

8. Η ΑΡΧΕΣ ΔΙΑΤΗΡΗΣΕΩΣ ΟΡΜΗΣ & ΣΤΡΟΦΟΡΜΗΣ

| | | |
|------|---|-----|
| 8. | Η ΑΡΧΕΣ ΔΙΑΤΗΡΗΣΕΩΣ ΟΡΜΗΣ & ΣΤΡΟΦΟΡΜΗΣ | 249 |
| 8.1 | Η αρχή διατηρήσεως της ορμής | 251 |
| 8.2 | Το θεμελιώδες θεώρημα του Cauchy της Μ.Σ.Μ. | 253 |
| 8.3 | Ο αντικειμενικός τανυστής των τάσεων κατά Cauchy | 256 |
| 8.4 | Ο 1 ^{ος} νόμος των τάσεων του Cauchy | 257 |
| 8.5 | Οι εξισώσεις Euler για ιδεατά ρευστά σε δύο διαστάσεις | 258 |
| 8.6 | Η εξίσωση ποσότητας κινήσεως για μόνιμη ροή ιδεατού ρευστού | 260 |
| 8.7 | Δυνάμεις σε καμπύλωση σωλήνα με απομείωση διατομής | 261 |
| 8.8 | Οι εξισώσεις Navier της γραμμικής Ελαστοδυναμικής | 271 |
| 8.9 | Καθολικά επίπεδα ελαστικά κύματα | 272 |
| 8.10 | Η αρχή διατηρήσεως της στροφορμής | 275 |
| 8.11 | Η εξίσωση ποσότητας στροφορμής για μόνιμη ροή ιδεατού ρευστού | 277 |
| 8.12 | Μόνιμη ροή σε έναν όγκο αναφοράς με μια εισροή και μια εκροή | 279 |
| 8.13 | Ο τανυστής των τάσεων κατά Cauchy | 282 |
| 8.14 | Ο 1 ^{ος} Piola-Kirchhoff τανυστής των τάσεων | 284 |
| 8.15 | Ο 2 ^{ος} Piola-Kirchhoff και άλλοι τανυστές των τάσεων | 287 |

Η εκάστοτε διατύπωση των Α.Δ. ορίζει και περιορίζει συγχρόνως την μηχανική συμπεριφορά του εκάστοτε Συνεχούς Μέσου¹. Στο κεφάλαιο αυτό θα μας απασχολήσει η Αρχή Διατηρήσεως της Ορμής (Α.Δ.Ο.) και της Στροφορμής (Α.Δ.Σ.). Η Α.Δ.Ο. οδηγεί φυσικά στον ορισμό του τανυστή των τάσεων κατά Cauchy, στις δυναμικές εξισώσεις και αυτές με τη σειρά τους στις στατικές εξισώσεις ισορροπίας. Οι αρχές διατηρήσεως ορμής και στροφορμής θα επεξηγηθούν στη βάση παραδειγμάτων από τη Ρευστομηχανική και την Ελαστοδυναμική.

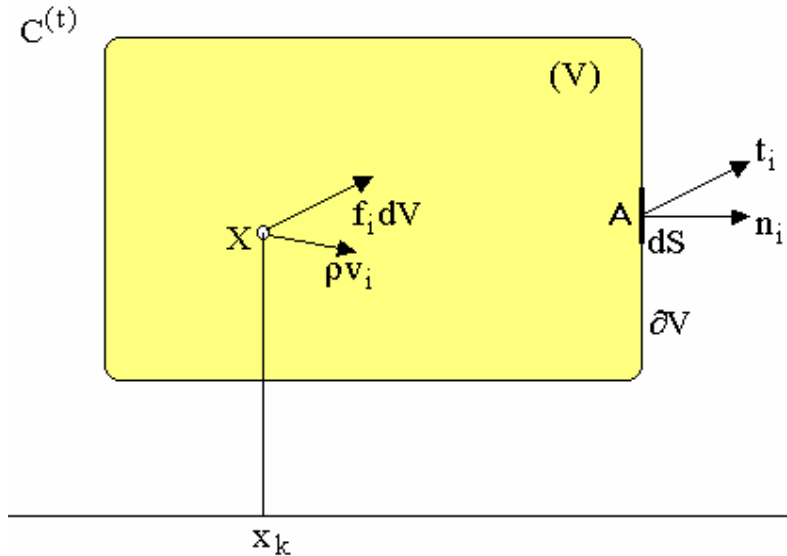
¹ Η διατύπωση των Α.Δ. Ορμής και Στροφορμής, εξαρτάται από την υπόθεση που θα κάνουμε όσον αφορά τους βαθμούς ελευθερίας του υλικού σημείου. Με την έννοια αυτή θα διακρίνουμε γενικώς ανάμεσα σε Μηχανική του Συνεχούς Μέσου κατά Boltzmann και κατά Cosserat ανάλογα αν το ΥΣ έχει 3 ΒΕ., που αντιστοιχούν στο διάνυσμα μετατόπισής του, ή αν έχει 6 ΒΕ, που αντιστοιχούν σε μετατόπιση και σε στροφή του ΥΣ.

© 8. Η ΑΡΧΗ ΔΙΑΤΗΡΗΣΕΩΣ ΤΗΣ ΟΡΜΗΣ, 2008

Ιωάννης Γ. Βαρδουλάκης, Dr-Ing., Καθηγητής της Μηχανικής στο Ε.Μ.Πολυτεχνείο

Τ.Θ. 144, Παιανία 190-02, <http://geolab.mechan.ntua.gr/>, I.Vardoulakis@mechan.ntua.gr

8.1 Η αρχή διατηρήσεως της ορμής



Εικ. 8-1: Σχηματική παράσταση των όρων που υπεισέρχονται στη μαθηματική διατύπωση της Α.Δ.Ο.

Θα δεχθούμε ότι σε ένα Συνεχές Σώμα **B** το οποίο τη χρονική στιγμή t καταλαμβάνει τον όγκο V με σύνορο ∂V δρουν δύο ειδών δυνάμεις (Εικ. 8-1):

1. Καθολικές δυνάμεις² $\mathbf{f} dV$, οι οποίες ασκούνται εξ αποστάσεως (π.χ. λόγω πεδίου βαρύτητας) στα υλικά σημεία του σώματος **B** καθ' όλη την έκταση του όγκου V . Π.χ. το ειδικό βάρος των Υ.Σ. αντιστοιχεί σε ένα διανυσματικό πεδίο, τη καθολική δύναμη, $\mathbf{f} = \rho \mathbf{g}$, όπου \mathbf{g} είναι το διάνυσμα της επιταχύνσεως της βαρύτητας στη θεωρούμενη θέση (συνήθως $g = 9.807 m/s^{-2}$). Οι καθολικές δυνάμεις έχουν διαστάσεις δυνάμεως ανά μονάδα όγκου, $[f_i] = FL^{-3}$.
2. Επιφανειακές δυνάμεις³ $\mathbf{t} dS$, που ασκούνται εξ επαφής σε κάποια ή σε όλα τα σημεία του συνόρου ∂V του θεωρούμενου σώματος **B**. Το διάνυσμα \mathbf{t} έχει διαστάσεις δυνάμεως ανά μονάδα επιφανείας, $[t_i] = FL^{-2}$.

Η συνολική δύναμη που ασκείται στο σώμα **B** υπολογίζεται ως η συνισταμένη των καθολικών και των επιφανειακών δυνάμεων,

² Αγγλ. *volume forces*

³ Αγγλ. *surface tractions*

$$F_i = \int_{(V)} f_i dV + \int_{(\partial V)} t_i dS \quad (8.1)$$

Αντιστοίχως η συνολική ορμή του σώματος **B** υπολογίζεται ως το άθροισμα της ορμής των ΥΣ. αυτού

$$I_i = \int_{(B)} v_i dm = \int_{(V)} \rho v_i dV \quad (8.2)$$

Η Α.Δ.Ο. διατυπώνεται ως εξής: Η συνολική εξωτερική δύναμη που ασκείται στο σώμα **B** προκαλεί αλλαγή της συνολικής ορμής του σώματος αυτού

$$F_i = \frac{dI_i}{dt} \quad (8.3)$$

Για την επεξεργασία της παραπάνω εξίσωσης κάνουμε χρήση του θεωρήματος μεταφοράς του Reynolds⁴ και της Α.Δ.Μ.. Πράγματι από τον ορισμό της συνολικής ορμής, Εξ. (8.2), και το θεώρημα Μεταφοράς

$$\begin{aligned} \phi &= \varphi^E(x_k, t) \quad , \quad \psi(t) = \int_{(V)} \varphi^E(x_k, t) dV \Rightarrow \\ \dot{\psi} &= \int_{(V)} (\dot{\phi} + \phi \partial_k v_k) dV \end{aligned} \quad (8.4)$$

για $\phi_i = \rho v_i$ παίρνουμε

$$\begin{aligned} \frac{dI_i}{dt} &= \int_{(V)} \left((\rho v_i)^\bullet + \rho v_i \partial_k v_k \right) dV \\ &= \int_{(V)} (\rho \dot{v}_i + \dot{\rho} v_i + \rho v_i \partial_k v_k) dV \\ &= \int_{(V)} \left(\rho \dot{v}_i + \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x_k} v_k + \rho \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right) v_i \right) dV \\ &= \int_{(V)} \left(\rho \dot{v}_i + \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho v_k) \right) v_i \right) dV \end{aligned} \quad (8.5)$$

Αν δεχτούμε ότι ισχύει η Α.Δ.Μ., όπως αυτή διατυπώθηκε στο Κεφ. 7.2,

⁴ Κεφ. 7.1

$$\int_{(V)} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \partial_k (\rho v_k) \right) dV = 0 \quad (8.6)$$

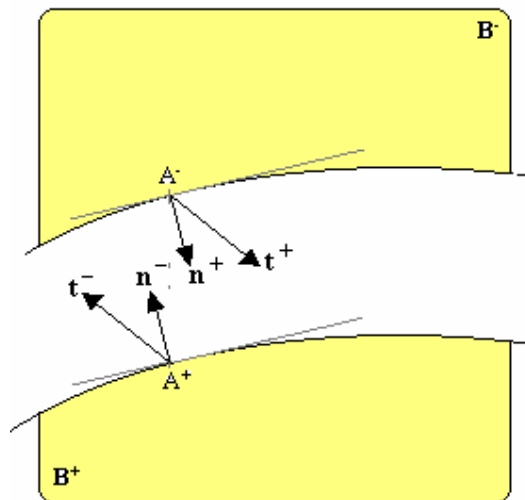
τότε η Εξ. (8.5) δίδει,

$$\frac{dI_i}{dt} = \int_{(V)} \rho \dot{v}_i dV \quad (8.7)$$

Οι παραπάνω Εξ. (8.3), (8.1) και (8.7) οδηγούν στην εξής μορφή της Α.Δ.Ο.

$$\int_{(V)} \rho \dot{v}_i dV = \int_{(V)} f_i dV + \int_{(\partial V)} t_i dS \quad (8.8)$$

8.2 Το θεμελιώδες θεώρημα του Cauchy της Μ.Σ.Μ.



Εικ. 8-2: Εσωτερικές δυνάμεις τις οποίες δεχόμεθα ότι αναπτύσσονται στο εσωτερικό ενός σώματος στα χείλη των επιφανειών που αποκαλύπτουν μια υποθετικής τομής.

Για να προχωρήσουμε τώρα σε αναλυτικές εκφράσεις της Α.Δ.Ο., Εξ. (8.8), πρέπει να εισάγουμε την έννοια της **τάσεως**⁵. Η μαθηματική θεωρία των τάσεων διατυπώθηκε στη γενική της μορφή από τον Louis Augustin Cauchy⁶. Για την επεξήγηση αυτής της διαδικασίας κάνουμε την εξής παραδοχή: Θεωρούμε μία τυχούσα επιφάνεια δια του τυχόντος σημείου A του σώματος B η οποία χωρίζει το σώμα αυτό σε δύο τμήματα B⁺ και B⁻ (Εικ. 8-2). Στη θέση του σημείου A εμφανίζονται τώρα τα σημεία A⁺ και A⁻ στα αντίστοιχα τμήματα του

⁵ Πρβλ. Κεφ. 6.4.

⁶ Cauchy, A. (1822). Recherches sur l'équilibre et le mouvement intérieure des corps solides ou fluides, élastique ou non élastique. Bulletin de la Société de Philomatique, Jan. 1823. Cauchy, A. (1827). De la pression ou tension dans un corps solide. Bulletin de la Société de Philomatique, II:41-56.

