεταβλητές που καθορίζουν την κατάστασή του.

Αν περιορισθούμε για παράδειγμα μόνο σε θερμοκρασιακές αλλαγές, τότε σε πρώτη προσέγγιση θα θεωρήσουμε ότι η ειδική εσωτερική ενέργεια του σώματος εξαρτάται απ' ευθείας από τη θερμοκρασία του

$$e = jc\theta + \cdots \tag{9.4}$$

όπου $c = c^E(x_k, t)$ είναι η *ειδική θερμότητα*[2] του υλικού, από το οποίο αποτελείται το θεωρούμενο σώμα. Υπενθυμίζουμε ότι η ειδική θερμότητα ενός υλικού ισούται προς το ποσό θερμότητας που χρειάζεται $1gr$ του υλικού για την ανύψωση της θερμοκρασίας του κατά $1^o C$. Π.χ. συμβατικά, η ειδική θερμότητα του ύδατος ως υλικού σύγκρισης είναι μοναδιαία, $c_{H_2O} = 1cal/(gr^\circ C)$.

Συνοψίζοντας τα παραπάνω, γράφουμε την έκφραση για την ολική ενέργεια ενός συνεχούς σώματος

$$E = K + U = \int_{(V)} \frac{1}{2} \rho v_k v_k dV + \int_{(V)} \rho edV \tag{9.5}$$

[2] Αγγλ. *specific heat*

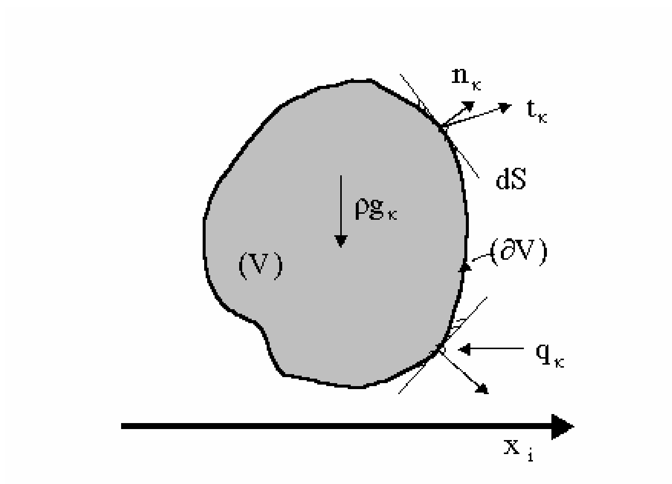
9.2 Η αρχή της διατηρήσεως της ενέργειας

Η μεταβολή της ολικής ενέργειας Ε ενός σώματος εξισορροπείται από την ισχύ των εξωτερικών δυνάμεων και από την ενέργεια που παρέρχεται ανά μονάδα χρόνου στο σώμα από τον περιβάλλοντα χώρο

$$\dot{E} = W^{(ext)} + Q \tag{9.6}$$

όπου με $W^{(ext)}$ συμβολίζεται η ισχύς των εξωτερικών δυνάμεων και με Q η ενέργεια που παρέχεται εκ των έξω.

Όπως είδαμε και στο προηγούμενο κεφάλαιο, συνήθως δεχόμαστε ότι οι δυνάμεις που ασκούνται σε ένα Συνεχές Σώμα είναι δύο ειδών (Εικ. 9-2): α) Καθολικές δυνάμεις, π.χ. δυνάμεις λόγω του πεδίου βαρύτητας, $\rho g_k dV$. β) Επιφανειακές δυνάμεις, $t_k dS$.



Εικ. 9-2: Δυνάμεις και ροή θερμότητας στο Συνεχές

Τα έργα των δυνάμεων αυτών ανά μονάδα χρόνου είναι:

$$W^{(ext)} = \int_{(\partial V)} t_k v_k \, dS + \int_{(V)} \rho g_k v_k \, dV \tag{9.7}$$

Παρατηρούμε ότι για λόγους ισορροπίας μεταξύ των εξωτερικών και των εσωτερικών δυνάμεων στο σύνορο, ο ελκυστής t_k δίδεται από τον τανυστή των τάσεων κατά Cauchy,

$$t_i = \sigma_{ki} n_k \tag{9.8}$$

Στην παραπάνω έκφραση σ_{ki} είναι ο τανυστής των τάσεων και n_k το μοναδιαίο εξωτερικό διάνυσμα στο σύνορο. Συνδυασμός των ανωτέρω δίνει,

$$W^{(ext)} = \int_{(\partial V)} \sigma_{ki} n_k v_i dS + \int_{(V)} \rho g_k v_k dV \tag{9.9}$$

Η ενέργεια που παρέχεται στο σώμα εκ των έξω μπορεί να είναι πολλών ειδών. Στην ειδική περίπτωση που η ενέργεια Q είναι καθαρά λόγω *ροής θερμότητας*, τότε γράφουμε,

$$Q = -\int_{(\partial V)} q_k n_k dS \tag{9.10}$$

όπου $q_i = q_i^E(x_k, t)$ είναι το διάνυσμα της ροής θερμότητας ανά μονάδα χρόνου ανά μονάδα επιφάνειας. Το πρόσημο $(-)$ στην παραπάνω έκφραση δηλώνει ότι το $dQ = -q_k n_k dS$ είναι θετικό όταν έχουμε *εισροή* θερμότητας, όταν δηλαδή το q_k έχει αντίθετη κατεύθυνση από το εξωτερικό μοναδιαίο διάνυσμα n_k, κάθετο προς το στοιχείο dS.

