

## 7. Η ΑΡΧΗ ΔΙΑΤΗΡΗΣΕΩΣ ΤΗΣ ΜΑΖΑΣ

7.	Η ΑΡΧΗ ΔΙΑΤΗΡΗΣΕΩΣ ΤΗΣ ΜΑΖΑΣ	217
7.1	Υλική χρονική παράγωγος καθολικών μεγεθών	219
7.2	Η αρχή διατηρήσεως της μάζας	223
7.3	Μονοδιάστατη ροή ασυμπίεστου ρευστού	227
7.4	Εξίσωση συνέχειας σε δύο διαστάσεις	229
7.5	Διατήρηση της μάζας σε μονοφασικό κοκκώδες υλικό	234
7.6	Διατήρηση της μάζας σε διαφασικό κοκκώδες υλικό	237
7.7	Ροή σε πορώδη μέσα: ο νόμος του Darcy	240
7.8	Ροϊκά δίκτυα	243

Οι αρχές διατηρήσεως στη Μηχανική των Συνεχών Μέσων είναι μαθηματικές προτάσεις που έχουν γενικό χαρακτήρα, με την έννοια ότι καλύπτουν μεγάλο εύρος εφαρμογών και είναι εκ πρώτης όψεως ανεξάρτητες των ιδιοτήτων του υλικού το οποίο εξετάζεται<sup>1,2</sup>. Παρ' όλ' αυτά θα πρέπει να τονίσουμε ότι η εκάστοτε διατύπωση των αρχών διατηρήσεως ορίζει και περιορίζει συγχρόνως την μαθηματική περιγραφή της μηχανικής συμπεριφοράς του εκάστοτε θεωρούμενου Συνεχούς Μέσου. Οι αρχές διατηρήσεως διατυπώνονται είτε σε ολοκληρωτική είτε σε διαφορική μορφή. Στο κεφάλαιο αυτό θα μας απασχολήσει η Αρχή Διατηρήσεως της Μάζας (Α.Δ.Μ.), η οποία και θα επεξηγηθεί σε μια σειρά πρακτικών εφαρμογών.

---

<sup>1</sup> Πρβλ. F. Ziegler, Didaktische Aspekte in mechanischen Erhaltungssätzen (Tutorial aspects in mechanical conservation laws), GAMM-Mitteilungen, Heft 1,61-72, 1998.

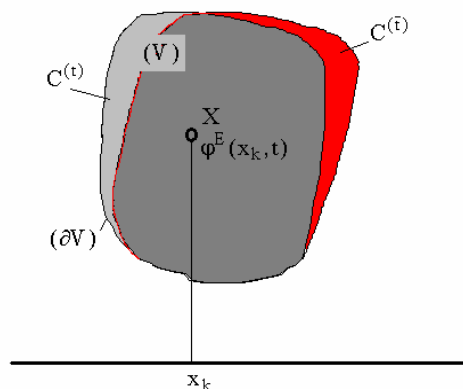
<sup>2</sup> Ι. Βαρδουλάκη, *Εισαγωγή στη Μηχανική του Συνεχούς Μέσου*, Εκδ. Συμμετρία, 2002.

© 7. Η ΑΡΧΗ ΔΙΑΤΗΡΗΣΕΩΣ ΤΗΣ ΜΑΖΑΣ, 2008

Ιωάννης Γ. Βαρδουλάκης, Dr-Ing., Καθηγητής της Μηχανικής στο Ε. Μ. Πολυτεχνείο

Τ.Θ. 144, Παιανία 190-02, <http://geolab.mechan.ntua.gr/>, [I.Vardoulakis@mechan.ntua.gr](mailto:I.Vardoulakis@mechan.ntua.gr)

## 7.1 Υλική χρονική παράγωγος καθολικών μεγεθών



Εικ. 7-1: Απεικονίσεις ενός παμορφώσιμου σώματος το οποίο στην τρέχουσα απεικόνιση καταλαμβάνει το χωρίο  $V$  με σύνορο  $\partial V$ .