σώματος. Η μηχανική επίδραση του σώματος \mathbf{B}^- πάνω στο σημείο A^+ του σώματος \mathbf{B}^+ εκφράζεται με την εξάσκηση ενός *επιφανειακού ελκυστή*⁷ \mathbf{t}^+ , που δρα στο σημείο A^+ της εν λόγω υποθετικής επιφάνειας τομής. Στο αντικρινό σημείο A^- επί του σώματος \mathbf{B}^- δρα αντιστοίχως ο ελκυστής \mathbf{t}^- , ο οποίος με τη σειρά του συνιστά τη μηχανική δράση του \mathbf{B}^+ πάνω στο σώμα \mathbf{B}^- στο σημείο A^- . Παρατηρούμε τώρα ότι στα σημεία A^+ και A^- μπορούμε να ορίσουμε μονοσήμαντα τα μοναδιαία διανύσματα \mathbf{n}^+ και \mathbf{n}^- , τα οποία είναι κάθετα προς την επιφάνεια τομής στη θεωρούμενη θέση και δείχνουν προς τα έξω των αντίστοιχων σωμάτων, οπότε,

$$\mathbf{n} = \mathbf{n}^+ = -\mathbf{n}^- \quad (8.9)$$

Εφοδιάζουμε τώρα το Συνεχές Μέσο με την εξής θεμελιώδη σχέση συμμετρίας,

$$\mathbf{t}^+(\mathbf{n}) = -\mathbf{t}^-(\mathbf{n}) \quad (8.10)$$

που αναφέρεται στη βιβλιογραφία ως η *Αρχή των Τάσεων*⁸ του Cauchy και παριστά την επέκταση του 3^{ου} Νόμου του Newton περί ισότητας «δράσεως» και «αντιδράσεως», ως σχέσεως ισορροπίας για τις «εσωτερικές δυνάμεις». Στα πλαίσια της Μηχανικής η *Αρχή των Τάσεων* ισχύει για κάθε Υ.Σ. του σώματος \mathbf{B} είτε αυτό βρίσκεται στην εξωτερική του επιφάνεια είτε πάνω σε μια εσωτερική ιδεατή τομή. Με τη βοήθεια των παραπάνω ορισμών μπορούμε τώρα να διατυπώσουμε το θεμελιώδες

Θεώρημα Cauchy

Αν ο επιφανειακός ελκυστής $t_i(x_k, n_l)$, που είναι ορισμένος για κάθε σημείο x_k σε μια ανοιχτή περιοχή \mathcal{R} και για κάθε διάνυσμα n_l , είναι συνεχής συνάρτηση της θέσεως x_k , τότε το διάνυσμα $t_i(x_k, n_l)$ είναι γραμμική συνάρτηση του διανύσματος n_l και ως εκ τούτου υπάρχει ένας τανυστής 2^{ου} τάξεως, $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^E(x_k, t)$, έτσι ώστε

$$t_i = \sigma_{ki} n_k \quad (8.11)$$

Υπενθυμίζουμε ότι το εξωτερικό μοναδιαίο διάνυσμα n_l είναι κάθετο στη θεωρούμενη στοιχειώδη επιφάνεια dS και ότι ο τανυστής 2^{ου} τάξεως σ_{ij} , καλείται τανυστής των τάσεων κατά Cauchy. Παρατηρούμε επίσης ότι λόγω της ως άνω σχέσεως, Εξ. (8.11), ο ελκυστής t_i δεν παριστά ένα διανυσματικό πεδίο της μορφής $s_i = s_i^E(x_k, t)$, όπως π.χ. είναι οι καθολικές δυνάμεις, διότι ελκυστής t_i δεν εξαρτάται μόνο από την θέση του Υ.Σ. και το χρόνο αλλά και από το μοναδιαίο εξωτερικό διάνυσμα n_l , που είναι κάθετο στη στοιχειώδη επιφάνεια dS πάνω στην οποία αυτός δρα. Για να τονίσουμε αυτή την ιδιαιτερότητα του ελκυστή των τάσεων θα συμβολίσουμε το αντίστοιχο διάνυσμα ως εξής,

⁷ Αγγλ. *surface traction vector*

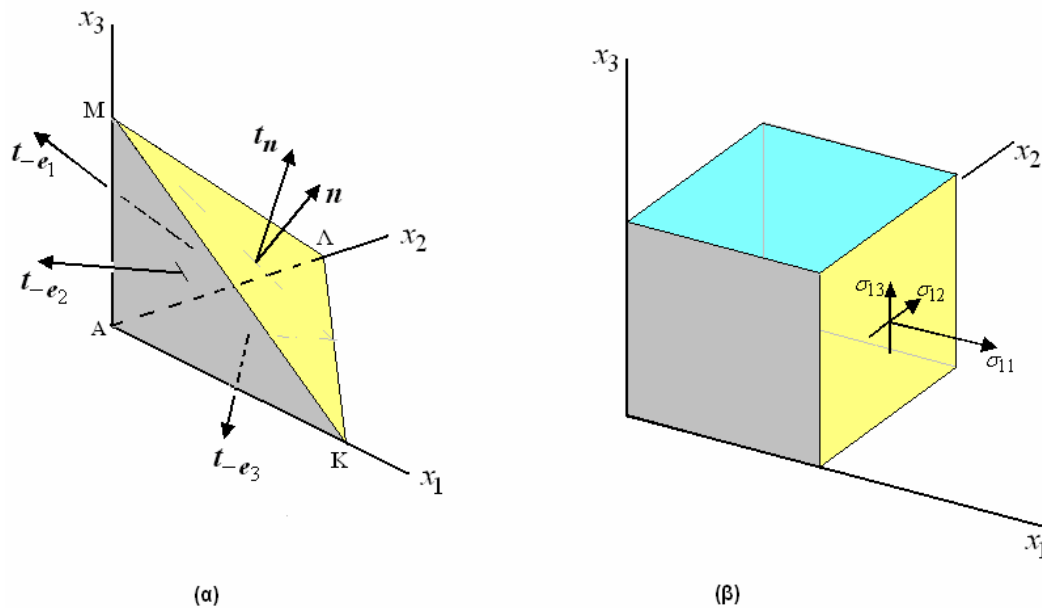
⁸ Αγγλ. *stress principle*.

$$\bar{t}_{\bar{n}} = t_i \bar{e}_i = \sigma_{ki} n_k \bar{e}_i \quad \text{ή} \quad \mathbf{t}_n = \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{n} \quad (8.12)$$

Η μαθηματικώς αυστηρή απόδειξη της παραπάνω γραμμικής σχέσεως μεταξύ του ελκυστή \mathbf{t}_n , ο οποίος δρα σε τυχαίο επίπεδο δια του τυχαίου σημείου $A(x_k)$ σημείου με μοναδιαίο εξωτερικό διάνυσμα \mathbf{n} στο επίπεδο αυτό, μέσω του τανυστή των τάσεων, Εξ. (8.11) ή (8.12), είναι αρκετά τεχνική και παρουσιάστηκε από τους Gurtin & Martins (1976)⁹. Η απόδειξη ουσιαστικά κάνει χρήση της ολοκληρωτικής εξίσωσης (8.8), όπου για μικρούς σχετικά όγκους ($V \rightarrow 0$) και φραγμένα πεδία $f_i(x_k, t)$, $\rho(x_k, t)$ και $\dot{v}_i(x_k, t)$ τα τριπλά ολοκληρώματα είναι αμελητέα σε σχέση με το επιφανειακό ολοκλήρωμα, και ως εκ τούτου,

$$F_i \approx \int_{(\partial V)} t_i(x_k, n_l) dS \approx 0 \quad (8.13)$$

Η σχέση αυτή συχνά θα αποδοθεί ως σχέση ισορροπίας των δυνάμεων που ασκούνται σε ένα στοιχειώδη μικρό όγκο $V = O(\varepsilon^3)$ με επιφάνεια $\partial V = O(\varepsilon^2)$.



Εικ. 8-3: α) Δυνάμεις ασκούμενες στις έδρες του στοιχειώδους τετράεδρου του Cauchy β) Ορισμός των συνιστουσών του ελκυστή των τάσεων που ασκείται στο επίπεδο \mathbf{e}_1

Για την απόδειξη των Εξ. (8.11) ή (8.12) ο εν λόγω όγκος θα εξειδικευθεί σε ένα στοιχειώδες τετράεδρο με κορυφή το σημείο A και τρεις έδρες κάθετες προς τους άξονες του συστήματος συντεταγμένων (Εικ. 8-3) και η Εξ. (8.13) θα αποδοθεί ως η εξίσωση ισορροπίας των

⁹ Gurtin M.E. and Martins L.C. (1976). Cauchy's theorem in classical physics. Archive for Rational Mechanics and Analysis, 60 (4), 305-324.

δυνάμεων που ασκούνται πάνω στοιχειώδες τετράεδρο. Πράγματι, λόγω της Εξ. (8.10) οι ελκυστές των τάσεων στις έδρες του τετράεδρου που είναι κάθετες προς τους άξονες του συστήματος συντεταγμένων γράφονται ως εξής

$$\vec{t}_{-\vec{e}_1} = -\vec{t}_{\vec{e}_1} \quad , \quad \vec{t}_{\vec{e}_1} = \sigma_{11}\vec{e}_1 + \sigma_{12}\vec{e}_2 + \sigma_{13}\vec{e}_3 \quad \text{κ.ο.κ.} \quad (8.14)$$

Έστω

$$\vec{t}_{\vec{n}} = \sigma_{n1}\vec{e}_1 + \sigma_{n2}\vec{e}_2 + \sigma_{n3}\vec{e}_3 \quad (8.15)$$

Η ισοροπία των δυνάμεων που ασκούνται πάνω στις έδρες του θεωρούμενου στοιχειώδους τετράεδρου οδηγεί στην εξής διανυσματική εξίσωση

$$\vec{t}_{\vec{n}}dS - \vec{t}_{\vec{e}_1}dS_1 - \vec{t}_{\vec{e}_2}dS_2 - \vec{t}_{\vec{e}_3}dS_3 = 0 \quad (8.16)$$

Η βάση ΚΑΜ του τετράεδρου λαμβάνεται κάθετη προς το μοναδιαίο διάνυσμα \mathbf{n} και οι τρεις άλλες πλευρές του κάθετες προς τους άξονες του συστήματος συντεταγμένων, οπότε ,

$$\begin{aligned} (\text{ΚΑΜ}) &= dS \\ (\text{ΑΑΜ}) &= dS_1 = n_1dS \\ (\text{ΑΜΚ}) &= dS_2 = n_2dS \\ (\text{ΑΚΛ}) &= dS_3 = n_3dS \end{aligned} \quad (8.17)$$

Από τις Εξ. (8.16) και (8.17) προκύπτει τελικά η Εξ. (8.11),

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{n1} \\ \sigma_{n2} \\ \sigma_{n3} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{21} & \sigma_{31} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{32} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix} \quad \text{ή} \quad \mathbf{t}_{\mathbf{n}} = \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{n} \quad (8.18)$$

8.3 Ο αντικειμενικός τανυστής των τάσεων κατά Cauchy

Για την εύρεση του νόμου μετασχηματισμού του πίνακα των τάσεων ξεκινάμε από την Εξ. (8.18),

$$\{t_n\} = [\sigma]^T \{n\} \quad (8.19)$$

Παρατηρούμε ότι τόσο ο ελκυστής όσο και το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα είναι αντικειμενικά διανύσματα, αφού μπορούν να παρασταθούν ως διαφορά διανυσμάτων θέσης. Άρα για ένα κανονικό ορθογώνιο μετασχηματισμό των καρτεσιανών συντεταγμένων έχουμε,

$$\begin{aligned} \{t'_n\} &= [Q]\{t_n\} \quad , \quad \{n'\} = [Q]\{n\} \\ \{t_n\} &= [Q]^T\{t'_n\} \quad , \quad \{n\} = [Q]^T\{n'\} \end{aligned} \quad (8.20)$$

Μέσω της Εξ.(8.19) έχουμε τον ορισμό του πίνακα των τάσεων σε κάθε ένα από τα δύο συστήματα συντεταγμένων, άρα,

$$\{t'_n\} = [\sigma']^T \{n'\} \quad (8.21)$$

και

$$\{t_n\} = [Q]^T \{t'_n\} = [\sigma]^T \{n\} = [\sigma]^T [Q]^T \{n'\} \quad (8.22)$$

Οπότε,

$$[Q][Q]^T \{t'_n\} = [Q][\sigma]^T [Q]^T \{n'\} \quad (8.23)$$

ή

$$\{t'_n\} = [Q][\sigma]^T [Q]^T \{n'\} \quad (8.24)$$

Άρα

$$[\sigma']^T = [Q][\sigma]^T [Q]^T \quad \text{ή} \quad [\sigma'] = [Q][\sigma][Q]^T \quad (8.25)$$

ο.ε.δ.

8.4 Ο 1^{ος} νόμος των τάσεων του Cauchy

Με τη βοήθεια του παραπάνω ορισμού του τανυστή των τάσεων, Εξ. (8.11), η Α.Δ.Ο., Εξ. (8.8) παίρνει την εξής μορφή

$$\int_{(V')} \rho \dot{v}_i dV = \int_{(V')} f_i dV + \int_{(\partial V')} \sigma_{ki} n_k dS \quad (8.26)$$

όπου $V' \subseteq V$ ο όγκος και $\partial V'$ το σύνορο του τυχόντος τμήματος $\mathbf{B}' \subseteq \mathbf{B}$ του θεωρούμενου σώματος.

Βάσει του θεωρήματος Gauss το επιφανειακό ολοκλήρωμα στην παραπάνω έκφραση της Α.Δ.Ο., Εξ. (8.26), μπορεί να μετατραπεί σε ολοκλήρωμα πάνω στον όγκο

$$\int_{(\partial V')} \sigma_{ki} n_k dS = \int_{(V')} \partial_k \sigma_{ki} dV \quad (8.27)$$

Από τις Εξ. (8.26) και (8.27) προκύπτουν οι λεγόμενες *δυναμικές εξισώσεις* που συνδέουν την απόκλιση της τάσεως με τις καθολικές και τις 'αδρανειακές' δυνάμεις,

$$\int_{(V')} (f_i + \partial_k \sigma_{ki} - \rho \dot{v}_i) dV = 0 \quad (8.28)$$

Υποθέτοντας ότι η ολοκληρωτική εξίσωση (8.28) ισχύει για κάθε $\forall V' \subseteq V$, από αυτή προκύπτουν οι τοπικές δυναμικές εξισώσεις

$$\partial_k \sigma_{ki} + f_i = \rho \dot{v}_i \quad \forall x_k \in V \quad (8.29)$$

ή

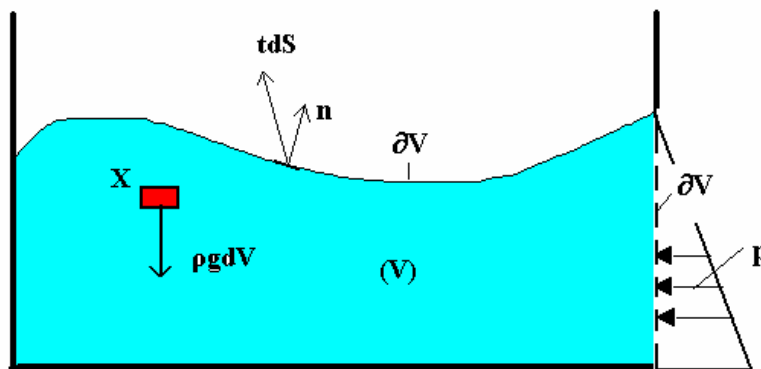
$$\text{Div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} = \rho \dot{\mathbf{v}} \quad (8.30)$$

Οι παραπάνω εξισώσεις (8.30) συνιστούν το γνωστό στη βιβλιογραφία *1^ο Νόμο των τάσεων του Cauchy*. Σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων $O(x, y, z)$ οι δυναμικές εξισώσεις γράφονται αναλυτικά ως εξής:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} + f_x &= \rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z} + f_y &= \rho \left(\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + f_z &= \rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (8.31)$$

Παρατηρούμε ότι λόγω των μεταθετικών όρων οι δυναμικές εξισώσεις (8.31) συνιστούν γενικώς ένα μη-γραμμικό σύστημα διαφορικών εξισώσεων ως προς την ταχύτητα του Υ.Σ..