Με βάση τις εκφράσεις αυτές η Α.Δ.Ε. παίρνει την εξής μορφή σε σχέση με έναν *όγκο αναφοράς* V με περιβάλλουσα επιφάνεια ∂V :

$$\begin{aligned} \dot{\mathrm{E}} &= W^{(ext)} + Q \Rightarrow \\ \dot{\mathrm{E}} &= \int_{(\partial V)} \sigma_{ki} n_k v_i dS + \int_{(V)} \rho g_k v_k dV - \int_{(\partial V)} q_k n_k dS \end{aligned} \tag{9.11}$$

Για την περαιτέρω επεξεργασία της Α.Δ.Ε. πραγματοποιούμε κατ' αρχή την υλική χρονική παραγώγιση της σχέσεως (9.5) :

$$\mathrm{E} = \mathrm{K} + U \Rightarrow \dot{\mathrm{E}} = \dot{\mathrm{K}} + \dot{U} \tag{9.12}$$

Για τον υπολογισμό των μεταβολών $\dot{\mathrm{K}}$ και $\dot{U}$ κάνουμε χρήση του θεωρήματος μεταφοράς του Reynolds και της Α.Δ.Μ.:

$$\mathrm{K} = \int_{(V)} \frac{1}{2} \rho v_k v_k dV \Rightarrow \dot{\mathrm{K}} = \int_{(V)} \rho v_k \dot{v}_k dV \tag{9.13}$$

$$U = \int_{(B)} e dm = \int_{(V)} \rho e dV \Rightarrow \dot{U} = \int_{(V)} \rho \dot{e} dV \tag{9.14}$$

και

$$\dot{\mathrm{E}} = \dot{\mathrm{K}} + \dot{U} \Rightarrow \dot{\mathrm{E}} = \int_{(V)} \rho v_k \dot{v}_k dV + \int_{(V)} \rho \dot{e} dV \tag{9.15}$$

Συνδυάζοντας τις Εξ. (9.11) και (9.15) έχουμε:

$$\dot{\mathrm{K}} + \dot{U} = W^{(ext)} + Q \Rightarrow \quad \dot{U} = \left(W^{(e)} - \dot{\mathrm{K}}\right) + Q \tag{9.16}$$

ή

$$\int_{(V)} \rho \dot{e} dV = \left(\left(\int_{(\partial V)} \sigma_{ki} n_k v_i dS + \int_{(V)} \rho g_k v_k dV\right) - \int_{(V)} \rho v_k \dot{v}_k dV\right) - \int_{(\partial V)} q_k n_k dS \tag{9.17}$$

Για την περαιτέρω επεξεργασία της Α.Δ.Ε., κάνουμε χρήση του παρακάτω θεωρήματος:

Θεώρημα

Η διαφορά μεταξύ της ισχύος των εξωτερικών δυνάμεων και της μεταβολής της κινητικής ενέργειας ισούται με την ισχύ των εσωτερικών δυνάμεων

$$W^{(ext)} - \dot{K} = W^{(int)} \tag{9.18}$$

όπου $W^{(int)}$ είναι η συνολική *ισχύς των εσωτερικών δυνάμεων*, η οποία ορίζεται ως εξής,

$$W^{(\mathrm{int})} = \int_{(V)} P dV \tag{9.19}$$

και

$$P = \sigma_{km} D_{km} \tag{9.20}$$

είναι η ισχύς του τανυστή των τάσεων[3], και

$$D_{km} = \frac{1}{2}\left(\partial_k v_m + \partial_m v_k\right) \tag{9.21}$$

είναι ο ρυθμός παραμορφώσεως του σώματος

Απόδειξη:

Θεωρούμε τις δυναμικές εξισώσεις,

$$\partial_m \sigma_{mk} + \rho g_k - \rho \dot{v}_k = 0 \Rightarrow \int_{(V)} \left(\partial_m \sigma_{mk} + \rho g_k - \rho \dot{v}_k\right) \; v_k dV = 0$$

[3] Αγγλ. *specific stress power*, Γερμ. *Elementarleistung*

Παρατηρούμε ότι:

$$
\begin{aligned}
\int_{(V)} \partial_k \sigma_{km} v_m \, dV &= \int_{(V)} \partial_k \left(\sigma_{km} v_m \right) dV - \int_{(V)} \sigma_{km} \partial_k v_m \, dV \\
&= \int_{(\partial V)} n_k \sigma_{km} v_m \, dS - \int_{(V)} \sigma_{km} \frac{1}{2} \left(\partial_k v_m + \partial_m v_k \right) dV - \int_{(V)} \sigma_{km} \frac{1}{2} \left(\partial_k v_m - \partial_m v_k \right) dV
\end{aligned}
$$

ή

$$
\begin{aligned}
\int_{(V)} \partial_k \sigma_{km} v_m \, dV &= \int_{(\partial V)} n_k \sigma_{km} v_m \, dS - \int_{(V)} \sigma_{km} D_{\kappa m} \, dV - \int_{(V)} \sigma_{km} W_{km} \, dV \\
&= \int_{(\partial V)} n_k \sigma_{km} v_m \, dS - \int_{(V)} \sigma_{km} D_{km} \, dV
\end{aligned}
$$

ο.ε.δ.

Λήμμα

Για οιονεί στατικές παραμορφώσεις από το παραπάνω Θεώρημα προκύπτει η *ισότητα των ‘έργων’ εσωτερικών και εξωτερικών δυνάμεων*,

$$
\dot{K} = 0 \quad \Rightarrow \quad W^{(ext)} = W^{(\mathrm{int})} \tag{9.22}
$$

ή

$$
\int_{(\partial V)} t_k v_k \, dS + \int_{(V)} \rho g_k v_k \, dV = \int_{(V)} \sigma_{km} D_{km} dV \tag{9.23}
$$

Η έκφραση αυτή προκύπτει σαν ειδική περίπτωση από την *Αρχή των Δυνατών Έργων*, όταν το «*δυνατό»* πεδίο μετατοπίσεων ταυτίζεται με το πραγματικό στιγμιαίο πεδίο μετατοπίσεων $\delta u_i = v_i \delta t$.