Έστω ένα βαθμωτό μέγεθος σε χωρική περιγραφή

$$\phi = \phi^E(x_k, t) \quad (7.1)$$

Θεωρούμε ότι το μέγεθος αυτό είναι ορισμένο πάνω σε ένα χωρίο ενός υλικού σώματος, του οποίου τα Υ.Σ. στην τρέχουσα απεικόνιση  $C(t)$  καταλαμβάνουν τον όγκο  $V$  (Εικ. 7-1). Έστω τώρα το καθολικό εκείνο μέγεθος, που ορίζεται ως το ολοκλήρωμα του πεδίου  $\phi$  πάνω στο χωρίο  $V$ ,

$$\psi(t) = \int_{(V)} \phi^E(x_k, t) dV \quad (7.2)$$

Στην περίπτωση αυτή το πεδίο  $\phi$  καλείται η *πυκνότητα* του καθολικού μεγέθους  $\psi$ . Με δεδομένο το καθολικό μέγεθος  $\psi(t)$ , ζητείται τώρα να υπολογισθεί η χρονική του μεταβολή του, με την προϋπόθεση ότι ο όγκος πάνω στον οποίο γίνεται η χωρική ολοκλήρωση για τον υπολογισμό του καθολικού μεγέθους αυτού περιλαμβάνει πάντοτε τα ίδια Υ.Σ.. Για τον υπολογισμό της χρονικής μεταβολής (τ.ε. της υλικής παραγώγου)

$$\dot{\psi} = \frac{d\psi}{dt} \quad (7.3)$$

παρατηρούμε κατ' αρχήν ότι η δυσκολία έγκειται στο γεγονός ότι όσον αφορά το ολοκλήρωμα στο δεξιό μέρος του ορισμού της  $\psi(t)$ , Εξ. (7.2), τόσο η πυκνότητα

$\phi = \phi^E(x_k, t)$  όσο και το χωρίο αλλάζουν με τον χρόνο. Για το λόγο αυτό μετασχηματίζουμε το παραπάνω ολοκλήρωμα, Εξ. (7.2), στον αρχικό όγκο  $V_0$ , στην απεικόνιση αναφοράς  $C^{(0)}$ ,

$$\psi(t) = \int_{(V_0)} \phi^L(\xi_k, t) J dV_0 \quad (7.4)$$

όπου κάναμε χρήση των σχέσεων

$$\phi^E(x_k, t) = \phi^E(\chi_k(\xi_j, t)) = \phi^L(\xi_j, t) \quad (7.5)$$

και

$$dV = J dV_0 \quad (7.6)^3$$

Οπότε,

$$\dot{\psi} = \frac{D}{Dt} \int_{(V_0)} \phi^L(\xi_k, t) J dV_0 = \int_{(V_0)} \frac{D}{Dt} (\phi^L(\xi_k, t) J) dV_0 \Rightarrow \quad (7.7)$$

$$\dot{\psi} = \int_{(V_0)} \Pi dV_0 \quad (7.8)$$

όπου

$$\Pi = J \frac{\partial}{\partial t} \phi^L(\xi_k, t) + \phi \frac{DJ}{Dt} \quad (7.9)$$

Παρατηρούμε τώρα ότι λαμβάνοντας υπόψη την εξίσωση κινήσεως του σώματος,  $x_i = \chi_i(\xi_k, t)$ , παίρνουμε

$$\begin{aligned} \frac{DJ}{Dt} &= \frac{\partial J}{\partial F_{ij}} \frac{\partial}{\partial t} F_{ij}(\xi_k, t) = \frac{\partial J}{\partial F_{ij}} \frac{\partial}{\partial t} \left( \delta_{ij} + \frac{\partial u_i^L}{\partial \xi_j} \right) = \frac{\partial J}{\partial F_{ij}} \frac{\partial}{\partial \xi_j} \frac{\partial u_i^L}{\partial t} \\ &= \frac{\partial J}{\partial F_{ij}} \frac{\partial v_i^L}{\partial \xi_j} = \frac{\partial J}{\partial F_{ij}} \frac{\partial v_i^E}{\partial x_k} \frac{\partial \chi_k}{\partial \xi_j} \\ &= \frac{\partial J}{\partial F_{ij}} F_{kj} \frac{\partial v_i^E}{\partial x_k} \end{aligned} \quad (7.10)$$

Κάνοντας χρήση της ταυτότητας,

---

<sup>3</sup> Πρβλ. Κεφ. 4.11

$$ad[F]_{mk} F_{ik} = \det[F] \delta_{mi} = J \delta_{mi} \quad (7.11)$$

και με την παρατήρηση ότι ο όρος  $ad[F]_{ik}$  δεν περιέχει κανένα από τα στοιχεία  $F_{im}$ , τελικά παίρνουμε