8.5 Οι εξισώσεις Euler για ιδεατά ρευστά σε δύο διαστάσεις



Εικ. 8-4: Δυνάμεις ασκούμενες σε ένα όγκο ιδεατού ρευστού

Στην περίπτωση ροής ενός ιδεατού ασυμπίεστου ρευστού σε δύο διαστάσεις η εξίσωση διατηρήσεως της μάζας εκφράζεται από τη συνθήκη συνέχειας για τις συνιστώσες της ταχύτητας (Κεφ. 7.4):

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (8.32)$$

Δεχόμεθα ότι σε κάθε σημείο του ρευστού ασκούνται καθολικές δυνάμεις λόγω βαρύτητας (Εικ. 8-4),

$$f_x = \rho g_x \quad , \quad f_z = \rho g_z \quad (8.33)$$

όπου g_x και g_z είναι οι συνιστώσες της επιταχύνσεως της βαρύτητας. Κάνουμε επίσης την παραδοχή ότι το ρευστό είναι *ιδεατό*, γεγονός που σημαίνει ότι το ρευστό μπορεί να παραλάβει μόνο *πίεση* (οι διατμητικές τάσεις είναι μηδενικές). Στην περίπτωση αυτή ο ταυνοστής των τάσεων είναι ισότροπος και περιγράφεται πλήρως από ένα βαθμωτό μέγεθος, την πίεση $p = p^E(x, z, t)$, που λαμβάνεται ως θετική όταν οι αντίστοιχες ορθές τάσεις είναι θλιπτικές,

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} = \sigma_{zz} &= -p \quad (p > 0) \\ \sigma_{xz} = \sigma_{zx} &= 0 \end{aligned} \quad (8.34)$$

Οι δυναμικές εξισώσεις (5.13) παίρνουν τη μορφή

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + g_x \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + g_z \end{aligned} \quad (8.35)$$

Η Εξ. Συνέχειας (8.32) και οι παραπάνω δυναμικές Εξ. (8.35) συνιστούν τις λεγόμενες **εξισώσεις Euler** σε δύο διαστάσεις για ασυμπίεστα, ιδεατά ρευστά. Μετά από τη διατύπωση των εξισώσεων αυτών από τον Euler, ο Lagrange παρατήρησε, ότι όλη η Ρευστομηχανική θα μπορούσε να αναχθεί σε ένα πρόβλημα Μαθηματικής Αναλύσεως, αρκεί να αποδειχθεί ότι οι εξισώσεις αυτές είναι ολοκληρώσιμες. Πράγματι ο Lagrange απέδειξε ότι οι εξισώσεις Euler ολοκληρώνονται σε δύο ξεχωριστές περιπτώσεις: (1) Για ροή εκ δυναμικού (αστρόβιλη ροή). (2) Για μόνιμη ροή.



Εικ. 8-5: Leonhard Euler (15.04.1707 Base-18.09.1783 St Petersburg)

8.6 Η εξίσωση ποσότητας κινήσεως για μόνιμη ροή ιδεατού ρευστού

Κατ' αρχήν παρατηρούμε ότι σε ένα ιδεατό ρευστό ο τανυστής των τάσεων είναι ισότροπος και απεικονίζεται σε κάθε σύστημα αξόνων με ένα ισότροπο μητρώο της μορφής

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix} \quad (8.36)$$

όπου p είναι η πίεση του ρευστού στην τυχούσα θέση. Στην περίπτωση αυτή ο ελκυστής των τάσεων είναι πάντοτε κάθετος στην επιφάνεια επί της οποίας αυτός ασκείται. Στην περίπτωση αυτή η Εξ.(8.11) γράφεται

$$t_i = -pn_i \quad (8.37)$$

και η Α.Δ.Ο. , Εξ. (8.26) εκφράζεται από την ολοκληρωτική εξίσωση

$$\int_{(V)} \rho \dot{v}_i dV = \int_{(V)} f_i dV - \int_{(\partial V)} pn_i dS \quad (8.38)$$

Παρατηρούμε επίσης ότι η εξίσωση αυτή μπορεί να ερμηνευθεί θεωρώντας τον όγκο (V) ως ένα σταθερό στο χώρο όγκο αναφοράς¹⁰.

Στην περίπτωση μόνιμης ροής έχουμε ότι η επιτάχυνση περιλαμβάνει μόνο μεταθετικούς όρους

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} = 0 \Rightarrow \dot{v}_i = \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} = v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \quad (8.39)$$

Επίσης για ένα ιδεατό (ασυμπίεστο) ρευστό έχουμε ότι το πεδίο ταχυτήτων είναι 'ελεύθερο πηγών', οπότε η απόκλιση του μηδενίζεται και η πυκνότητά του είναι σταθερή. Οπότε:

$$\frac{\partial v_k}{\partial x_k} = 0 \Rightarrow \dot{v}_i = v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + v_i \frac{\partial v_k}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} (v_k v_i) \quad (8.40)$$

και

$$\rho = \text{σταθ.} \Rightarrow \rho \dot{v}_i = \rho \frac{\partial}{\partial x_k} (v_k v_i) = \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho v_k v_i) \quad (8.41)$$

Εν προκειμένω η μεταβολή της ορμής υπολογίζεται βάσει του θεωρήματος του Gauss ως εξής:

¹⁰ Αγγλ. *control volume*

$$\frac{dI_i}{dt} = \int_{(V)} \rho \dot{v}_i dV = \int_{(V)} \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho v_k v_i) dV = \int_{(\partial V)} \rho v_k v_i n_k dS = \int_{(\partial V)} q_n v_i dS \quad (8.42)$$

όπου

$$q_n = \rho v_n \quad (8.43)$$

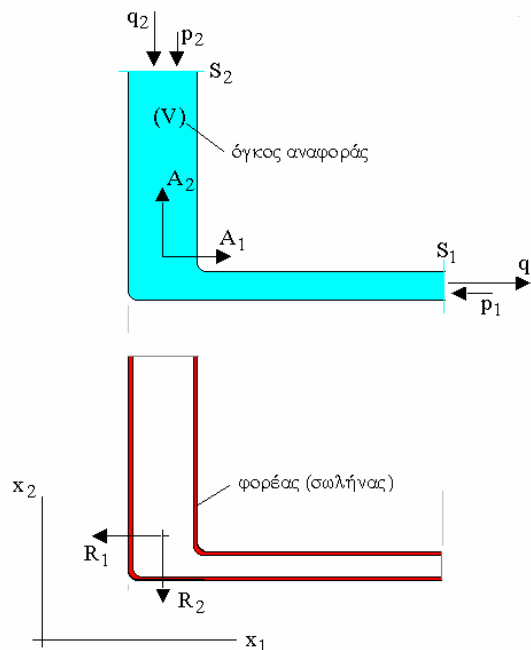
και

$$v_n = v_k n_k \quad (8.44)$$

Με τις παραπάνω παρατηρήσεις η Α.Δ.Ο., Εξ.(8.38), παίρνει τη μορφή της γνωστής από την Ρευστομηχανική εξίσωσης ποσότητας κινήσεως

$$\int_{(\partial V)} q_n v_i dS = \int_{(V)} f_i dV - \int_{(\partial V)} p n_i dS \quad (8.45)$$

8.7 Δυνάμεις σε καμπύλωση σωλήνα με απομείωση διατομής



Εικ. 8-6: Όγκος αναφοράς και «δοχείο»

Θεωρούμε τη ροή ενός ιδεατού ρευστού στην περιοχή μιας καμπυλώσεως κατά γωνία $\beta = 90^\circ$ ενός σωλήνα, ο οποίος συγχρόνως απομειώνεται από τη διατομή S_1 στη διατομή S_2 , και ζητάμε να υπολογίσουμε τη δύναμη που ασκεί το ρευστό στο σωλήνα στη θέση αυτή (Εικ. 8-6). Για το σκοπό αυτό θεωρούμε τον όγκο αναφοράς του ρευστού μεταξύ των

διατομών (1) και (2): Στην είσοδο (2) η ορθή προς τη ροή διατομή έχει εμβαδό S_2 , η πίεση ένταση p_2 και η ταχύτητα ροής είναι, $\vec{v}^{(2)} = -v_2 \vec{e}_2$. Οι αντίστοιχες τιμές στην έξοδο (1) είναι S_1, p_1 και $\vec{v}^{(1)} = v_1 \vec{e}_1$. Οι παροχές στις διατομές εισόδου και εξόδου είναι αντιστοίχως, $q_n^{(2)} = \rho \vec{v}^{(2)} \cdot \vec{e}_2 = -\rho v_2$ και $q_n^{(1)} = \rho \vec{v}^{(1)} \cdot \vec{e}_1 = \rho v_1$. ε δεδομένη την πίεση και την ταχύτητα στην είσοδο (διατομή 2), από την εξίσωση *συνέχειας της ροής* μπορούμε να υπολογίσουμε την ταχύτητα στην έξοδο (διατομή 1),

$$v_1 S_1 = v_2 S_2 \Rightarrow v_1 = \frac{S_2}{S_1} v_2$$

Παρατηρούμε ότι η συνολική παροχή είναι σε κάθε θέση σταθερή,

$$Q_1 = q_1 S_1 = \rho v_1 S_1 = \rho \frac{S_2}{S_1} v_2 S_1 = \rho v_2 S_2 = q_2 S_2 = Q_2 \Rightarrow \underline{Q = Q_1 = Q_2}$$

Η πίεση στην έξοδο προσδιορίζεται από την εξίσωση *Bernoulli*

$$\frac{1}{2} \rho v_1^2 + p_1 = \frac{1}{2} \rho v_2^2 + p_2 \Rightarrow \underline{p_1 = p_2 + \frac{1}{2} \rho (v_2^2 - v_1^2)}$$

Για την εκτροπή της ροής ο σωλήνας ασκεί στο συγκεκριμένο όγκο αναφοράς του ρευστού τη δύναμη (*δράση*)

$$\vec{A} = A_1 \vec{e}_1 + A_2 \vec{e}_2$$

η οποία είναι και το ζητούμενο και η οποία υπολογίζεται από την εξίσωση ποσότητας κινήσεως (8.45). Εν προκειμένω έχουμε ότι:

$$\int_{(\partial V)} q_n v_i dS \rightarrow \begin{cases} q_n^{(1)} v_1^{(1)} S_1 + q_n^{(2)} v_1^{(2)} S_2 = \rho v_1^2 S_1 \\ q_n^{(1)} v_2^{(1)} S_1 + q_n^{(2)} v_2^{(2)} S_2 = +\rho v_2^2 S_2 \end{cases}$$

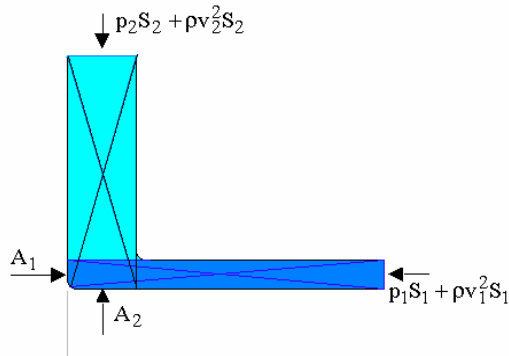
$$\int_{(V)} f_i dV = 0$$

$$-\int_{(\partial V)} p n_i dS \rightarrow \begin{cases} -p_1 S_1 + A_1 \\ -p_2 S_2 + A_2 \end{cases}$$

Άρα

$$(\rightarrow): \rho v_1^2 S_1 = -p_1 S_1 + A_1 \Rightarrow A_1 = p_1 S_1 + \rho v_1^2 S_1$$

$$(\uparrow): \rho v_2^2 S_2 = -p_2 S_2 + A_2 \Rightarrow A_2 = p_2 S_2 + \rho v_2^2 S_2$$



Εικ. 8-7: Στατικές και δυναμικές πιέσεις στην είσοδο και την έξοδο του ροϊκού σωλήνα

Στο συγκεκριμένο παράδειγμα είναι ιδιαίτερα φανερό (Εικ. 8-7) ότι οι δράσεις A_1 και A_2 του σωλήνα πάνω στο ρευστό εξισορροπούν πέραν της «στατικής» πίεσεως,

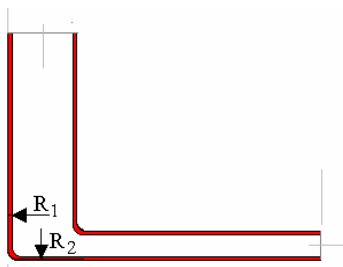
$$P_{st} = pS$$

και τη «δυναμική» πίεση,

$$P_{dyn} = \rho v^2 S$$

Γενικώς θα παρατηρήσουμε ότι η δύναμη \vec{R} που ασκείται από το ρευστό στο σωλήνα είναι η αντίδραση της \vec{A} (Εικ. 8-8)

$$\vec{R} = -\vec{A} = -(A_1 \vec{e}_1 + A_2 \vec{e}_2)$$



Εικ. 8-8: Αντιδράσεις επί του «δοχείου»

Στην ειδική περίπτωση όπου ο σωλήνας έχει σταθερή διατομή, ($S_1 = S_2 = S$), τότε

$$v_1 = v_2 = v, \quad p_1 = p_2 = p$$

και στο σωλήνα ασκείται μια δύναμη με συνιστώσες,

$$R_1 = R_2 = -(p + \rho v^2)S$$

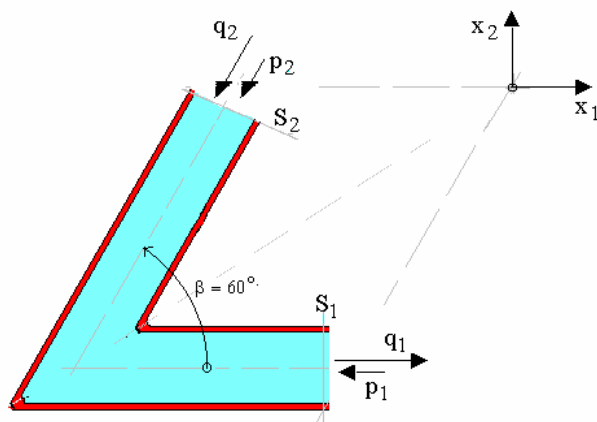
και ένταση

$$R = \sqrt{2} S (p + \rho v^2)$$

Παρατηρούμε ότι η Α.Δ.Ο. προσδιορίζει την φορά και ένταση της αντιδράσεως \vec{R} αλλά όχι και τον φορέα της (δηλαδή την ευθεία πάνω στην οποία κινείται η \vec{R} , ως ολισθαίνον διάνυσμα). Όπως θα δούμε παρακάτω¹¹, για τον προσδιορισμό του φορέα της \vec{R} , θα χριασθεί να προσφύγουμε στην Αρχή Διατηρήσεως της Στροφορμής.

Άσκηση

Να υπολογισθεί η δύναμη που ασκεί η ροή σε σωλήνα με στροφή στην περίπτωση όπου $S_1 = S_2 = S$ και η στροφή είναι $\beta = 60^\circ$ και $\beta = 120^\circ$ (Εικ. 8-9).