Τώρα επανερχόμενοι στις Εξ. (9.16) και (9.17) με το παραπάνω θεώρημα παίρνουμε ότι: Η αλλαγή της εσωτερικής ενέργειας εξισορροπείται από το έργο των εσωτερικών δυνάμεων και την εισροή (ή εκροή) θερμότητας,

$$
\dot{U} = W^{(\mathrm{int})} + Q \tag{9.24}
$$

ή

$$\int_{(V)} \rho \ \dot{e} \ dV = \int_{(V)} P dV - \int_{(\partial V)} q_k n_k dS \tag{9.25}$$

Κάνοντας χρήση του θεωρήματος Gauss το επιφανειακό ολοκλήρωμα στην παραπάνω έκφραση μπορεί να μετασχηματιστεί σε ολοκλήρωμα πάνω στον όγκο αναφοράς:

$$\int_{(\partial V)} q_k n_k dS = \int_{(V)} \partial_k q_k dV \tag{9.26}$$

οπότε η Εξ. (9.25) δίδει

$$\int_{(V')} \rho \dot{e} dV = \int_{(V')} \left(P - \partial_k q_k\right) dV \qquad \forall \ V' \subseteq V \tag{9.27}$$

που οδηγεί στην εξής *τοπική* έκφραση της Α.Δ.Ε.

$$\rho \dot{e} = P - \partial_k q_k \tag{9.28}$$

Για την περαιτέρω επεξεργασία της παραπάνω εξισώσεως χρειάζεται να προσφύγει κανείς σε καταστατικές σχετικά με την εσωτερική ενέργεια και τη ροή θερμότητας.

9.3 Υπερελαστικότητα

Για *ισόθερμες παραμορφώσεις* θα δεχθούμε ότι, $Q = 0$. Οπότε για οιονεί στατικές, ισόθερμες παραμορφώσεις από τις Εξ. (9.24) και (9.28) παίρνουμε τις εξής ενεργειακές εξισώσεις, αντιστοίχως:

$$\dot{U} = W^{(\text{int})} \tag{9.29}$$

ή

$$\int_V \rho \dot{e} dV = \int_V P dV \ \Rightarrow \ \underline{\rho \dot{e} = \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}} \tag{9.30}$$

Στην περίπτωση της Θεωρίας Ελαστικότητας μικρών παραμορφώσεων ταυτίζουμε το ρυθμό παραμορφώσεως με το ρυθμό απειροστικών ελαστικών τροπών,

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}^{e} \tag{9.31}$$

Επίσης για μικρές παραμορφώσεις δεχόμεθα ότι η αλλαγή της πυκνότητας του υλικού είναι αμελητέα,

$$\frac{\rho}{\rho^{(0)}} = \frac{dV}{dV^{(0)}} \Rightarrow \rho = \frac{\rho^{(0)}}{1 + \varepsilon_{kk}} \approx \rho^{(0)}(1 - \varepsilon_{kk}) \approx \rho^{(0)} \tag{9.32}$$

όπου $\rho^{(0)}$ είναι η πυκνότητα του υλικού στην αφόρτιστη απεικόνιση ($C^{(0)}:\sigma_{ij}=0$). Οπότε για μικρές παραμορφώσεις παίρνουμε την εξής σχέση

$$\rho\dot{e} \approx \rho^{(0)}\dot{e} = \dot{w}^e \Rightarrow \underline{\dot{w}^e \approx \sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}^e \quad (\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}^e)} \tag{9.33}$$

Με βάση την παραπάνω εξίσωση δεχόμεθα την ύπαρξη μιας ισότροπης συναρτήσεως της (ελαστικής) τροπής,

$$w = w^e(\varepsilon_{ij}) \tag{9.34}$$

όπου η ποσότητα ε_{ij} μετρά την απειροστική τροπή του σώματος από την αφόρτιστη απεικόνιση. Η συνάρτηση $w = w^e(\varepsilon_{ij})$ καλείται *πυκνότητα τροπικής ελαστικής ενέργειας*[4]. Σημειώνουμε ότι ένα υλικό, για το οποίο δεχόμεθα την ύπαρξη της πυκνότητας τροπικής ελαστικής ενέργειας, καλείται *υπερελαστικό υλικό*[5]. Στη θεωρούμενη περίπτωση ισχύουν διαδοχικά οι εξής ισότητες,

$$dW^{(ext)} = dW^{(\text{int})} \tag{9.35}$$

$$dW^{(\text{int})} = \sigma_{ij}d\varepsilon_{ij} \tag{9.36}$$

$$dw^e = \sigma_{ij}d\varepsilon_{ij} \tag{9.37}$$

$$dw^e = \frac{\partial w^e}{\partial \varepsilon_{ij}}d\varepsilon_{ij} \tag{9.38}$$

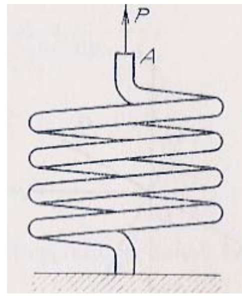
Άρα

$$dW^{(ext)} = dw^e \tag{9.39}$$

γεγονός που σημαίνει ότι για οιονεί στατικές, ισόθερμες παραμορφώσεις ενός υπερελαστικού υλικού το ολικό έργο των εξωτερικών δυνάμεων αποθηκεύεται στο σώμα υπό μορφή ελαστικής ενέργειας (Εικ. 9-3).

---

[4] Αγγλ. *elastic strain energy density function*
[5] Αγγλ. *hyperelastic material*



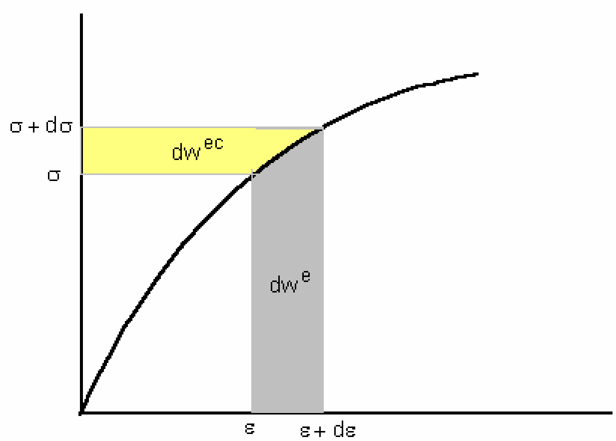
Εικ. 9-3: Το ελαστικό ελατήριο ως το μηχανικό μοντέλο ενός ιδεατού ελαστικού συστήματος

Είναι φανερό επίσης ότι η ύπαρξη ενός ελαστικού τροπικού δυναμικού, εξασφαλίζει το γεγονός, ότι για ένα υπερελαστικό υλικό το συνολικό έργο των εξωτερικών δυνάμεων για μία κλειστή τροπική όδευση μηδενίζεται

$$dW^{(ext)} = dw^e \Rightarrow \oint dW^{(ext)} \approx \oint \frac{\partial w^e}{\partial \varepsilon_{ij}} d\varepsilon_{ji} = \oint dw^e = 0 \tag{9.40}$$