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial F_{mj}} (ad[F]_{mk} F_{ik}) &= ad[F]_{mk} \frac{\partial F_{ik}}{\partial F_{mj}} = ad[F]_{mk} \delta_{im} \delta_{kj} = ad[F]_{ij} \\ \frac{\partial}{\partial F_{mj}} (ad[F]_{mk} F_{ik}) &= \frac{\partial}{\partial F_{mj}} (J \delta_{mi}) = \frac{\partial J}{\partial F_{ij}} \end{aligned}$$

ή

$$\frac{\partial J}{\partial F_{ij}} = ad[F]_{ij} \quad (7.12)$$

και

$$\frac{DJ}{Dt} = \frac{\partial J}{\partial F_{ij}} F_{kj} \frac{\partial v_i^E}{\partial x_k} = ad[F]_{ij} F_{kj} \frac{\partial v_i^E}{\partial x_k} = J \delta_{ik} \frac{\partial v_i^E}{\partial x_k} \quad (7.13)$$

ή

$$\frac{DJ}{Dt} = J \frac{\partial v_k^E}{\partial x_k} \Leftrightarrow \frac{DJ}{Dt} = J D_{kk} \quad (7.14)$$

Η παραπάνω σχέση είναι γνωστή ως *ανάπτυγμα του Euler*<sup>4</sup>.

Οπότε η Εξ. (7.9) δίδει,

$$\begin{aligned} \Pi &= J \frac{\partial}{\partial t} \varphi^L(\xi_k, t) + \phi \frac{DJ}{Dt} = J \frac{\partial}{\partial t} \varphi^L(\xi_k, t) + \phi J \frac{\partial v_k^E}{\partial x_k} \\ &= J \dot{\phi} + \phi J \partial_k v_k = (\dot{\phi} + \phi \partial_k v_k) J \end{aligned} \quad (7.15)$$

Από τις Εξ. (7.8), (7.15) και (7.6) παίρνουμε

$$\dot{\psi} = \int_{(V_0)} \Pi dV_0 = \int_{(V_0)} (\dot{\phi} + \phi \partial_k v_k) J dV_0 = \int_{(V)} (\dot{\phi} + \phi \partial_k v_k) dV \quad (7.16)$$

Αν αναπτύξουμε τώρα την υλική παράγωγο σε τοπικό όρο και μεταθετικούς όρους

---

<sup>4</sup> Αγγλ. *Euler expansion formula*

$$\dot{\phi} = \frac{\partial \phi^E}{\partial t} + v_k^E \frac{\partial \phi^E}{\partial x_k} \quad (7.17)$$

ή

$$\dot{\phi} = \partial_t \phi + v_k \partial_k \phi \quad (7.18)$$

η υπό ολοκλήρωση παράσταση στην Εξ.(7.16) γίνεται

$$\dot{\phi} + \phi \partial_k v_k = \partial_t \phi + v_k \partial_k \phi + \phi \partial_k v_k = \partial_t \phi + \partial_k (\phi v_k) \quad (7.19)$$

και

$$\dot{\psi} = \int_{(V)} (\dot{\phi} + \phi \partial_k v_k) dV = \int_{(V)} (\partial_t \phi + \partial_k (\phi v_k)) dV \quad (7.20)$$

Η ποσότητα,

$$q_k = \phi v_k \quad (7.21)$$

καλείται *ροή* της  $\phi$ . Κάνοντας χρήση του θεωρήματος Gauß μετασχηματίζουμε το τριπλό ολοκλήρωμα της αποκλίσεως της ροής της  $\phi$  σε επιφανειακό, πάνω στο σύνορο  $\partial V$  του όγκου  $V$  στην τρέχουσα απεικόνιση  $C^{(t)}$ ,

$$\int_{(V)} \frac{\partial q_k}{\partial x_k} dV = \int_{(\partial V)} q_k n_k dS \quad (7.22)$$

Με το μετασχηματισμό αυτό παίρνουμε τελικά το γνωστό στη βιβλιογραφία ως:

### Θεώρημα μεταφοράς του Reynolds

Έστω ένα καθολικό μέγεθος  $\psi(t)$  ορισμένο στην τρέχουσα απεικόνιση  $C^{(t)}$  ενός σώματος  $\mathbf{B}$ , που καταλαμβάνει στην απεικόνιση αυτή τον όγκο  $V$  και περιβάλλεται από την επιφάνεια  $\partial V$ . Έστω  $\phi = \phi^E(x_k, t)$  η πυκνότητα του  $\psi(t)$  στην απεικόνιση  $C^{(t)}$ , Εξ. (7.4). Η χρονική υλική παράγωγος του  $\psi(t)$  υπολογίζεται ως εξής

$$\dot{\psi} = \frac{d\psi}{dt} = \int_{(V)} \frac{\partial \phi^E(x_k, t)}{\partial t} dV + \int_{(\partial V)} q_n dS \quad (7.23)$$

όπου

$$q_n = q_k n_k = \phi v_k n_k = \phi v_n \quad , \quad v_n = v_k n_k \quad (7.24)$$

και όπου  $q_n dS$  είναι η «εξερχόμενη» ( $q_n > 0$ ) ή «εισερχόμενη» ( $q_n < 0$ ) ποσότητα  $\phi$  ανά μονάδα χρόνου διαμέσου του συνόρου  $\partial V$  του όγκου  $V$  στην τρέχουσα απεικόνιση  $C^{(t)}$ .

Η Εξ.(7.23), σημαίνει ότι η μεταβολή του καθολικού μεγέθους  $\psi(t)$  αποτελείται από ένα τοπικό όρο,  $\int \partial_t \phi dV$ , και ένα όρο εκ μεταφοράς,  $\int q_n dS$ , που αφορά στην εισροή και εκροή της εν λόγω ποσότητας διαμέσου του συνόρου  $\partial V$  του όγκου  $V$  στην τρέχουσα απεικόνιση.

Από τις εξ. (7.21) - (7.23) παίρνουμε τη εξής έκφραση του θεωρήματος Reynolds,

$$\frac{d\psi}{dt} = \int_{(V)} \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\phi v_k) \right) dV \quad (7.25)$$

Το θεώρημα Μεταφοράς είναι ένα σημαντικό κινηματικό θεώρημα που προκύπτει από το ανάπτυγμα Euler, Εξ. (7.14). Σε μία διάσταση το θεώρημα αυτό είναι γνωστό και ως κανόνας του Leibniz,

$$\frac{d}{dt} \int_{a(t)}^{b(t)} f(x,t) dx = \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial}{\partial t} f(x,t) dx + \frac{db}{dt} f(b,t) - \frac{da}{dt} f(a,t). \quad (7.26)$$

## 7.2 Η αρχή διατηρήσεως της μάζας

Έστω

$$dm = \rho(x_k, t) dV \quad (7.27)$$

η μάζα που περιέχεται σε ένα στοιχειώδη όγκο  $dV$  στην τρέχουσα απεικόνιση  $C^{(t)}$  ενός σώματος  $\mathbf{B}$ . Στην παραπάνω έκφραση με  $\rho = \rho^E(x_k, t)$  συμβολίζεται η πυκνότητα μάζας. Η συνολική μάζα που περιέχεται σε έναν όγκο  $V$  στην απεικόνιση  $C^{(t)}$ , υπολογίζεται από το ολοκλήρωμα,

$$m(t) = \int_{(B)} dm = \int_{(V)} \rho^E(x_k, t) dV \quad (7.28)$$

Συμφώνως προς το Θεώρημα Μεταφοράς του Reynolds έχουμε ότι,

$$\dot{m} = \int_{(V)} (\dot{\rho} + \rho \partial_k v_k) dV \quad (7.29)$$

Επειδή

$$\dot{\rho} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + v_k \frac{\partial \rho}{\partial x_k} \quad (7.30)$$

από την Εξ. (7.29) παίρνουμε ότι

$$\dot{m} = \int_{(V)} \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \partial_k (\rho v_k) \right) dV \quad (7.31)$$

ή κάνοντας χρήση του θεωρήματος αποκλίσεως,

$$\dot{m} = \int_{(V)} \partial_t \rho dV + \int_{(\partial V)} m_k n_k dS \quad (7.32)$$