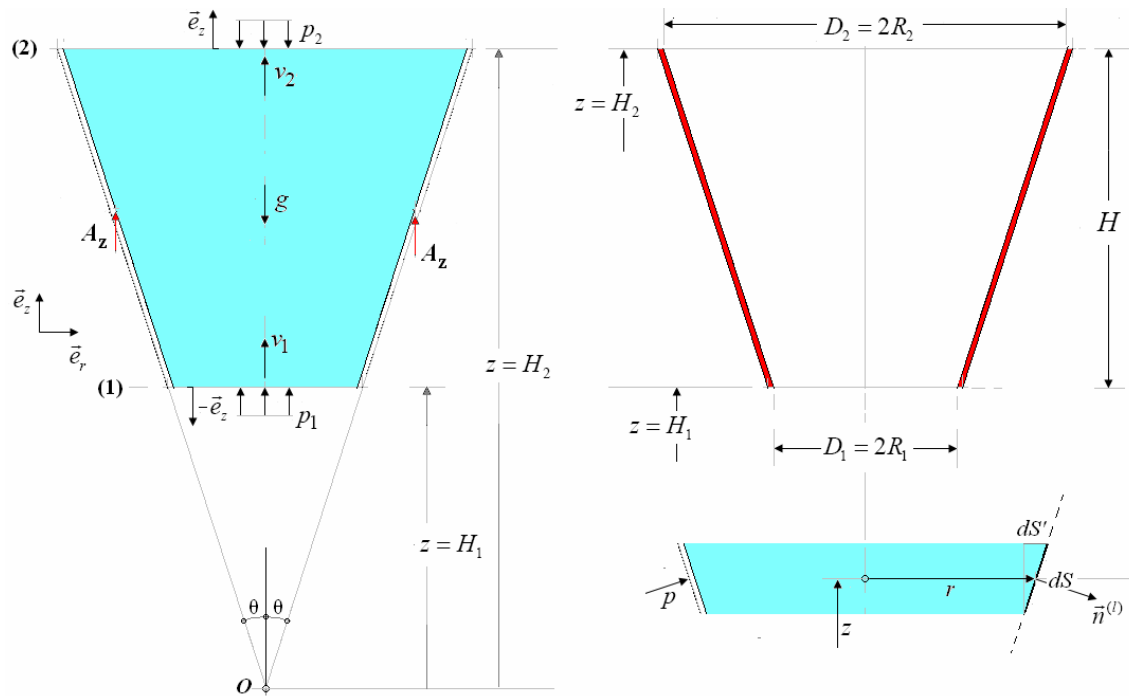


Εικ. 8-9: Σωλήνας με στροφή κατά λοξή γωνία

¹¹ Βλπ. Κεφ. 8.12

Πρόβλημα

Θεωρούμε τη ροή ενός ιδεατού ρευστού στην περιοχή μιας διευρύνσεως ενός κατακόρυφου σωλήνα, όπου η διάμετρος του σωλήνα διευρύνεται από $D_1 = 2R_1$ στη θέση $z = H_1$ στη τιμή $D_2 = 2R_2$ στη θέση $z = H_2$, Εικ. 8-10. Ζητείται να υπολογισθεί η κατακόρυφη συνιστώσα της δύναμης που ασκείται από τον σωλήνα στο ρευστό.



Εικ. 8-10: Δυνάμεις σε διέυρυνση σωλήνα

Λύση:

Θεωρούμε τον όγκο αναφοράς του ρευστού μεταξύ των διατομών (1) και (2): Στην είσοδο της ροής (1) η ορθή προς τη ροή διατομή έχει εμβαδόν $S_1 = \pi D_1^2 / 4$, η πίεση έχει ένταση p_1 και η ταχύτητα ροής είναι, $\vec{v}^{(1)} = v_1 \vec{e}_z$. Οι αντίστοιχες τιμές στην έξοδο της ροής (2) είναι $S_2 = \pi D_2^2 / 4$, p_2 και $\vec{v}^{(2)} = v_2 \vec{e}_z$. Οι παροχές στις διατομές εισόδου και εξόδου είναι αντιστοίχως,

Εισροή: $q_n^{(1)} = \rho \vec{v}^{(1)} \cdot (-\vec{e}_z) = -\rho v_1$

Εκροή: $q_n^{(2)} = \rho \vec{v}^{(2)} \cdot \vec{e}_z = \rho v_2$

Με δεδομένη την ταχύτητα στην είσοδο (διατομή (1)), από την εξίσωση συνέχειας της ροής μπορούμε να υπολογίσουμε την ταχύτητα στην έξοδο (διατομή (2)),

$$v_1 S_1 = v_2 S_2 \Rightarrow v_2 = \frac{S_1}{S_2} v_1 = \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^2 v_1 < v_1$$

Παρατηρούμε πάλι ότι η συνολική παροχή είναι σε κάθε θέση σταθερή,

$$Q_1 = q_1 S_1 = \rho v_1 S_1 = \rho \frac{S_2}{S_1} v_2 S_1 = \rho v_2 S_2 = q_2 S_2 = Q_2 \Rightarrow \underline{Q = Q_1 = Q_2}$$

Η πίεση στην έξοδο προσδιορίζεται από την εξίσωση *Bernoulli*:

$$\boxed{H_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} = H_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g}}$$

ή

$$\frac{p_2}{\rho g} = \frac{p_1}{\rho g} + H_1 \left(1 - \frac{H_2}{H_1} \right) + \frac{v_1^2}{2g} \left(1 - \left(\frac{v_2}{v_1} \right)^2 \right)$$

Από τη γεωμετρική τοποθέτηση του προβλήματος (Εικ. 8-10) έχουμε ότι

$$\cot \theta = \frac{H_2 - H_1}{R_2 - R_1} \quad ; \quad \lambda = \frac{R_1}{R_2}$$

$$H_1 = R_1 \cot \theta \quad ; \quad H_2 = R_2 \cot \theta \quad ; \quad \frac{H_2}{H_1} = \frac{R_2}{R_1} = \lambda^{-1}$$

Άρα

$$\frac{v_2}{v_1} = \lambda^2$$

$$\frac{p_2}{\rho g} = \frac{p_1}{\rho g} \left(1 + \frac{H_1}{p_1 / (\rho g)} \left(1 - \frac{H_2}{H_1} \right) + \frac{v_1^2 / (2g)}{p_1 / (\rho g)} \left(1 - \left(\frac{v_2}{v_1} \right)^2 \right) \right)$$

\Rightarrow

$$\frac{p_2}{\rho g} = \frac{p_1}{\rho g} \left(1 + \eta_H \left(1 - \lambda^{-1} \right) + \eta_v \left(1 - \lambda^4 \right) \right)$$

όπου,

$$\eta_H = \frac{H_1}{p_1 / (\rho g)}$$

$$\eta_v = \frac{v_1^2 / (2g)}{p_1 / (\rho g)}$$

ή

$$\eta = \frac{p_2}{p_1} = 1 + \eta_H (1 - \lambda^{-1}) + \eta_v (1 - \lambda^4)$$

Στη θεωρούμενη διεύρυνση της ροής ο σωλήνας ασκεί στο συγκεκριμένο όγκο αναφοράς του ρευστού τη δύναμη (δράση)

$$\vec{A} = A_r \vec{e}_r + A_z \vec{e}_z$$

Το ζητούμενο είναι η συνιστώσα A_z , η οποία υπολογίζεται από την εξίσωση ποσότητας κινήσεως, εξ. (8.45).

Εν προκειμένω έχουμε,

$$\begin{aligned} D &= \int_{(\partial V)} q_n v_z dS = q_n^{(1)} v_z^{(1)} S_1 + q_n^{(2)} v_z^{(2)} S_2 = -\rho v_1^2 S_1 + \rho v_2^2 S_2 \\ &= Q(v_2 - v_1) = -\rho \pi R_1^2 v_1^2 \left(1 - \frac{v_2}{v_1}\right) \end{aligned}$$

Η παραπάνω εξίσωση μπορεί να γραφεί και ως η διαφορά δυναμικών πιέσεων στο κάτω και πάνω σύνορο ως εξής,

$$\begin{aligned} D &= P_{2d} - P_{1d} \\ P_{1d} &= Qv_1 \quad , \quad P_{2d} = Qv_2 \end{aligned}$$

ή τυπικά ως

$$D = -\rho \pi R_1^2 v_1^2 (1 - \lambda^2) \tag{8.46}$$

Ο όγκος το αναφοράς είναι ένας κώλυρος κώνος, οπότε

$$\begin{aligned} \int_{(V)} f_z dV &= \int_{(V)} \rho g_z dV = \int_{(V)} \rho(-g) dV = -\rho g \int_{(V)} dV \\ &= -\rho g \left(\frac{1}{3} \pi R_2^2 H_2 - \frac{1}{3} \pi R_1^2 H_1 \right) \end{aligned}$$

Άρα

$$\begin{aligned} \int_{(V)} f_z dV &= -\frac{1}{3} \pi \rho g R_1^2 H_1 \left(\frac{R_2^2}{R_1^2} \frac{H_2}{H_1} - 1 \right) \\ &= -\frac{1}{3} \pi \rho g R_1^2 H_1 \left(\left(\frac{R_2}{R_1} \right)^3 - 1 \right) = -\frac{1}{3} \pi \rho g R_1^2 H_1 (\lambda^{-3} - 1) \end{aligned}$$

Δηλαδή το βάρος του συγκεκριμένου όγκου αναφοράς είναι

$$W = \frac{1}{3} \pi \rho g R_1^2 H_1 (\lambda^{-3} - 1) \quad (8.47)$$

Οι δυνάμεις στην κατεύθυνση του κατακόρυφου άξονα Oz που ασκούνται στο σύνορο του θεωρούμενου όγκου υπολογίζονται ως εξής:

$$\int_{(\partial V)} (-p) n_z dS = A_z + P_{1st} - P_{2st}$$

όπου

$$P_{1st} = p_1 S_1 \quad , \quad P_{2st} = p_2 S_2 \quad (8.48)$$

και

$$P_{1st} - P_{2st} = P_{1st} \left(1 - \frac{p_2}{p_1} \frac{R_2^2}{R_1^2} \right) = p_1 \pi R_1^2 (1 - \eta \lambda^{-2}) \quad (8.49)$$

Άρα η εξίσωση ποσότητας κινήσεως, εξ. (8.45), δίνει

$$\begin{aligned} A_z + P_{1st} - P_{2st} - W &= P_{2d} - P_{1d} \quad \Rightarrow \\ A_z &= W - P_1 + P_2 \end{aligned}$$

όπου

$$\begin{aligned} P_1 &= P_{1st} + P_{1d} = S_1 p_1 + S_1 \rho v_1^2 \\ P_2 &= P_{2st} + P_{2d} = S_2 p_2 + S_2 \rho v_2^2 \end{aligned}$$

Οι ποσότητες που υπεισέρχονται στην παραπάνω εξίσωση έχουν ορισθεί παραπάνω μέσω των εξ. (8.46), (8.47) και (8.49), άρα

$$A_z = P_{1st} \left(-1 + \eta \lambda^{-2} + \eta_H \frac{1}{3} (\lambda^{-3} - 1) - \eta_v 2 (1 - \lambda^2) \right)$$

ή

$$A_z = \alpha_z R_{1st}$$

$$\alpha_z = \lambda^{-2} - 1 - \eta_H \left(\frac{2}{3} \lambda^{-3} - \lambda^{-2} + \frac{1}{3} \right) + \eta_v (\lambda^{-2} + \lambda^2 - 2) \quad (8.50)$$

Αριθμητική εφαρμογή:

Πίνακας 1: Δεδομένα

| | | |
|-------------------|---|----------------------------|
| g | $9.807 m / s^2$ | Επιτάχυνση βαρύτητας |
| $\gamma = \rho g$ | $9.807 \frac{kN}{m^3}$ | Ειδικό βάρος ύδατος |
| ρ | $10^3 \frac{kg}{m^3} = 10^3 \frac{N / (ms^{-2})}{m^3} = 1 \frac{kN / (ms^{-2})}{m^3}$ | Πυκνότητα ύδατος |
| $D_1 = 2R_1$ | $0.3m$ | Διάμετρος διατομής εισόδου |
| $D_2 = 2R_2$ | $0.6 m$ | Διάμετρος διατομής εξόδου |
| $H = H_2 - H_1$ | $1.5 m$ | Μήκος σωλήνα |
| $Q_v = vS$ | $0.28 m^3 / s$ | Παροχή κατ' όγκο |
| p_1 | $207. kPa$ | Πίεση εισόδου |

Πίνακας 2: Παράγωγα μεγέθη

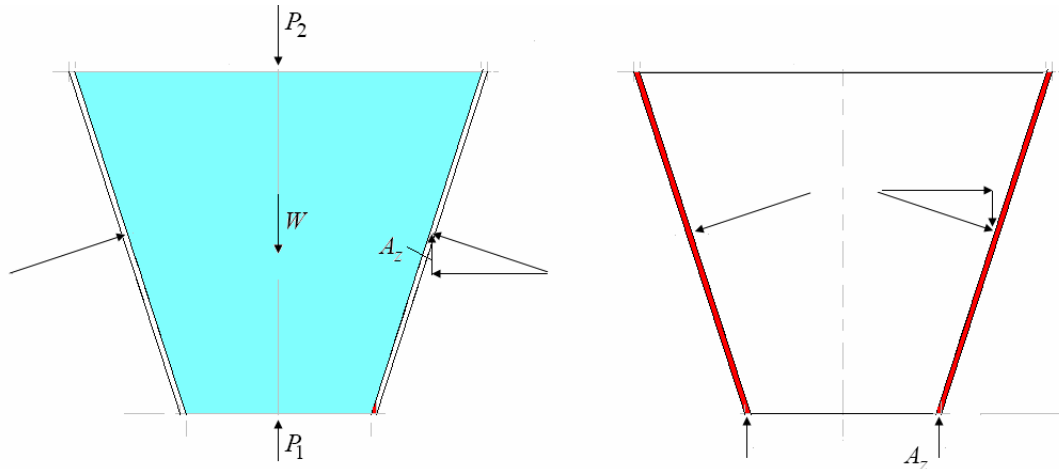
| | |
|---|----------------|
| $S_1 = \pi R_1^2$ | $0.0707 m^2$ |
| $S_2 = \pi R_2^2$ | $0.2827 m^2$ |
| $v_1 = \frac{Q_v}{S_1} = \frac{Q_v}{\pi R_1^2}$ | $3.961 m / s$ |
| $v_2 = \frac{Q_v}{S_2} = \frac{Q_v}{\pi R_2^2}$ | $0.9903 m / s$ |
| $v_1 - v_2$ | $2.971 m / s$ |

| | |
|---|-----------------------------|
| $\lambda = \frac{R_1}{R_2}$ | 0.5 |
| $\cot \theta = \frac{H_2 - H_1}{R_2 - R_1}$ | 10. ($\theta=57.3^\circ$) |
| $H_1 = R_1 \cot \theta$ | 1.5 m |
| $H_2 = R_2 \cot \theta$ | 3.0 m |
| $h_1 = \frac{p_1}{\rho g}$ | 21.107 m |
| $\eta_H = \frac{H_1}{p_1 / (\rho g)}$ | 0.0711 |
| $\eta_v = \frac{v_1^2 / (2g)}{p_1 / (\rho g)}$ | 0.0379 |
| $\eta = \frac{p_2}{p_1}$ | 0.9937 |
| $p_2 = \eta p_1$ | 199.644 kPa |
| $h_2 = \frac{p_2}{\rho g}$ | 20.357 m |
| $P_{1st} = p_1 S_1$ | 14.63 kN |
| $P_{2st} = p_2 S_2$ | 56.45 kN |
| $P_{1st} - P_{2st}$ | -41.82 kN |
| $W = \frac{1}{3} \pi \rho g R_1^2 H_1 (\lambda^{-3} - 1)$ | 2.426 kN |
| $D = -\pi \rho R_1^2 v_1^2 (1 - \lambda^2)$ | -0.83 kN |
| α_z (εξ. (8.50)) | 2.967 |