Στην περίπτωση που εξετάζουμε από τις παραπάνω εξισώσεις, (9.37) και (9.38) έπεται ότι τάσεις να έχουν τη συνάρτηση πυκνότητας τροπικής ελαστικής ενέργειας ως δυναμικό (Εικ. 9-4) ,

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial w^e}{\partial \varepsilon_{ij}} \tag{9.41}$$



Εικ. 9-4: Χαρακτηριστική καμπύλη τάσεων τροπών ενός υπερελαστικού υλικού

Λόγω της Εξ. (9.41) και συμφώνως προς το θεμελιώδες θεώρημα παραστάσεως ισότροπων τανυστικών συναρτήσεων[6], έχουμε ότι η γενική παράσταση των σχέσεων της ελαστικότητας που προκύπτει από την εξίσωση αυτή είναι μια συνάρτηση της μορφής,

$$\sigma_{ij} = c_0\delta_{ij} + c_1\varepsilon_{ij} + c_2\varepsilon_{ik}\varepsilon_{kj} \tag{9.42}$$

όπου οι συντελεστές c_ν $(\nu = 1,2,3)$ είναι συναρτήσεις των αναλλοίωτων του τανυστή των τροπών. Ένα υλικό για το οποίο ισχύει ο καταστατικός νόμος (9.42) λέγεται *ελαστικό υλικό*. Από την Εξ. (9.42) της θεωρίας της ελαστικότητας προκύπτει μια αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ τάσεων και τροπών. Άρα για μία κλειστή τασική όδευση οι τροπές είναι μηδέν. Με άλλα λόγια οι "ελαστικές" τροπές είναι πλήρως αντιστρεπτές.

Σημειώνουμε τέλος ότι ο νόμος του Hooke της ισότροπης, γραμμικής, ισόθερμης ελαστικότητας,

$$\sigma_{ij} = \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} \tag{9.43}$$

είναι μία ειδική περίπτωση της Εξ. (9.42), που προκύπτει από αυτή αν δεχθούμε ότι οι συντελεστές παίρνουν τις εξής τιμές,

$$c_0 = \lambda I_{1\varepsilon}\ ,\ c_1 = 2\mu\ ,\ c_2 = 0 \tag{9.44}$$

Στην περίπτωση αυτή έχουμε την εξής συνάρτηση πυκνότητας ελαστικής ενέργειας παραμορφώσεως

$$w^e = \frac{1}{2}\lambda\varepsilon_{mm}\varepsilon_{nn} + \mu\varepsilon_{mn}\varepsilon_{nm} \tag{9.45}$$

Υπενθυμίζουμε ότι οι σταθερές λ και μ καλούνται σταθερές Lamé και ότι αυτές υπόκεινται σε ανισότιμους περιορισμούς που εξασφαλίζουν το γεγονός ότι η συνάρτηση πυκνότητας ελαστικής ενέργειας παραμορφώσεως είναι μια θετικώς ορισμένη τετραγωνική μορφή. Πράγματι, με βάση την παραπάνω έκφραση, Εξ. (9.45), μπορούμε κατά Maxwell (1856), να αναλύσουμε την ολική πυκνότητα της εσωτερικής ενέργειας σε μία ποσότητα w_V^e, που προκύπτει από τον υπολογισμό του έργου των εσωτερικών δυνάμεων λόγω αλλαγής του όγκου[7] του σώματος, και σε μία ποσότητα w_G^e που αντιστοιχεί σε αλλαγή σχήματος[8]:[9]

$$w^e = w_V^e + w_G^e \tag{9.46}$$

όπου

---

[6] Πρβλ. Κεφ. 2.2
[7] δείκτης V: , Αγγλ. *volume*
[8] δείκτης G: , *Γερμ. Gestalt*
[9] Πρβλ. Ι. Βαρδουλάκης, *Τεχνική Μηχανική ΙΙ*, Κεφ. 4.5, Εκδ. Συμμετρία, 1999

$$w_V^e = \frac{1}{2} K \mathrm{I}_{1\varepsilon}$$
$$K = \lambda + (2/3)\mu \tag{9.47}$$
$$\mathrm{I}_{1\varepsilon} = \varepsilon_{kk}$$

και

$$\begin{aligned} &w_G^e = \frac{1}{2}\mu J_{2e} \\ &J_{2e} = 2e_{ij}e_{ji} \quad , \quad e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3}\mathrm{I}_{1\varepsilon}\delta_{ij} \end{aligned} \tag{9.48}$$

Όπως αναφέραμε, μέσα στα πλαίσια της θεωρίας της γραμμικής ελαστικότητας απαιτούμε όπως η πυκνότητα ελαστικής ενέργειας παραμορφώσεως είναι μια θετικώς ορισμένη τετραγωνική μορφή, είτε για καθαρά ισότροπες παραμορφώσεις ($J_{2e} = 0$) είτε καθαρό ισόχωρες παραμορφώσεις ($\mathrm{I}_{1\varepsilon} = 0$), πρέπει τόσο η ολική πυκνότητα όσο και οι επί μέρους πυκνότητες ελαστική ς ενέργειας να είναι θετικές ποσότητες,

$$w^e > 0 \quad , \quad w_V^e > 0 \quad , \quad w_G^e > 0 \tag{9.49}$$

Από τις ανισότητες αυτές προκύπτουν περιορισμοί για τα μέτρα ελαστικότητας για ισότροπο υλικό υπό μορφή κάταστατικών ανισοτήτων[10],

$$\begin{aligned} &\lambda > 0 \quad , \quad \mu > 0 \\ &\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)} : \quad -1 \le \nu \le 0.5 \end{aligned} \tag{9.50}$$

9.4 Πλαστικότητα[11]