Υπενθυμίζουμε ότι στις παραπάνω εκφράσεις  $v_i = v_i^E(x_k, t)$  είναι η ταχύτητα των Υ.Σ. του  $\mathbf{B}$ ,  $n_k$  το μοναδιαίο εξωτερικό διάνυσμα, κάθετο προς το σύνορο  $\partial V$  του  $\mathbf{B}$  στην τρέχουσα απεικόνιση και

$$m_k = \rho v_k \quad (7.33)$$

είναι η παροχή μάζας ανά μονάδα χρόνου και ανά μονάδα επιφανείας κάθετης προς την εκάστοτε ροϊκή γραμμή. Η ροή μάζας έχει διαστάσεις μάζας ανά μονάδα επιφανείας ανά μονάδα χρόνου,

$$[m_k] = \frac{M}{L^3} \frac{L}{T} = ML^{-2}T^{-1} \quad (7.34)^5$$

Όπως αναφέραμε πιο πάνω η ποσότητα  $m_n dS$ , με

$$m_n = m_k n_k \rightarrow m_n = \mathbf{m} \cdot \mathbf{n} \quad (7.35)$$

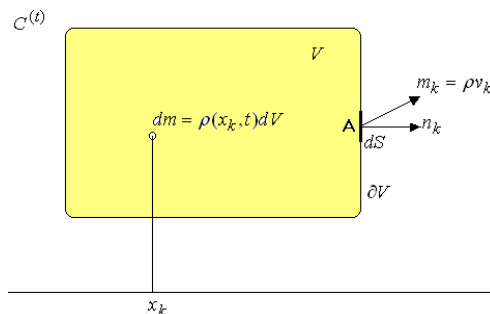
παριστά με  $m_n > 0$  την εκροή μάζας ανά μονάδα χρόνου στο τυχόν σημείο  $A$  του συνόρου  $\partial V$  (Εικ. 7-2). Οπότε ο ρυθμός μεταβολής μάζας στο εξεταζόμενο χωρίο γράφεται και ως άθροισμα δύο όρων, ενός τοπικού όρου και ενός όρου εκ μεταφοράς,

$$\dot{m} = \int_{(V)} \partial_t \rho dV + \int_{(\partial V)} m_n dS \quad (7.36)$$

---

<sup>5</sup> Μία εξίσωση όπως η Εξ. (7.34) καλείται διαστασιολογική εξίσωση, όπου με  $M$  συμβολίζουμε τη μάζα, με  $L$  το μήκος και με  $T$  το χρόνο.





Εικ. 7-2: Σχηματική παράσταση των όρων που υπεισέρχονται στη μαθηματική διατύπωση της Α.Δ.Μ.

Η διατήρηση της μάζας προκύπτει από το αίτημα ότι στο θεωρούμενο όγκο αναφοράς  $V$  συνολική μάζα παραμένει σταθερή,

$$\dot{m} = 0 \Leftrightarrow \int_{(V)} \partial_t \rho dV + \int_{(\partial V)} m_n dS = 0 \quad (7.37)$$

Άρα,

$$\int_{(V)} (\dot{\rho} + \rho \partial_k v_k) dV = 0 \quad (7.38)$$

Αν δεχθούμε ότι η ολοκληρωτική εξίσωση (7.38) ισχύει για οποιοδήποτε όγκο<sup>6</sup>  $V' \subseteq V$ , τότε προκύπτει η τοπική μορφή της Α.Δ.Μ.,

$$\dot{\rho} + \rho \partial_k v_k = 0 \quad (7.39)$$

ή

$$\frac{D\rho}{dt} + \rho \frac{\partial v_k}{\partial x_k} = 0 \quad (7.40)$$

ή

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho v_k) = 0 \quad (7.41)$$

Αναλυτικά η εξίσωση Δ.τ.Μ., (7.41), γράφεται,

<sup>6</sup> Αυτή η παραδοχή ισοδυναμεί με την υπόθεση ότι η πυκνότητα και η ταχύτητα είναι συνεχείς συναρτήσεις παντού στον εξεταζόμενο όγκο  $V$ . Στην περίπτωση όπου στον όγκο  $V$  αναπτύσσονται ασυνέχειες (κρουστικά κύματα - *shocks*), τότε από την ολοκληρωτική εξίσωση (5.4) έπεται μία τοπική συνθήκη η οποία περιορίζει την ταχύτητα μετάδοσης στον υπόχωρο της εν λόγω ασυνέχειας. Η συνθήκη αυτή αναφέρεται στην βιβλιογραφία ως η συνθήκη Rankine-Hugoniot. (Πρβλ. Ι.Βαρδουλάκη, *Εισαγωγή στη Μηχανική του Συνεχούς Μέσου*, Εκδ. Συμμετρία, 2002).