Άρα (Εικ. 8-11)

$$A_z = W - (P_{1st} - P_{2st}) + D = 2.43kN - (-41.82kN) + (-0.83kN) = 43.41kN$$

$$A_z = \alpha_z P_{1st} = 2.967 \cdot 10.99kN = 43.41kN(!)$$



Εικ. 8-11: Σχηματική παράσταση των δυνάμεων που ασκούνται στο ρευστό και στον σωλήνα

8.8 Οι εξισώσεις Navier της γραμμικής Ελαστοδυναμικής

Στην περίπτωση απειροστικών παραμορφώσεων ενός ισότροπου, γραμμικά ελαστικού υλικού ισχύει ο γνωστός Νόμος τάσεων-τροπών του Hooke

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (8.51)$$

όπου

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (8.52)$$

είναι η απειροστική τροπή, και λ , μ οι ελαστικές σταθερές Lamé, που συνδέονται με το μέτρο ελαστικότητας E Young και το λόγο Poisson ν ως εξής:

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} = \frac{2\mu\nu}{1-2\nu} \quad (8.53)$$

όπου

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (8.54)$$

είναι το μέτρο διατμήσεως του υλικού.

Μέσα στα πλαίσια της απειροστικής θεωρίας παραμορφώσεων η επιτάχυνση του ΥΣ δίδεται συναρτήσει της μετατοπίσεως προσεγγιστικά από τη σχέση

$$\dot{v}_i \approx \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (8.55)$$

Αν τώρα εισάγουμε τις παραπάνω καταστατικές και κινηματικές εξισώσεις (8.51) και (8.52) στις δυναμικές εξισώσεις (8.31), λαμβάνοντας υπ' όψιν την Εξ. (8.55) παίρνουμε τελικά τις εξισώσεις Navier¹² της Ελαστοδυναμικής¹³,

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_k} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k} + f_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (8.56)$$

ή

$$(\lambda + \mu) \nabla \operatorname{div} \mathbf{u} + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{f} = \rho \ddot{\mathbf{u}} \quad (8.57)$$

8.9 Καθολικά επίπεδα ελαστικά κύματα¹⁴

Θεωρούμε ένα ελαστικό σώμα μεγάλων διαστάσεων σε μία αρχική απεικόνιση $C^{(0)}$, όπου η τάση $\sigma_{ij}^{(0)}$ βρίσκεται σε ισορροπία με τις καθολικές δυνάμεις,

$$\partial_k \sigma_{ij}^{(0)} + f_i = 0 \quad (8.58)$$

Ξεκινώντας από την κατάσταση αυτή ισορροπίας θεωρούμε μια δυναμική διαταραχή $C^{(0)} \mapsto C^{(t)}$ του σώματος έτσι ώστε ανά πάσα στιγμή η τάση να δίδεται από τη σχέση

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(0)} + \tilde{\sigma}_{ij}(x_k, t) \quad (8.59)$$

Η τάση στην τρέχουσα απεικόνιση πρέπει να ικανοποιεί τις δυναμικές εξισώσεις (8.31). Αυτό σημαίνει ότι η διαταραχή ικανοποιεί τις ίδιες εξισώσεις αλλά για μηδενικές καθολικές δυνάμεις

$$\partial_k \tilde{\sigma}_{ki} = \rho \dot{v}_i \quad (8.60)$$

όπου η τάση και η επιτάχυνση δίδονται από σχέσεις ανάλογες προς τις παραπάνω κινηματικές και καταστατικές σχέσεις της γραμμικής Ελαστοδυναμικής συναρτήσει του διανύσματος

¹² Οι εξισώσεις Navier διατυπώθηκαν το 1821-23 για την ειδική περίπτωση όπου και . Η γενική περίπτωση, όπου , διατυπώθηκε από τον Cauchy το 1828.

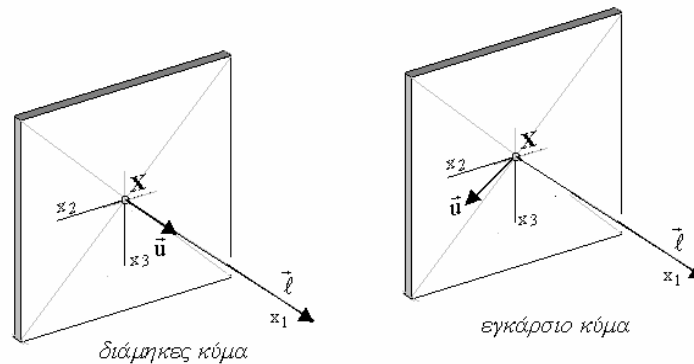
¹³ Πρβλ. H. Kolsky, *Stress waves in Solids*, Dover, 1963.

¹⁴ Αγγλ. *elastic body waves*

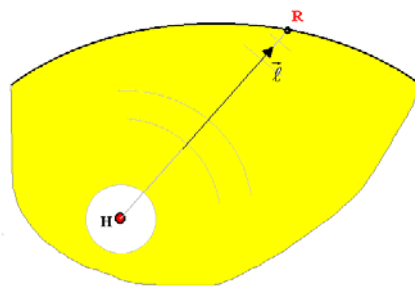
μετατοπίσεως $\tilde{u}_i(x_k, t)$, που περιγράφει την εν λόγω δυναμική διαταραχή $C^{(0)} \mapsto C^{(t)}$. Στην περίπτωση αυτή οι παραπάνω εξισώσεις Navier παίρνουν την εξής μορφή,

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial^2 \tilde{u}_k}{\partial x_i \partial x_k} + \mu \frac{\partial^2 \tilde{u}_i}{\partial x_k \partial x_k} = \rho \frac{\partial^2 \tilde{u}_i}{\partial t^2} \quad (8.61)$$

Οι παραπάνω εξισώσεις μας επιτρέπουν να μελετήσουμε την ύπαρξη και διάδοση *επιπέδων κυμάτων* σε ένα ελαστικό χωρίο «άπειρων» διαστάσεων. Για το σκοπό αυτό επιλέγουμε τον άξονα x_1 παράλληλο προς το μοναδιαίο διάνυσμα ℓ_i που ορίζει την κατεύθυνση διαδόσεως του κύματος (Εικ. 8-12). Όταν το διάνυσμα απειροστικής μετατοπίσεως \tilde{u}_i των ΥΣ είναι παράλληλο προς το διάνυσμα διαδόσεως ℓ_i του κύματος τότε το κύμα καλείται *διάμηκες*¹⁵. Όταν δε η κίνηση των ΥΣ είναι κάθετη προς την κατεύθυνση διαδόσεως του κύματος τότε το κύμα καλείται *εγκάρσιο*¹⁶.



Εικ. 8-12: Διαμήκη και εγκάρσια κύματα



Εικ. 8-13: Σχηματική παράσταση διαδόσεως κύματος σε ελαστικό χωρίο. Σε μεγάλη απόσταση από την πηγή τα κύματα είναι πρακτικώς επίπεδα

¹⁵ Αγγλ. *longitudinal*

¹⁶ Αγγλ. *transversal*

Θα θεωρήσουμε τώρα αρμονικές ταλαντώσεις των Υ.Σ., δηλ.: α) Ένα διαμήκες κύμα στην κατεύθυνση ℓ_i (Εικ. 8-12), με εύρος A , μήκος κύματος L και ταχύτητα διαδόσεως¹⁷ $c^{(p)}$,

$$\tilde{u}_i^{(p)} = A \ell_i \sin \left(\frac{2\pi (x_k \ell_k - c^{(p)} t)}{L} \right) \quad (8.62)$$

β) Ένα εγκάρσιο κύμα στην κατεύθυνση ℓ_i , με εύρος A , μήκος κύματος L με ταχύτητα διαδόσεως¹⁸ $c^{(s)}$

$$\tilde{u}_i^{(s)} = A e_{ij3} \ell_j \sin \left(\frac{2\pi (x_k \ell_k - c^{(s)} t)}{L} \right) \quad (8.63)$$

Οι εκφράσεις αυτές είναι λύσεις των δυναμικών εξισώσεων Navier, οι οποίες με τη σειρά τους θα δώσουν τις εκφράσεις για την ταχύτητα διαδόσεως ενός εκάστου τύπου κύματος. Πράγματι, αν εισάγουμε τις λύσεις αυτές για τη μετατόπιση, Εξ. (8.62) ή (8.63) στις εξισώσεις Navier, Εξ. (8.61), τότε για οποιαδήποτε τιμή του εύρους A προκύπτει η ταχύτητα διαδόσεως του κύματος. Η διαδικασία αυτή οδηγεί στα εξής κλασικά αποτελέσματα:

α) Διαμήκη κύματα

$$c^{(p)} = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \quad (8.64)$$

β) Εγκάρσια κύματα

$$c^{(s)} = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad (8.65)$$

Γενικώς το πρωτογενές (p) κύμα θα φθάσει στον παρατηρητή R πριν από το δευτερογενές (s) αφού (Πίνακας 8-3)

$$c^{(p)} > c^{(s)} \quad (8.66)$$

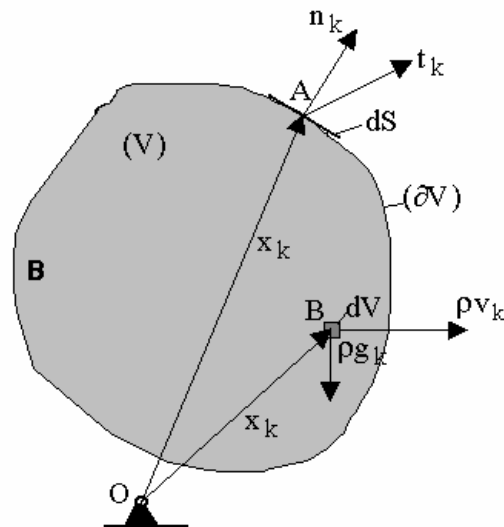
Πίνακας 8-3:: Τυπικές φυσικές σταθερές για συνήθη υλικά

¹⁷ Ο δείκτης (p) από τον αγγλικό όρο primary wave

¹⁸ Ο δείκτης (s) από τον αγγλικό όρο secondary wave

| | | | | | |
|---------------------|------|-----|--------------|------------|------------------------------------|
| Χάλυβας (St) | | | | | |
| Est | 210 | GPa | γ -st | 77.01 | kN/m ³ |
| ν -st | 0.20 | [-] | ρ -st | 7.85 | kNsec ² /m ⁴ |
| λ -st | 58.3 | GPa | cp-st | 5.5 | km/sec |
| μ -st | 87.5 | GPa | cs-st | 3.3 | km/sec |
| Υδωρ (w) | | | | | |
| K-w | 2.04 | GPa | γ -w | 9.81 | kN/m ³ |
| ν -w | 0.5 | [-] | ρ -w | 1.00 | kNsec ² /m ⁴ |
| λ -w | 2.04 | GPa | cp-w | 1.4 | km/sec |
| μ -w | 0 | GPa | cs-w | 0 | m/sec |
| Αμμος (sd) | | | | | |
| | | | γ -sd | 17.00 | kN/m ³ |
| ν -sd | 0.10 | [-] | ρ -sd | 1.73 | kNsec ² /m ⁴ |
| λ -sd | 12.5 | MPa | cp-sd | 255 | m/sec |
| μ -sd | 50 | MPa | cs-sd | 170 | m/sec |

8.10 Η αρχή διατήρησης της στροφορμής



Εικ. 8-14: Ροπές εξωτερικών δυνάμεων ως προς τυχαίο πόλο O

Θεωρούμε ένα σώμα B το οποίο τη χρονική στιγμή t καταλαμβάνει τον όγκο V με σύνορο ∂V . Για τη διατύπωση της Α.Δ.Στ. υπολογίζουμε κατ' αρχήν τη συνολική ροπή των εξωτερικών δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα B ως προς τυχόν κέντρο αναφοράς O (Εικ. 8-14),

$$\vec{M} = \int_{(\partial V)} \vec{OA} \times \vec{t} dS + \int_{(V)} \vec{OB} \times \rho \vec{g} dV \quad (8.67)$$

ή

$$M_i = \int_{(\partial V)} \varepsilon_{ijk} x_j t_k dS + \int_{(V)} \varepsilon_{ijk} x_j \rho g_k dV \quad (8.68)$$

Στα πλαίσια της Μηχανική του «κλασικού» Συνεχούς Μέσου¹⁹ η συνολική στροφορμή του σώματος \mathbf{B} ως προς τον πόλο σημείο O υπολογίζεται ως το άθροισμα της στροφορμής των ΥΣ του \mathbf{B} ως ακολούθως

$$\vec{L} = \int_{(V)} \vec{OB} \times \rho \vec{v} dV \rightarrow L_i = \int_{(V)} \varepsilon_{ijk} x_j \rho v_k dV \quad (8.69)$$

οπότε η Α.Δ.Στ. παίρνει την εξής μορφή,

$$\vec{M} = \frac{d}{dt} \vec{L} \quad (8.70)$$

Έχουμε

$$\frac{dL_i}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{(V)} \rho (\varepsilon_{ijk} x_j v_k) dV \quad (8.71)$$