Αντιθέτως προς την περίπτωση του ελαστικού υλικού, στην περίπτωση που το υλικό θα θεωρηθεί ότι είναι ιδεατά πλαστικό-απολύτως στερεό θα δεχθούμε ότι το υλικό αυτό δεν έχει την δυνατότητα αποταμιεύσεως εσωτερικής ενέργειας και ότι ο ρυθμός παραμορφώσεως είναι μη-αντιστρεπτός, ταυτιζόμενος με τον «πλαστικό» ρυθμό παραμορφώσεως

$$(\dot{\varepsilon}_{ij}^e = 0 \Rightarrow \dot{U} = 0) \;\wedge\; \dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}^p \tag{9.51}$$

Στην περίπτωση αυτή και συμφώνως προς τις Εξ. (9.24) και (9.25) το συνολικό έργο των εξωτερικών δυνάμεων ανά μονάδα χρόνου αναλίσκεται σε θερμότητα, η οποία και διαφεύγει από το σώμα μέσω θερμικής διαχύσεως,

---

[10] Με ν συμβολίζουμε το λόγο *Poisson* του ισότροπου ελαστικού υλικού.
[11] Πρβλ. Ι. Βαρδουλάκη. *Στοιχεία Μαθηματικής Θεωρίας Ιδεατής Πλαστικότητας*, Εκδ. Ε.Μ.Π., 2003.

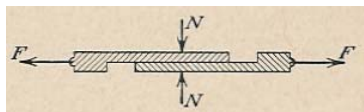
$$W^{(ext)} = - \ Q \tag{9.52}$$

Για το λόγο αυτό αντί της "εισροής" θερμότητας θα χρησιμοποιήσουμε εν προκειμένω την ολική εκροή θερμότητας

$$W^{(diss)} = -Q \tag{9.53}$$

Οπότε η ενεργειακή εξίσωση παίρνει τη μορφή (Εικ. 9-5),

$$W^{(ext)} = W^{(diss)} \tag{9.54}$$



Εικ. 9-5: Ο τριβέας Coulomb, ως το ιδεατό μοντέλο ενός ιδεατού πλαστικού συστήματος

Στην περίπτωση αυτή ταυτοποιούμε την ισχύ των εσωτερικών δυνάμεων με το λεγόμενο "πλαστικό έργο" ανά μονάδα χρόνου

$$w^p = \sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}^p \tag{9.55}$$

η δε εξίσωση

$$W^{(\text{int})} = \int_V w^p dV \tag{9.56}$$

οδηγεί στη σχέση

$$W^{(\text{int})} = W^{(diss)} \tag{9.57}$$

Οι Εξ. (9.54) ως (9.57) ερμηνεύονται ως εξής: Σε ένα ιδεατά πλαστικό-απολύτως στερεό σώμα το συνολικό έργο των εξωτερικών δυνάμεων αναλίσκεται εξ' ολοκλήρου σε θερμότητα, η οποία και διαφεύγει από το σώμα μέσω των μηχανισμών της μοριακής διαχύσεως και ακτινοβολίας. Η αντίστοιχη "κατανάλωση" ενέργειας $W^{(diss)}$ ανά μονάδα χρόνου, υπολογίζεται από την ισχύ των εσωτερικών δυνάμεων, η οποία με τη σειρά της ταυτίζεται με το συνολικό "πλαστικό έργο" των τάσεων ανά μονάδα χρόνου.

9.5 Η εξίσωση της θερμο-ελαστο-πλαστικότητας

Για την περαιτέρω εξειδίκευση της παραπάνω εκφράσεως της Α.Δ.Ε., Εξ. (9.28), κάνουμε χρήση επιπλέον *ειδικών καταστατικών σχέσεων*. Θεωρούμε εν προκειμένω ένα ελαστο-πλαστικό υλικό, όπου ο ρυθμός παραμορφώσεως αναλύεται σε *ελαστικό* και *πλαστικό* μέρος,

$$D_{ij} = D_{ij}^e + D_{ij}^p \tag{9.58}$$

Στην περίπτωση αυτή η ισχύς των εσωτερικών δυνάμεων αναλύεται επίσης σε ελαστικό και πλαστικό μέρος

$$\begin{aligned} &P = \sigma_{ij} D_{ij} = P^e + P^p \\ &P^e = \sigma_{ij} D_{ij}^e \ , \ P^p = \sigma_{ij} D_{ij}^p \end{aligned} \tag{9.59}$$

Σε πρώτη προσέγγιση υποθέτουμε ότι ο ρυθμός μεταβολής της *ειδικής εσωτερικής ενέργειας εξαρτάται από την αλλαγή της θερμοκρασίας* και από το ρυθμό ελαστικής παραμορφώσεως,

$$\rho \dot{e} = \rho j c \dot{\theta} + \sigma_{ij} D_{ij}^e \tag{9.60}$$

Τέλος όσον αφορά την ροή θερμότητας κάνουμε χρήση του νόμου του *Fourier*: Ροή θερμότητας λόγω μοριακών αλληλεπιδράσεων λαμβάνει χώρα σε κάθε σημείο του σώματος, στερεού ή υγρού, και είναι ανάλογη σε μέγεθος και ταυτίζεται με την κατεύθυνση της αρνητικής βαθμίδας του πεδίου της θερμοκρασίας,

$$q_i = -jk \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \tag{9.61}$$

όπου k είναι ο συντελεστής θερμικής αγωγιμότητας.

Συνδυασμός τέλος της Α.Δ.Ε., Εξ.(9.28) και των παραπάνω σχέσεων δίδει

$$\rho j c \dot{\theta} = k \nabla^2 \theta + P^p \tag{9.62}$$

ή

$$\dot{\theta} = \kappa \nabla^2 \theta + \frac{1}{\rho j c} \sigma_{ij} D_{ij}^p \tag{9.63}$$

Η παραπάνω εξίσωση μπορεί να θεωρηθεί ως εξίσωση που περιγράφει το συζευγμένο φαινόμενο της διαδόσεως της θερμότητας[12] και της παραγωγής θερμότητας λόγω πλαστικής παραμορφώσεως του σώματος. Ο συντελεστής κ λέγεται *συντελεστής θερμικής διάχυσης* κατά Kelvin,

[12] Πρβλ. Ι. Βαρδουλάκη. *Εισαγωγή στη Μηχανική του Συνεχούς Μέσου*, Συμμετρία, 1999.

$$\kappa = \frac{k}{\rho c} \tag{9.64}$$

με μονάδες

$$[\kappa] = \frac{cal}{{}^\circ C \;\; cm \;\; \sec} \; \frac{1}{\frac{gr}{cm^3} \; \frac{cal}{gr\,{}^\circ C}} = \frac{cm^2}{\sec} \tag{9.65}$$

Αξίζει εδώ να σημειώσουμε ότι τα κλασικά πειράματα των Taylor & Farren (1925)[13] σε μεταλλικά δοκίμια κατέδειξαν ότι στην πραγματικότητα όχι το σύνολο αλλά ένα ποσοστό περίπου 90% του πλαστικού έργου παραμόρφωσης μετατρέπεται σε θερμότητα. Αυτό το αποτέλεσμα αποτελεί μέχρι σήμερα αντικείμενο έρευνας[14,15].