ή

$$\begin{aligned} \frac{dL_i}{dt} &= \int_{(V)} \rho \frac{D}{Dt} (\varepsilon_{ijk} x_j v_k) dV = \int_{(V)} \rho \varepsilon_{ijk} \frac{D}{Dt} (x_j v_k) dV \\ &= \int_{(V)} \rho \varepsilon_{ijk} \left(v_j v_k + x_j \frac{Dv_k}{Dt} \right) dV = \int_{(V)} \rho \left(\varepsilon_{ijk} v_j v_k + \varepsilon_{ijk} x_j \frac{Dv_k}{Dt} \right) dV \\ &= \int_{(V)} \rho \left(0 + \varepsilon_{ijk} x_j \frac{Dv_k}{Dt} \right) dV \Rightarrow \end{aligned} \quad (8.72)$$

$$\frac{dL_i}{dt} = \int_{(V)} \rho \varepsilon_{ijk} x_j \dot{v}_k dV \quad (8.73)$$

οπότε η Α.Δ.Στ. παίρνει την εξής καθολική μορφή

¹⁹ δηλ. του Σ.Μ. τύπου Boltzmann, όπου το ΥΣ έχει 3 μόνο ΒΕ

$$\int_{(V)} \rho \varepsilon_{ijk} x_j \dot{v}_k dV = \int_{(\partial V)} \varepsilon_{ijk} x_j t_k dS + \int_{(V)} \varepsilon_{ijk} x_j \rho g_k dV \quad (8.74)$$

ή

$$\int_{(V)} \vec{OB} \times \rho \frac{D\vec{v}}{Dt} dV = \int_{(\partial V)} \vec{OA} \times \vec{t} dS + \int_{(V)} \vec{OB} \times \rho \vec{g} dV \quad (8.75)$$

Από την παραπάνω καθολική διατύπωση της Α.Δ.Στ. μπορούμε να καταλήξουμε στην τοπική της μορφή ως εξής:

$$\begin{aligned} \int_{(\partial V)} \varepsilon_{ijk} x_j t_k dS &= \int_{(\partial V)} \varepsilon_{ijk} x_j \sigma_{lk} n_l dS = \\ &= \int_{(V)} \partial_l (\varepsilon_{ijk} x_j \sigma_{lk}) dV = \int_{(V)} (\varepsilon_{ijk} \delta_{jl} \sigma_{lk} + \varepsilon_{ijk} x_j \partial_l \sigma_{lk}) dV \\ &= \int_{(V)} (\varepsilon_{ijk} \sigma_{jk} + \varepsilon_{ijk} x_j \partial_l \sigma_{lk}) dV \end{aligned} \quad (8.76)$$

οπότε η Εξ. (8.74) δίδει

$$\begin{aligned} \int_{(V)} \rho \varepsilon_{ijk} x_j \dot{v}_k dV &= \int_{(V)} (\varepsilon_{ijk} \sigma_{jk} + \varepsilon_{ijk} x_j \partial_l \sigma_{lk}) dV + \int_{(V)} \varepsilon_{ijk} x_j \rho g_k dV \\ \Rightarrow \int_{(V)} \varepsilon_{ijk} x_j (\partial_l \sigma_{lk} + \rho g_k - \rho \dot{v}_k) dV &+ \int_{(V)} \varepsilon_{ijk} \sigma_{jk} dV \end{aligned} \quad (8.77)$$

η οποία λόγω της Α.Δ.Ο., Εξ. (8.29), τελικώς δίδει,

$$\int_{(V)} \varepsilon_{ijk} \sigma_{jk} dV = 0 \quad (8.78)$$

Αν δεχθούμε ότι η παραπάνω σχέση ισχύει για κάθε $V' \subseteq V$, τότε παίρνουμε το λεγόμενο 2^ο Νόμο του Cauchy

$$\varepsilon_{ijk} \sigma_{jk} = 0 \Leftrightarrow \sigma_{jk} = \sigma_{kj} \quad \text{ή} \quad \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T \quad (8.79)$$

Άρα για ένα κλασικό (Boltzmann) Συνεχές η Α.Δ.Σ. οδηγεί στη συμμετρία του τανυστή των τάσεων κατά Cauchy.

8.11 Η εξίσωση ποσότητας στροφορμής για μόνιμη ροή ιδεατού ρευστού

Θεωρούμε τη διατύπωση της Α.Δ.Σ., Εξ. (8.74), η οποία για το εντατικό πεδίο ενός ιδεατού γράφεται, ρευστού γράφεται

$$\int_{(V)} \rho \varepsilon_{ijk} x_j \dot{v}_k dV = \int_{(\partial V)} \varepsilon_{ijk} x_j (-p \delta_{lk}) n_l dS + \int_{(V)} \varepsilon_{ijk} x_j \rho g_k dV \quad (8.80)$$

Για μόνιμη ροή παρατηρούμε πάλι πως²⁰

$$\dot{v}_i = v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \quad (8.81)$$

και

$$\frac{\partial v_k}{\partial x_k} = 0 \Rightarrow \dot{v}_i = \frac{\partial}{\partial x_k} (v_k v_i) \quad (8.82)$$

$$\rho = \text{σταθ.} \Rightarrow \rho \dot{v}_i = \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho v_k v_i) \quad (8.83)$$

οπότε,

$$\begin{aligned} \frac{dL_i}{dt} &= \int_{(V)} \varepsilon_{ijk} x_j \rho \dot{v}_k dV = \int_{(V)} \varepsilon_{ijk} x_j (\rho v_k) dV \\ &= \int_{(V)} \varepsilon_{ijk} x_j \partial_l (\rho v_l v_k) dV = \int_{(V)} \varepsilon_{ijk} \rho x_j (v_k \partial_l v_l + v_l \partial_l v_k) dV \\ &= \int_{(V)} \varepsilon_{ijk} \rho x_j (0 + v_l \partial_l v_k) dV = \int_{(V)} \varepsilon_{ijk} \rho x_j v_l \partial_l v_k dV \end{aligned} \quad (8.84)$$

Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι,

$$\partial_l (x_j v_l v_k) = \delta_{lj} v_l v_k + x_j \partial_l v_l v_k + x_j v_l \partial_l v_k = v_j v_k + x_j v_l \partial_l v_k \quad (8.85)$$

$$\varepsilon_{ijk} x_j v_l \partial_l v_k = \varepsilon_{ijk} (\partial_l x_j v_l v_k - v_j v_k) = \partial_l (\varepsilon_{ijk} x_j v_l v_k) \quad (8.86)$$

έχουμε

$$\frac{dL_i}{dt} = \int_{(V)} \partial_l (\varepsilon_{ijk} x_j v_l v_k) dV = \int_{(\partial V)} \varepsilon_{ijk} x_j v_l (\rho v_l n_l) dS \quad (8.87)$$

ή

$$\frac{dL_i}{dt} = \int_{(\partial V)} \varepsilon_{ijk} x_j v_l q_n dS \quad (8.88)$$

²⁰ Πρβλ. Κεφ. 8.6

Άρα η Εξ. (8.80) δίδει

$$\int_{(\partial V)} \varepsilon_{ijk} x_j v_i q_n dS = - \int_{(\partial V)} \varepsilon_{ijk} x_j p n_k dS + \int_{(V)} \varepsilon_{ijk} x_j \rho g_k dV \quad (8.89)$$

ή συμβολικά

$$\dot{\vec{\Theta}} = \vec{M} \quad (8.90)$$

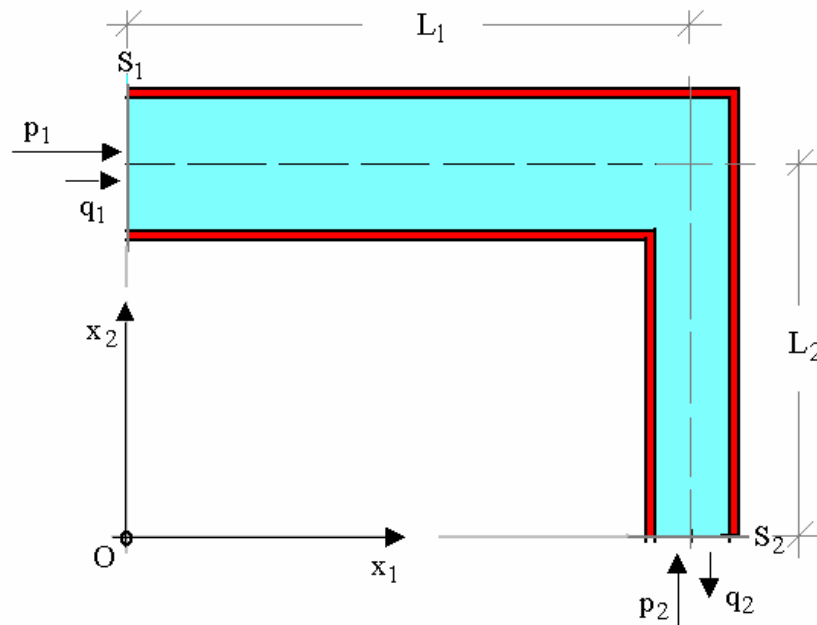
όπου

$$\vec{M} = \int_{(\partial V)} \vec{OA} \times \vec{t} dS + \int_{(V)} \vec{OB} \times \rho \vec{g} dV \quad (8.91)$$

και

$$\dot{\vec{\Theta}} = \int_{(\partial V)} (\vec{R} \times \vec{v}) q_n dS \quad (8.92)$$

8.12 Μόνιμη ροή σε έναν όγκο αναφοράς με μια εισροή και μια εκροή



Εικ. 8-15: Ορθογώνια εκτροπή ροής

Θεωρούμε εκτροπή ροής κατά 90° μέσω αγωγού όπως φαίνεται στο σχήμα και ζητάμε τον καθορισμό της συνισταμένης δύναμης και του άξονα εφαρμογής της που ασκεί η ροή στον σωλήνα (Εικ. 8-15). Συμφώνως με όσα αναφέραμε στο Κεφ. 8.7 έχουμε

$$\text{διατομή (1): } \vec{v}^{(1)} = v_1 \bar{e}_1, \quad q_n^{(1)} = \rho \vec{v}^{(1)} \cdot (-\bar{e}_1) = -\rho v_1$$

$$\text{διατομή (2): } \vec{v}^{(2)} = -v_2 \bar{e}_2, \quad q_n^{(2)} = \rho \vec{v}^{(2)} \cdot (-\bar{e}_2) = +\rho v_2$$

και

$$\int_{(\partial V)} q_n v_i dS \rightarrow \begin{cases} q_n^{(1)} v_1^{(1)} S_1 + q_n^{(2)} v_1^{(2)} S_2 = -\rho v_1^2 S_1 \\ q_n^{(1)} v_2^{(1)} S_1 + q_n^{(2)} v_2^{(2)} S_2 = -\rho v_2^2 S_2 \end{cases}$$

$$\left(\rightarrow\right)_+ : -\rho v_1^2 S_1 = p_1 S_1 + A_1 \Rightarrow A_1 = -\left(p_1 S_1 + \rho v_1^2 S_1\right)$$

$$\left(\uparrow\right)_+ : -\rho v_2^2 S_2 = p_2 S_2 + A_2 \Rightarrow A_2 = -\left(p_2 S_2 + \rho v_2^2 S_2\right)$$

Αυτό σημαίνει ότι με τη βοήθεια της εξ. συνέχειας, της εξ. Bernoulli και της εξ. Ποσότητας Κίνησης μπορούμε να προσδιορίσουμε τη δράση του σωλήνα πάνω στο ρευστό

$$\vec{A} = A_1 \bar{e}_1 + A_2 \bar{e}_2, \quad A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$$

και από αυτή την αντίδραση του ρευστού στο σωλήνα,

$$\vec{R} = -\vec{A}, \quad R = A$$

Με τη βοήθεια τώρα της παραπάνω Εξ. Ποσότητας Στροφορμής (8.90) μπορούμε να βρούμε και τον άξονα εφαρμογής αυτής της δύναμης, αρκεί να ορίσουμε γεωμετρικά τον φορέα, π.χ. με δεδομένες τις διαστάσεις αυτού, όπως στην Εικ. 8-15. Συμφώνως προς το σχήμα αυτό έχουμε:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{A} = \left(-p_1 S_1\right) L_2 + \left(p_2 S_2\right) L_1 - A R_A \bar{e}_3$$

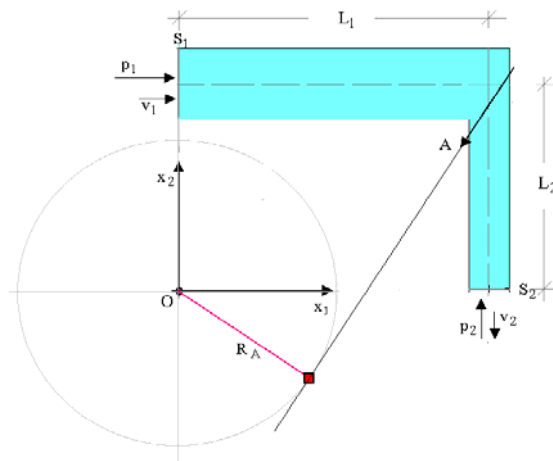
και

$$\dot{\Theta} = \int_S (\vec{r} \times \vec{v}) \cdot q_n dS = \rho \left(-q_n^{(1)} L_2 v_1 S_1 - q_n^{(2)} L_1 v_2 S_2\right) \bar{e}_3$$

όπου

$$q_n^{(1)} = v_1, \quad q_n^{(2)} = -v_2$$

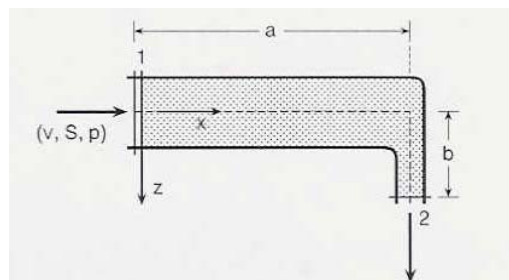
Οπότε από την Εξ. Ποσότητας Στροφορμής, Εξ. (8.90), μπορούμε να υπολογίσουμε το μοχλοβραχίονα R_A της δράσης \vec{A} .



Εικ. 8-16: Δύναμη ασκούμενη από τα τοιχώματα σε δεδομένο όγκο ρευστού

Ασκήσεις

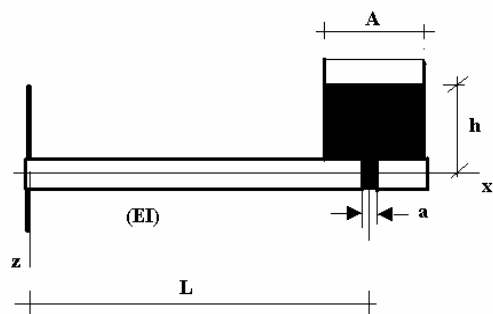
1. Να ολοκληρωθεί ο παραπάνω υπολογισμός και να υπολογισθούν οι αντιδράσεις που ασκούνται από την ένωση (1) του σωλήνα στο βραχίονα της Εικ. 8-17, με δεδομένα: $a = 0.1m$, $b = 0.05m$, απομείωση από ακτίνα $r_1 = 0.2 m$ σε $r_2 = 0.1 m$ και εκτροπή κατά 90° . Το ύδωρ που ρέει μέσα στο σωλήνα έχει στο σημείο εισόδου (1) στατική πίεση $p_1 = 200 kPa$. Η παροχή στο σημείο εκροής (2) είναι $Q_2 = 0.3 m^3 / sec$ και η πίεση ατμοσφαιρική. Το ύδωρ έχει πυκνότητα $\rho = 1000 kg/m^3$ και ο βραχίονας θεωρείται αβαρής.



Εικ. 8-17

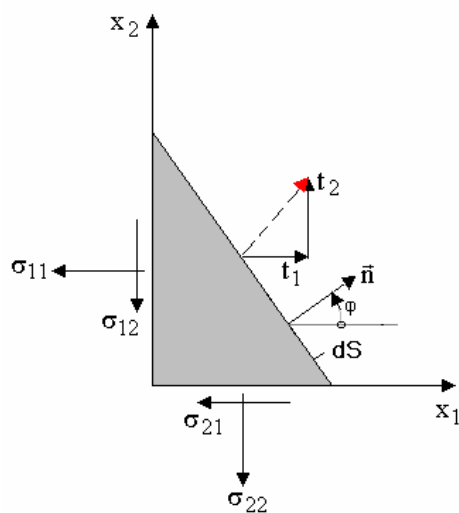
2. Δίδεται πρόβολος με ακαμψία (EI) , στο άκρο του οποίου υπάρχει δεξαμενή πυρόσβεσης (Εικ. 8-18). Η δεξαμενή έχει σταθερή διατομή εμβαδού (A) και είναι πλήρης ύδατος μέχρι ύψους $z = -h$ από τον άξονα του προβόλου. Σε απόσταση L από

την πάκτωση υπάρχει κατακόρυφος αγωγός εκτόνωσης της δεξαμενής, διατομής a . Δεχόμαστε ότι η πίεση στην έξοδο του αγωγού εκτόνωσης όταν ανοίξει η βαλβίδα εκτόνωσης είναι ίση με την ατμοσφαιρική. Να υπολογισθεί η μεταβολή του βέλους κάμψης στο άκρο του προβόλου ($x = L$) κατά την εκκένωση της δεξαμενής.



Εικ. 8-18: Αλληλεπίδραση ροής-κατασκευής

8.13 Οτανυστής των τάσεων κατά Cauchy



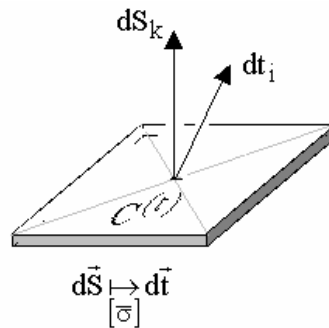
Εικ. 8-19: Δυνάμεις στο στοιχειώδες τρίγωνο (δισδιάστατο πρόβλημα)

Όπως προκύπτει από την ισορροπία των δυνάμεων που ασκούνται στο στοιχειώδες τετράεδρο (Εικ. 8-19) ο ελκυστής των τάσεων t_n στην τρέχουσα απεικόνιση $C^{(t)}$ ενός σώματος B δίδεται ως γραμμική συνάρτηση των συνημίτονων κατευθύνσεως του εξωτερικού μοναδιαίου διανύσματος n της στοιχειώδους επιφανείας dS επί της οποίας αυτός εξασκείται. Οι συντελεστές της γραμμικής αυτής σχέσεως είναι οι συνιστώσες τουτανυστή των τάσεων σ στην απεικόνιση $C^{(t)}$ ((8.18))

$$t_{ni} = \sigma_{ki} n_k \quad \text{ή} \quad \mathbf{t}_n = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \quad (8.93)$$

Για το λόγο αυτό ο τανυστής σ ονομάζεται και *τανυστής τάσεων ισορροπίας*²¹

$$\left. \begin{array}{l} dt_i = t_i dS \\ dS_k = n_k dS \\ t_i = \sigma_{ki} n_k \end{array} \right\} \Rightarrow dt_i = \sigma_{ki} dS_k \quad (8.94)$$



Εικ. 8-20: Απεικόνιση του της στοιχειώδους προσανατολισμένης υλικής επιφάνειας στην τρέχουσα απεικόνιση του σώματος πάνω στη στοιχειώδη δύναμη στην ίδια απεικόνιση του σώματος μέσω του τανυστή Cauchy.

Παρατηρούμε επίσης ότι η παραπάνω σχέση μπορεί να θεωρηθεί ως η μαθηματική απεικόνιση μέσω του τελεστή $[\sigma]$ του διανύσματος $d\vec{S}$, της στοιχειώδους προσανατολισμένης υλικής επιφάνειας στην τρέχουσα απεικόνιση του σώματος $C^{(t)}$, πάνω στη στοιχειώδη δύναμη $d\vec{t}$ στην ίδια απεικόνιση του σώματος (Εικ. 8-20),

$$d\vec{S} \xrightarrow{[\sigma]} d\vec{t} \quad (8.95)$$

Ο τανυστής σ καλείται *πραγματικός*²², επειδή αναφέρεται στο επιφανειακό στοιχείο και τον αντίστοιχο ελκυστή στη τρέχουσα απεικόνιση. Λέγεται δε ο σ και τανυστής των τάσεων κατά *Cauchy*, επειδή αυτός εμφανίζεται στη διατύπωση του 1^{ου} Νόμου των τάσεων του Cauchy

$$\partial_k \sigma_{ki} + f_i = \rho \dot{v}_i \quad (8.96)$$

Επειδή δε η παραπάνω διατύπωση των δυναμικών εξισώσεων είναι σε χωρικές συντεταγμένες (δηλ. αναφέρονται στις συντεταγμένες των ΥΣ στην τρέχουσα απεικόνιση $C^{(t)}$), ο σ ονομάζεται και *Euler* τανυστής των τάσεων²³. Υπενθυμίζουμε τέλος ότι από την

²¹ Αγγλ. *equilibrium stress tensor*

²² Αγγλ. *'true' stress*

²³ Αγγλ. *eulerian stress tensor*

Α.Δ.Σ. προέκυψε η συμμετρία του τανυστή των τάσεων κατά Cauchy, δηλ. ο γνωστός ως 2^{ος} Νόμος των τάσεων του Cauchy:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (8.97)$$

8.14 Ο 1^{ος} Piola-Kirchhoff τανυστής των τάσεων²⁴

Υπενθυμίζουμε ότι ο 1^{ος} νόμος του Cauchy προέκυψε από τη διατύπωση της καθολικής μορφής της Α.Δ.Ο. για ένα σώμα \mathbf{B} , που κατέχει στην τρέχουσα απεικόνιση $C^{(t)}$ όγκο V και περιβάλλεται από σύνορο ∂V , Εξ. (8.26).

$$\int_{(V)} \rho \dot{v}_i dV = \int_{(V)} \rho g_i dV + \int_{(\partial V)} \sigma_{ki} n_k dS \quad (8.98)$$

Η Α.Δ.Ο. στην απεικόνιση $C^{(t)}$ μπορεί τώρα να διατυπωθεί κάνοντας αναφορά όχι στην ίδια την απεικόνιση $C^{(t)}$ του θεωρούμενου υλικού σώματος \mathbf{B} , αλλά σε μία άλλη θέση του, π.χ. στην απεικόνιση αναφοράς $C^{(0)}$. Στην περίπτωση αυτή μετασχηματίζουμε την παραπάνω ολοκληρωτική εξίσωση (8.98) κάνοντας χρήση των σχέσεων που συνδέουν επιφανειακά και χωρικά στοιχεία στις αντίστοιχες απεικονίσεις $C^{(t)}$ και $C^{(0)}$ του σώματος \mathbf{B} . Από τις σχέσεις²⁵:

$$dS_k = J F_{mk}^{-1} dS_m^{(0)} \quad (8.99)$$

$$dV = J dV^{(0)} \quad (8.100)$$

όπου

$$J = \frac{dM / dV^{(0)}}{dM / dV} = \frac{\rho^{(0)}}{\rho} \quad (8.101)$$

παίρνουμε αντιστοίχως

$$\rho \dot{v}_i dV = \rho^{(0)} \dot{v}_i dV^{(0)} \quad (8.102)$$

$$\rho g_i dV = \rho^{(0)} g_i dV^{(0)} \quad (8.103)$$

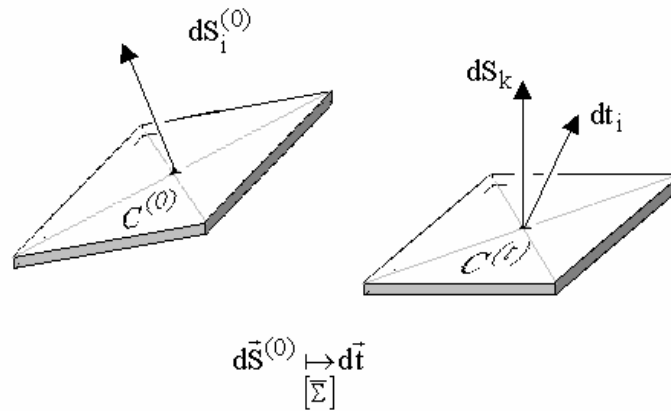
$$dt_i = \sigma_{ki} dS_k = \sigma_{ki} J F_{mk}^{-1} dS_m^{(0)} \Rightarrow \underline{dt_i = \Sigma_{im} dS_m^{(0)}} \quad (8.104)$$

²⁴ Πρβλ. C. Truesdell and W. Noll, *The Non-linear Field Theories of Mechanics*, Handbook of Physics, Vol. III/3, sect. 43A, Springer, 1965.

²⁵ Πρβλ. Κεφ. 4.9, και Κεφ. 4.10.

όπου

$$\Sigma_{im} = J \sigma_{ki} F_{mk}^{-1} = J \sigma_{ik}^T F_{km}^{-T} \quad (8.105)$$



Εικ. 8-21: Απεικόνιση του της στοιχειώδους προσανατολισμένης υλικής επιφάνειας στην απεικόνιση αναφοράς του σώματος πάνω στη στοιχειώδη δύναμη στην τρέχουσα απεικόνιση του σώματος μέσω του τανυστή I.P.-K.

Ο τανυστής

$$\Sigma_{im} = J \sigma_{ki} F_{mk}^{-1} \quad (8.106)$$

λέγεται *I. Piola-Kirchhoff* τανυστής των τάσεων²⁶. Ο τανυστής Σ καλείται και *ονομαστικός* τανυστής των τάσεων²⁷, επειδή απεικονίζει μαθηματικά το «απαραμόρφωτο» διάνυσμα $d\bar{S}^{(0)}$ στην απεικόνιση αναφοράς $C^{(0)}$ του σώματος, πάνω στη στοιχειώδη δύναμη $d\bar{t}$ στην τρέχουσα απεικόνιση του σώματος $C^{(t)}$ (Εικ. 8-21). Υπογραμμίζουμε εδώ ότι το επιφανειακό υλικό στοιχείο $dS_i^{(0)}$ κατά την μετάβαση $C^{(0)} \mapsto C^{(t)}$ παίρνει την θέση του στοιχείου dS_i .

Με τις παραπάνω σχέσεις καταλήγουμε στην εξής μορφή της Α.Δ.Ο. σε μία κατά Lagrange περιγραφή,

$$\int_{(V^{(0)})} \rho^{(0)} \dot{v}_i^L dV^{(0)} = \int_{(V^{(0)})} \rho^{(0)} g_i^L dV^{(0)} + \int_{(\partial V)} \Sigma_{im} n_m^{(0)} dS^{(0)} \quad (8.107)$$

²⁶ Ο I.P.-K. τανυστής των τάσεων Σ συμβολίζεται και ως \mathbf{T}_R (R: *reference*), αποκαλείται και ο Lagrange τανυστής των τάσεων. Καμιά φορά στη βιβλιογραφία ως I.P.-K. ονομάζεται ο ανάστροφος του ως άνω ορισμένου τανυστή Σ .

²⁷ Αγγλ. *nominal stress tensor*

Από την ολοκληρωτική εξίσωση (8.107) και την υπόθεση ότι αυτή ισχύει για κάθε χωρίο $V^{(0)} \subseteq V^{(0)}$ προκύπτουν οι δυναμικές εξισώσεις σε μία «υλική» περιγραφή,

$$\frac{\partial}{\partial \xi_k} \Sigma_{ik}(\xi_m, t) + \rho^{(0)}(\xi_m, t) g_i = \rho^{(0)}(\xi_m, t) \frac{\partial}{\partial t} v_i^L(\xi_m, t) \quad (8.108)$$

ή συνοπτικά

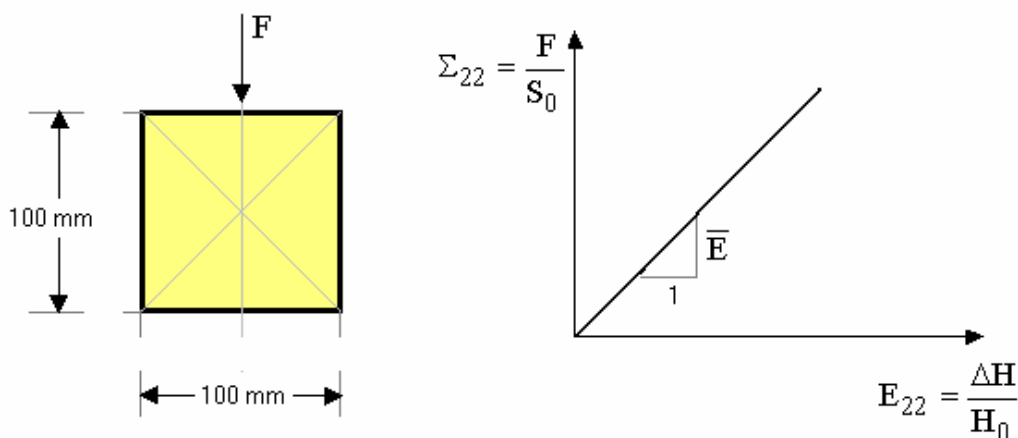
$$\frac{\partial \Sigma_{ik}}{\partial \xi_k} + \rho^{(0)} g_i = \rho^{(0)} \frac{\partial v_i^L}{\partial t} \quad (8.109)$$

Εν προκειμένω από την Α.Δ.Στ. δεν προκύπτει η συμμετρία του Σ , όπως συμβαίνει με τον ταυυστή σ , αλλά η σχέση

$$\Sigma_{ik} F_{jk} = F_{ik} \Sigma_{jk} \quad (8.110)$$

που εκφράζει επίσης την ισορροπία ροπών στο στοιχείο στην τρέχουσα απεικόνιση. Είναι φανερό από τον ορισμό του, ότι ο Σ δεν είναι συμμετρικός ταυυστής. Παρ' όλα αυτά η παραπάνω σχέση (8.110) περιορίζει επίσης στις 6 τις ανεξάρτητες συνιστώσες του ταυυστή Σ .