9.6 Ενεργειακώς συζυγείς τανυστές τάσεων και τροπών

Για μία μεγάλη κλάση παραμορφώσεων είτε είναι αυτές ισόθερμες είτε αδιαβατικές η Εξ. (9.28) δίδει ότι ο ρυθμός της *ειδικής εσωτερικής ενέργειας* εξισορροπείται από το έργο ανά μονάδα χρόνου των εσωτερικών δυνάμεων,

$$\dot{e} = \frac{1}{\rho} P = \frac{1}{\rho} \sigma_{ij} D_{ij} \;\Rightarrow\; \rho^{(0)} \dot{e} = T_{ij} D_{ij} \tag{9.66}$$

όπου κάναμε χρήση της σχέσεως μεταξύ τανυστή των τάσεων κατά Cauchy και Kirchhoff[16]

$$T_{ij} = J \sigma_{ij} = \frac{\rho^{(0)}}{\rho} \sigma_{ij} \tag{9.67}$$

Μια κλάση ισότροπων *ελαστικών υλικών*, τα λεγόμενα ισότροπα *υπερελαστικά υλικά*, ορίζεται αν υποθέσουμε ότι η ειδική εσωτερική ενέργειά τους είναι μια ισότροπη συνάρτηση κάποιου πεπερασμένου μέτρου παραμορφώσεως, δηλαδή κάποιου συγκεκριμένου τανυστή τροπών αναφορικά προς εκείνη την απεικόνιση $\mathrm{C}^{(0)}$ όπου το σώμα είναι αφόρτιστο,

$$e = \hat{e}(\Xi_{ij}) \tag{9.68}$$

Τότε τυπικά έχουμε ότι

---

[13] Πρβλ. J.F.Bell, Mechanics of Solids, Vol. 1, *The Experimental Foundations of Solid Mechanics*, Springer, 1973.

[14] . Hodowany, G. Ravichandran, A.J. Rozakis & P.Rozakis (1999). On the partition of plastic work into heat and stored energy in metals. Part I, Experiments. J. Mech. Phys. Solids, in print

[15] P.Rozakis, A.J. Rozakis, G. Ravichandran and J. Hodowany (1999). On the partition of plastic work into heat and stored energy in metals. Part II, Theory. J. Mech. Phys. Solids, in print.

[16] Πρβλ. Κεφ. 8.14.

$$\rho^{(0)}\dot{e} = \rho^{(0)} \frac{\partial \hat{e}}{\partial \Xi_{ij}} \dot{\Xi}_{ij} \tag{9.69}$$

Συγκρίνοντας τις Εξ. (9.66) και (9.69) παρατηρούμε ότι απ΄ αυτές προκύπτει μια *πεπερασμένη καταστατική σχέση* για τον Kirchhoff τανυστή των τάσεων της μορφής

$$T_{ij} = \frac{\partial \hat{e}}{\partial \Xi_{ij}} \tag{9.70}$$

αρκεί να ταυτίσουμε τον πεπερασμένο εκείνο τανυστή των τροπών που ικανοποιεί τη σχέση

$$\dot{\Xi}_{ij} = D_{ij} \tag{9.71}$$

π.χ.

$$\dot{B}_{ij} \approx D_{ij} \tag{9.72}$$

Στην περίπτωση αυτή λέμε πως το ζεύγος (T_{ij}, B_{ij}) συνιστά ένα *ενεργειακώς συζυγές ζεύγος* τανυστών, που καθιστά ένα καταστατικό νόμο της μορφής της Εξ. (9.70) *ενεργειακώς αποδεκτό*[17]. Αυτή η πρόταση γίνεται κατανοητή αρκεί να παρατηρήσουμε τα εξής:

Ας θεωρήσουμε έναν απειροστικό όγκο V^* του υλικού που περιβάλλεται από το σύνορο ∂V^* και έστω v_i^* ένα πεδίο ταχυτήτων ορισμένο στο χωρίο αυτό. Τότε για οιονεί στατικές φορτίσεις, απουσία καθολικών δυνάμεων, η ισορροπία εξωτερικών και εσωτερικών δυνάμεων δίδει την εξίσωση

$$\int_{(\partial V^*)} t_k v_k^* dS^* = \int_{(V^*)} \rho^{(0)} \frac{\partial \hat{e}}{\partial \Xi_{ij}} D_{ij}^* dV^* \approx \rho^{(0)} \frac{\partial \hat{e}}{\partial \Xi_{ij}} D_{ij}^* V^* \tag{9.73}$$

όπου κάναμε χρήση του θεωρήματος μέσης τιμής. Η παραπάνω σχέση μας δίδει μια έκφραση για το έργο $\delta W^{(ext)}$ των δυνάμεων που ασκούνται στο σύνορο του θεωρούμενου στοιχείου για μία απειροστική παραμόρφωση, $\delta\Xi_{ij} = D_{ij}^* dt$. Έτσι το έργο των εξωτερικών δυνάμεων που ασκούνται στην επιφάνεια του στοιχειώδους όγκου μπορεί να υπολογισθεί ανά μονάδα όγκου και δίδεται από την εξής έκφραση,\

$$\frac{\delta W^{(ext)}}{V^*} \approx \rho^{(0)} \frac{\partial \hat{e}}{\partial \Xi_{ij}} \delta\Xi_{ij} \tag{9.74}$$

Είναι φανερό ότι η σχέση αυτή εξασφαλίζει, ότι μία κλειστή όδευση στο χώρο των τροπών θα συνεπάγεται μηδενικό συνολικό έργο εξωτερικών δυνάμεων

---

[17] Αγγλ. *energetically admissible*

$$\frac{1}{V^*}\oint \delta W^{(e)} \approx \oint \rho^{(0)} \frac{\partial \hat{e}}{\partial \Xi_{ij}} \delta \Xi_{ij} = \rho^{(0)} \oint de = 0 \tag{9.75}$$

Αυτό σημαίνει με τη σειρά του ότι: η ύπαρξη ενός δυναμικού $e = \hat{e}(\Xi_{ij})$ για τον τανυστή των τάσεων σε σχέση με έναν ενεργειακώς συζυγή τανυστή των τροπών, εξασφαλίζει ότι σε κλειστές οδεύσεις στο χώρο των τροπών (π.χ. για κύκλους φορτίσεων-αποφορτίσεων) ενέργεια ούτε θα παράγεται ούτε θα χάνεται. Αυτή δε είναι και η καθοριστική φυσική ιδιότητα που απαιτούμε να έχει ένα ελαστικό υλικό. Στη προκείμενη δε περίπτωση το υλικό χαρακτηρίζεται ως *υπερελαστικό*[18].

Επιστρέφουμε τώρα στο ερώτημα των ενεργειακώς συζυγών τανυστών. Το θέμα αυτό αναλύεται διεξοδικά στην εργασία του Macvean[19]. Από την εργασία αυτή συνοψίζουμε τα εξής αποτελέσματα:

1. Ο 1.Ρ.-Κ. τανυστής των τάσεων είναι ενεργειακώς συζυγής με την βαθμίδα παραμορφώσεως[20]

$$\frac{1}{\rho}P = \frac{1}{\rho}\sigma_{im}F_{km}^{-1}\dot{F}_{ik} = \frac{1}{\rho^{(0)}}J\sigma_{mi}F_{km}^{-1}\dot{F}_{ik} = \frac{1}{\rho^{(0)}}\Sigma_{ik}\dot{F}_{ik} \tag{9.76}$$

2. Ο 2.Ρ.-Κ. τανυστής των τάσεων είναι ενεργειακώς συζυγής με τον Green τανυστή των τροπών

$$\frac{1}{\rho}P = \frac{1}{2\rho^{(0)}}K_{ij}\dot{\gamma}_{ij} \tag{9.77}$$

3. Όταν ο συστρεφόμενος τανυστής Cauchy των τάσεων και ο δεξιός (λογαριθμικός) τανυστής των τροπών Hencky είναι ομοαξονικοί (έχουν τους ίδιους κ.α.), τότε σε σύστημα κυρίων αξόνων έχουμε,

$$\frac{1}{\rho}P = \frac{1}{\rho}T_{\sigma ij}\dot{\lambda}_{ij}^{r} \tag{9.78}$$

Όταν ο τανυστής Cauchy (Kirchhoff) των τάσεων και ο αριστερός (λογαριθμικός) τανυστής των τροπών Hencky είναι ομοαξονικοί, τότε έχουμε,

$$\frac{1}{\rho}P = \frac{1}{\rho}\sigma_{ij}\dot{\lambda}_{ij}^{\ell} = \frac{1}{\rho^{(0)}}J\sigma_{ij}\dot{\lambda}_{ij}^{\ell} = \frac{1}{\rho^{(0)}}T_{ij}\dot{\lambda}_{ij}^{\ell} \tag{9.79}$$

---

[18] Πρβλ. Attard, M. M. (2003). Finite strain-isotropic hyperelasticity. Int. J. Solids Struct., 40, 4353-4378.

[19] D.M. Macvean (1968). Die Elementarbeit in einem Kontinuum und die Zuordnung von Spannungs- und Verzehrungstensoren. ZAMP, Vol. 19, 157-185.

[20] Πρβλ. $J = \dfrac{\rho^{(0)}}{\rho}$ και $\Sigma_{im} = J\sigma_{ki}F_{mk}^{-1}$

Παρατήρηση

Στο σημείο αυτό θα παρατηρήσουμε ότι ο γνωστός φορμαλισμός που ισχύει στα πλαίσια μιας θεωρίας μικρών παραμορφώσεων δεν μεταφέρεται απλά στη θεωρία μεγάλων παραμορφώσεων και η διαδικασία μετάβασης από μια θεωρία μικρών παραμορφώσεων σε μια θεωρία μεγάλων παραμορφώσεων δεν είναι τετριμμένη. Για παράδειγμα θα αναφερθούμε εδώ στις εξισώσεις ισορροπίας: Ως γνωστόν ο τανυστής των τάσεων κατά Cauchy ικανοποιεί την εξίσωση ισορροπίας,

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + f_j = 0 \tag{9.80}$$

Η αντίστοιχη εξίσωση ισορροπίας, εκπεφρασμένη συναρτήσει του 2. Piola-Kirchhoff είναι,

$$\frac{\partial}{\partial \xi_M}\left(F_K^k K^{KM}\right) + f^k = 0 \tag{9.81}$$

όπου F_K^k είναι η βαθμίδα της παραμορφώσεως. Υπενθυμίζουμε δε ότι στα πλαίσια της θεωρίας υπερ-ελαστικότητας και σύμφωνα με την Εξ. (9.77) η καταστατική εξίσωση για τον 2. Piola -Kirchhoff, έχει ως εξής,

$$\mathbf{K} = \frac{\partial W}{\partial \gamma} = \mathbf{K}^L(\xi, t) \tag{9.82}$$

Σχετικά οι Truesdell & Toupin[21] θα παρατηρήσουν:

While the expression of the first law is simple in terms of T^{kK}, the second law is complicated; for T^{KM}, the reverse holds. There is no simple and exact form[4] with $\boldsymbol{X}$ as independent variable.