Άσκηση



Εικ. 8-22

Κυβικό δοκίμιο από ασυμπίεστο υλικό (Εικ. 8-22) έχει αρχικό ύψος $H_0 = 100 \text{ mm}$ και υπόκειται σε αξονική επίπεδη θλίψη (η τροπή κατά τον άξονα 3 καθέτως στ επίπεδο του σχήματος είναι μηδέν και κατά τον οριζόντιο άξονα 1 είναι ανεμπόδιστη). Τα πειραματικά αποτελέσματα παρίστανται γραφικά σε ένα διάγραμμα ονομαστικής αξονικής (I.P.-K.) τάσεως, $\Sigma_{22} = F/S_0$ και τεχνικής αξονικής τροπής $E_{22} = \Delta H/H_0$, όπου H και S είναι το ύψος και η διατομή του δοκιμίου, αντιστοίχως. Το αντίστοιχο διάγραμμα προκύπτει σε καλή

προσέγγιση να είναι ευθεία διερχόμενη από την αρχή των αξόνων και με κλίση δεδομένη \bar{E} . Να βρεθεί η σχέση μεταξύ πραγματικής τάσεως σ_{22} και λογαριθμικής τροπής λ_{22} .

8.15 Ο 2^{ος} Piola-Kirchhoff και άλλοι τανυστές των τάσεων

Στη βιβλιογραφία πέραν του πραγματικού και ονομαστικού τανυστή των τάσεων σ και Σ , αντιστοίχως, εμφανίζονται και άλλοι τανυστές των τάσεων ανάλογα με τις ανάγκες τις εκάστοτε θεωρητικής διατυπώσεως. Ένας απλός και συστηματικός τρόπος για να ταξινομήσει κανείς ένα μεγάλο αριθμό τέτοιων τανυστών βασίζεται στην εξής διαδικασία²⁸: Σημείο εκκίνησης αποτελεί πάντα ο τανυστής των τάσεων κατά Cauchy, που, όπως είδαμε πιο πάνω, ορίζεται ως ο τελεστής εκείνος που απεικονίζει το προσανατολισμένο επιφανειακό στοιχείο dS_k στην τρέχουσα απεικόνιση $C^{(t)}$ στη στοιχειώδη δύναμη dt_k στη τρέχουσα απεικόνιση $C^{(t)}$ του θεωρούμενου σώματος \mathbf{B} ,

$$dt_i = \sigma_{ki} dS_k \quad \text{ή} \quad dt = \sigma^T d\mathbf{S} \quad (\text{Cauchy}) \quad (8.111)$$

Οι τανυστές που θα οριστούν παρακάτω αφορούν όλοι στην εντατική κατάσταση στην τρέχουσα απεικόνιση $C^{(t)}$, δηλαδή όλοι περιγράφουν το ίδιο αντικείμενο: την ένταση στο σώμα \mathbf{B} τη χρονική στιγμή t . Όπως είδαμε πιο πάνω το προσανατολισμένο επιφανειακό στοιχείο $dS_k^{(0)}$ είναι εκείνο το στοιχείο στην απεικόνιση αναφοράς, το οποίο κατά την παραμόρφωση μεταπίπτει στο στοιχείο dS_k ,

$$dS_k = J F_{mk}^{-1} dS_m^{(0)} \quad \text{ή} \quad d\mathbf{S} = |\det(\mathbf{F})| \mathbf{F}^{-1} d\mathbf{S}^{(0)} \quad (8.112)$$

$$dS_k^{(0)} = J^{-1} F_{mk} dS_m \quad \text{ή} \quad d\mathbf{S}^{(0)} = \frac{1}{|\det(\mathbf{F})|} \mathbf{F}^T d\mathbf{S} \quad (8.113)$$

Ο 1.P.-K. τανυστής των τάσεων ορίσθηκε μέσω της απεικόνισσεως,

$$dS_k^{(0)} \xrightarrow{[\Sigma]} dt_k \quad (8.114)$$

δηλαδή μέσω των σχέσεων

$$dt_i = \Sigma_{im} dS_m^{(0)} \quad \text{ή} \quad dt = \Sigma d\mathbf{S}^{(0)} \quad (1. \text{ Piola-Kirchhoff}) \quad (8.115)$$

και οδήγησε στο μη-συμμετρικό τανυστή (γιατί;)

$$\Sigma_{im} = J \sigma_{ki} F_{mk}^{-1} \quad \text{ή} \quad \Sigma = J \sigma^T \mathbf{F}^{-T} \quad (8.116)$$

²⁸ D.M. Macvean (1968). Die Elementararbeit in einem Kontinuum und die Zuordnung von Spannungs- und Verzeigungstensorsen. ZAMP, Vol. 19, 157-185.

Υπενθυμίζουμε ότι ο \mathbf{F} απεικονίζει το υλικό γραμμικό στοιχείο $d\xi$ στην απεικόνιση αναφοράς $C^{(0)}$ στο ίδιο υλικό στοιχείο $d\mathbf{x}$ στην τρέχουσα απεικόνιση $C^{(t)}$ και αντιστρόφως ότι ο \mathbf{F}^{-1} απεικονίζει το $d\mathbf{x}$ στο $d\xi$,

$$dx_i = F_{ij}d\xi_j \Leftrightarrow d\xi_i = F_{ij}^{-1}dx_j \quad (8.117)$$

Εισάγουμε τώρα μία πλασματική στοιχειώδη δύναμη $d\mathbf{t}^{(0)}$ στην απεικόνιση αναφοράς, που προκύπτει από τη στοιχειώδη δύναμη $d\mathbf{t}$ στην τρέχουσα απεικόνιση όπως το υλικό στοιχείο $d\xi$ από το $d\mathbf{x}$

$$dt_i = F_{ij}dt_j^{(0)} \Leftrightarrow dt_j^{(0)} = F_{ij}^{-1}dt_j \quad (8.118)$$

Αν τώρα εισάγουμε την πρώτη από τις παραπάνω σχέσεις στον ορισμό του 1.P-K. τανυστή παίρνουμε,

$$F_{ij}dt_j^{(0)} = \Sigma_{ik}dS_k^{(0)} \Rightarrow F_{mi}^{-1}F_{ij}dt_j^{(0)} = F_{mi}^{-1}\Sigma_{ik}dS_k^{(0)} \quad (8.119)$$

$$\delta_{mj}dt_j^{(0)} = F_{mi}^{-1}J\sigma_{nk}F_{in}^{-1}dS_k^{(0)} \Rightarrow dt_m^{(0)} = F_{mi}^{-1}J\sigma_{nk}F_{in}^{-1}dS_k^{(0)} = K_{km}dS_k^{(0)} \quad (8.120)$$

Οι παραπάνω υπολογισμοί μας επιτρέπουν να εισάγουμε δύο νέους *συμμετρικούς τανυστές* των τάσεων,

$$T_{ij} = J\sigma_{ij} \quad \text{ή} \quad \mathbf{T} = \mathbf{J}\boldsymbol{\sigma} \quad (\text{Kirchhoff}) \quad (8.121)$$

και

$$K_{im} = F_{mp}^{-1}\Sigma_{pk} = F_{mp}^{-1}J\sigma_{ni}F_{pn}^{-1} \quad \text{ή} \quad \mathbf{K} = \mathbf{F}^{-1}\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{F}^{-1}(\mathbf{J}\boldsymbol{\sigma})\mathbf{F}^{-T} \quad (8.122)$$

ή

$$\mathbf{K} = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{T}\mathbf{F}^{-T} \quad (2. \text{Piola-Kirchhoff}) \quad (8.123)$$

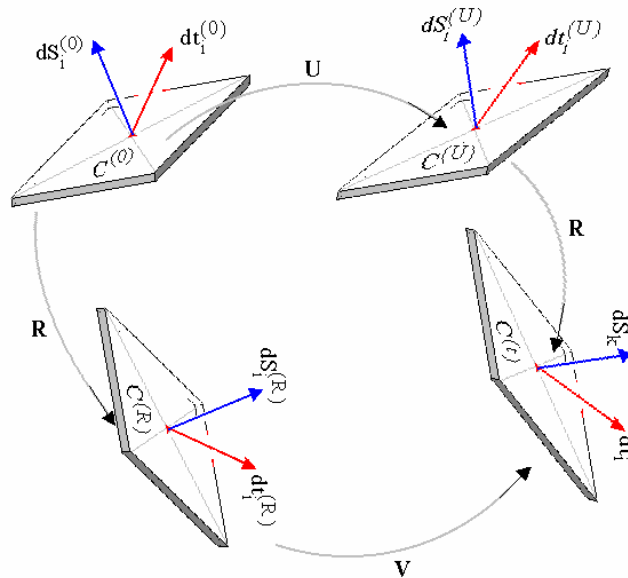
Και οι δύο αυτοί τανυστές εμφανίζονται στη βιβλιογραφία σε καταστατικές εξισώσεις για μη γραμμικά ελαστικά υλικά. Παρατηρούμε ότι τόσο ο Kirchhoff όσο και ο 2. Piola-Kirchhoff είναι συμμετρικοί τανυστές (γιατί;).

Υπενθυμίζουμε ότι ο 2.P.-K. ορίζεται ως ο τελεστής εκείνος που απεικονίζει το προσανατολισμένο επιφανειακό στοιχείο $dS_k^{(0)}$ (στην απεικόνιση αναφοράς $C^{(0)}$ του θεωρούμενου σώματος \mathbf{B}) στην απεικόνιση $dt_k^{(0)}$ (στην απεικόνιση αναφοράς $C^{(0)}$) της στοιχειώδους δύναμης dt_k ,

$$dS_k^{(0)} \xrightarrow{[K]} dt_k^{(0)} \quad (8.124)$$

ή

$$dt_i^{(0)} = K_{ki} dS_k^{(0)} \quad \text{ή} \quad dt^{(0)} = \mathbf{K}^T d\mathbf{S}^{(0)} \quad (8.125)$$



Εικ. 8-23: Απεικονίσεις της στοιχειώδους προσανατολισμένης υλικής επιφάνειας και της στοιχειώδους δύναμης

Πέραν της αρχικής $C^{(0)}$ και της τρέχουσας απεικόνισης $C^{(t)}$ μπορούμε να ορίσουμε πλασματικές ενδιάμεσες απεικονίσεις, χωρίς να εξετάζουμε αν και πως είναι δυνατόν αυτές να υλοποιηθούν. Η διαδικασία αυτή γίνεται στη βάση της πολικής ανάλυσης της βαθμίδας παραμορφώσεως,

$$F_{ij} = R_{ik} U_{kj} = V_{ik} R_{kj} \quad (8.126)$$

Οπότε, ομοίως προς τους ορισμούς

$$dx_i = F_{ij} d\xi_j \quad (8.127)$$

$$dS_k = J F_{mk}^{-1} dS_k^{(0)} \quad (8.128)$$

$$dt_j = F_{ij} dt_j^{(0)} \quad (8.129)$$

μπορούμε να ορίσουμε τα εξής διανύσματα στις ενδιάμεσες πλασματικές απεικονίσεις: Στην απεικόνιση

$$C^{(U)} : dx_i^{(U)} = U_{ik} dx_k^{(0)} \quad (8.130)$$

ορίζουμε τα στοιχεία,

$$d\mathbf{S}^{(U)} = |\det(\mathbf{U})| \mathbf{U}^{-T} d\mathbf{S}^{(0)}, \quad d\mathbf{t}^{(U)} = \mathbf{U} d\mathbf{t}^{(0)} \quad (8.131)$$

και στην απεικόνιση

$$C^{(R)}: dx_i^{(R)} = R_{ik} dx_k^{(0)} \quad (8.132)$$

ορίζουμε τα στοιχεία,

$$d\mathbf{S}^{(R)} = \mathbf{R}^{-T} d\mathbf{S}^{(0)}, \quad d\mathbf{t}^{(R)} = \mathbf{R} d\mathbf{t}^{(0)} \quad (8.133)$$

Στη βάση απεικονίσεων της μορφής (),

$$dS_k^{(i)} \xrightarrow{[T_{(i,j)}]} dt_k^{(j)} \quad (8.134)$$

μαζί με τους τανυστές $\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\Sigma}$ και \mathbf{K} που ορίσαμε πιο πάνω, μπορούμε συνολικά να ορίσουμε **16** τανυστές των τάσεων. Για παράδειγμα αναφέρουμε το λεγόμενο *συστρέφομενο τανυστή των τάσεων*²⁹, που είναι συμμετρικός και ορίζεται στην απεικόνιση $C^{(U)}$ ως εξής:

$$d\mathbf{t}^{(U)} = \mathbf{T}_\sigma^T d\mathbf{S}^{(U)} \Rightarrow \mathbf{T}_\sigma = \mathbf{R}^T \boldsymbol{\sigma} \mathbf{R} \quad (8.135)$$

Άσκηση

Με βάση τον παραπάνω ορισμό να υπολογισθεί η υλική χρονική παράγωγος του συστρέφομενου τανυστή των τάσεων \mathbf{T}_σ και να γίνει η σύγκρισή της με την κατά Jaumann χρονική παράγωγος του $\boldsymbol{\sigma}$. Υπενθυμίζουμε ότι συμφώνως προς τα λεχθέντα στο Κεφ. 5.4 η χρονική παράγωγος κατά Jaumann ενός τανυστή \mathbf{T} σχετίζεται με την υλική χρονική του παράγωγος βάσει της κάτωθι σχέσεως,

$$\overset{\circ}{T}_{ij} = \frac{dJ}{dt} T_{ij} = \dot{T}_{ij} + T_{ik} W_{kj} - W_{ik} T_{kj} \quad (8.136)$$

²⁹ Αγγλ. *co-rotated stress tensor*