---

[4] Other forms are given by SIGNORINI [1930, *5*, § 5] [1930, *6*, § 2], ZELMANOV [1948, *39*, Eq. (4)], and CASTOLDI [1948, *5*, § 7]. The form given by DEUKER [1941, *1*, Eq. (8.7)] was shown to be false by TRUESDELL [1952, *21*, § 26[12]]. The forms given by PLATRIER [1948, *20*, Eq. (13)] and GLEYZAL [1949, *12*, Eq. (5)] also seem dubious. Various approximate forms of (210.10) or (210.8) occur in the literature; e.g., NOVOZHILOV [1948, *18*, §§ 21—22]. Explicit forms for (210.8) in orthogonal curvilinear co-ordinates are worked out by YOSHIMURA [1953, *37*].

---

[21] Handbuch der Physik Bd. III/1, Sect. 210, p. 554 (1960)

9.7 Παράρτημα: Η υλική χρονική παραγώγιση σε κύριους άξονες[22]

Για τον υπολογισμό του ρυθμού του δεξιού (ή του αριστερού) λογαριθμικού τανυστή, όπως αναφέραμε ήδη και στο Κεφ. 2.3, κατ' αρχήν υπολογίζουμε τις ιδιο-τιμές και ιδιο-κατευθύνσεις του δεξιού Cauchy-Green τανυστή των τροπών. Σε σύστημα κυρίων αξόνων έστω,

$$C_{i'j'} = \delta_{i'j'} c_{(j')} \tag{9.83}$$

Υπενθυμίζουμε ότι ο **C** είναι ένας συμμετρικός, *θετικώς ορισμένος* πίνακας ($c_{i'} > 0$). Κατόπιν κατασκευάζουμε τον πίνακα του δεξιού τανυστή,

$$\boldsymbol{U}' = \sqrt{\boldsymbol{C}'} \Rightarrow \tag{9.84}$$

$$\left[U'\right] = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \sqrt{c_{1'}} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{c_{2'}} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{c_{3'}} \end{bmatrix} \tag{9.85}$$

Έστω $[Q]$ ο ορθογώνιος πίνακας του μετασχηματισμού, από το τυχόν σύστημα αξόνων στο σύστημα κ.α. του $[C]$. Ο πίνακας του δεξιού τανυστή στο σύστημα αξόνων $O(x_i)$ ορίζεται ως εξής,

$$U_{ij} = Q_{k'i} Q_{l'j} U'_{k'l'} \tag{9.86}$$

$$[U] = [Q]^T [U'][Q] \Rightarrow [U'] = [Q][U][Q]^T \tag{9.87}$$

ή

$$\boldsymbol{U}' = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{U}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}} \tag{9.88}$$

Ο ρυθμός του δεξιού τανυστή προκύπτει από τη σχέση

$$\dot{\boldsymbol{U}}' = (\boldsymbol{Q}\boldsymbol{U}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}})^{\bullet} = \dot{\boldsymbol{Q}}\boldsymbol{U}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{Q}\dot{\boldsymbol{U}}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{Q}\boldsymbol{U}\dot{\boldsymbol{Q}}^{\mathrm{T}} \tag{9.89}$$

Επειδή,

---

[22] Heng Xiao and Liang-Sen Chen. (2003). Hencky's logarithmic strain and dual stress–strain and strain–stress relations in isotropic finite hyperelasticity. Int. J. Solids Struct., 40, 1455-1463.
Itskov, M and Aksel, N. (2002). A closed-form representation for the derivative of non-symmetric tensor power series. Int.J. Solids Struct., 39, 5963-5978.
Itskov, M. (2002). The derivative with respect to a tensor: some theoretical aspects and applications. ZAMM, 82,535-544.

$$\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{I} \Rightarrow \dot{\boldsymbol{Q}}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{Q}\dot{\boldsymbol{Q}}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{O} \tag{9.90}$$

και

$$(\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}})^{\bullet} = - \quad \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{Q}}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}} \Rightarrow \tag{9.91}$$

$$\dot{\boldsymbol{U}}' = \dot{\boldsymbol{Q}}\boldsymbol{U}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{Q}\dot{\boldsymbol{U}}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{Q}\boldsymbol{U} \quad \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{Q}}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}} \tag{9.92}$$

Η υλική παράγωγος του τανυστή σε κ.α. $\tilde{\boldsymbol{U}}$ ορίζεται με το μετασχηματισμό της ως άνω εκφράσεως στο τυχόν σύστημα συντεταγμένων

$$\tilde{\boldsymbol{U}} = \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{U}}'\boldsymbol{Q} \tag{9.93}$$

οπότε

$$\tilde{\boldsymbol{U}} = \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{Q}}\boldsymbol{U} + \dot{\boldsymbol{U}} - \boldsymbol{U}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{Q}} \tag{9.94}$$

Έστω,

$$\boldsymbol{\Omega} = \dot{\boldsymbol{Q}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q} = -\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{Q}} \tag{9.95}$$

$$[\Omega] = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\omega}_3 & \dot{\omega}_2 \\ \dot{\omega}_3 & 0 & -\dot{\omega}_1 \\ -\dot{\omega}_2 & \dot{\omega}_1 & 0 \end{bmatrix} \tag{9.96}$$

τότε

$$\tilde{\boldsymbol{U}} = \dot{\boldsymbol{U}} - \boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{U} + \boldsymbol{U}\boldsymbol{\Omega} \tag{9.97}$$

και

$$\dot{\boldsymbol{U}} = \tilde{\boldsymbol{U}} + \boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{U} - \boldsymbol{U}\boldsymbol{\Omega} \tag{9.98}$$

$$\left[\tilde{U}\right] = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \frac{1}{2\sqrt{c_{1'}}}\dot{c}'_{1'} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2\sqrt{c_{2'}}}\dot{c}'_{2'} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2\sqrt{c_{3'}}}\dot{c}_{3'} \end{bmatrix} \tag{9.99}$$

Οπότε με τον ορισμό

$$\tilde{\lambda}^{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}} \ln \dot{\boldsymbol{U}}'\boldsymbol{Q} \tag{9.100}$$

μπορούμε να υπολογίσουμε το ρυθμό μεταβολής του λογαριθμικού τανυστή

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}}^r = \tilde{\boldsymbol{\lambda}}^r + \boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\lambda}^r - \boldsymbol{\lambda}^r\boldsymbol{\Omega} \tag{9.101}$$