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v_k \frac{\partial \rho}{\partial x_k} + \rho \frac{\partial v_k}{\partial x_k} = 0 \quad (7.42)$$

ή σε καρτεσιανές συντεταγμένες

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + v_y \frac{\partial \rho}{\partial y} + v_z \frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = 0 \quad (7.43)$$

Από την παραπάνω σχέση παρατηρούμε ότι η Α.Δ.Μ. θα οδηγήσει γενικώς σε μία μη-γραμμική διαφορική εξίσωση. Π.χ. σε ένα μονοδιάστατο πρόβλημα η Εξ. (7.41) δίδει,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v) = 0 \quad (7.44)$$

Είναι επίσης φανερό ότι η θεώρηση της Α.Δ.Μ. εφοδιάζει το Συνεχές με την πυκνότητα μάζας του Υ.Σ. και με την ταχύτητα του Υ.Σ.. Άρα με τη διατύπωση της Α.Δ.Μ. θα εισάγει κανείς γενικώς τέσσερις άγνωστες ποσότητες,  $\rho, v_i$  ( $i=1,2,3$ ), και μόνο μία (βαθμωτή) εξίσωση, την Εξ. (7.43). Αυτό σημαίνει ότι αν περιορισθούμε μόνο σ' αυτή την αρχή για την επίλυση ενός αντίστοιχου προβλήματος, θα χρειασθούν επιπλέον σχέσεις μεταξύ των αγνώστων του προβλήματος, που θα αίρουν την αοριστία. Π.χ. στο μονοδιάστατο πρόβλημα θα απαιτήσουμε την ύπαρξη μιας «κινηματικής» σχέσεως της μορφής,

$$v = V(\rho) \quad (7.45)$$

Σχέσεις του τύπου αυτού καλούνται *κλείουσες* ή *καταστατικές σχέσεις*. Τυπικά παραδείγματα κινηματικών θεωριών του τύπου, Εξ. (7.44) και (7.45) είναι η θεωρία της κυκλοφοριακής ροής<sup>7,8</sup> και η θεωρία ιζηματογενέσεως<sup>9,10</sup>.

Σε ειδικές περιπτώσεις οι άρση της αοριστίας είναι σχετικά απλή υπόθεση και βασίζεται σε αντίστοιχα απλές καταστατικές υποθέσεις. Για παράδειγμα όταν η πυκνότητα είναι σταθερή στο χώρο, τότε οι όροι με τις παραγώγους της πυκνότητας είναι μηδέν, οπότε η Εξ. (7.43) καταλήγει στην εξής,

$$\rho \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = 0 \quad (7.46)$$

ή

<sup>7</sup> Αγγλ. *traffic flow theory*

<sup>8</sup> M.J. Lighthill and G.B. Whitham, On kinematic waves: I. Flood measurements in long rivers; II. Theory of traffic flow on long crowded roads. Proc. Roy. Soc. A., 229, 281-345 (1955).

P.I. Richards. Shock waves on the highway. Oper. Res. 4, 42-51 (1956).

<sup>9</sup> Αγγλ. *theory of sedimentation*

<sup>10</sup> H.S. Coe and G.H. Cleverger, Methods for determining the capacities of slime settling tanks. Trans. AIME 55 (1916), pp. 356-385.

G.J. Kynch (1952). A theory of sedimentation. Trans. Faraday Soc., 48, 166-176.

$$\rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad (7.47)$$

Κλασσικό παράδειγμα συνιστούν τα λεγόμενα ασυμπίεστα ρευστά, όπου η Α.Δ.Μ. οδηγεί στον κινηματικό περιορισμό

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad (7.48)$$

### Παρατήρηση

Στο σημείο αυτό θα παρατήσουμε ότι μία φυσική ποσότητα που αναφέρεται ως προς τη μονάδα μάζας ενός υλικού σώματος, τότε στην ονομασία αυτής της ποσότητας προσάπτεται το επίθετο «ειδικός», π.χ. ειδική εσωτερική ενέργεια κ.λπ.. Έστω  $s(x_k, t)$  η εν λόγω ειδική ποσότητα και έστω η καθολική ποσότητα,

$$S(t) = \int_{(B)} sdm = \int_{(V)} \rho s dV \quad (7.49)$$

Τότε βάσει του θεωρήματος Reynolds, εξ. (7.25), για  $\varphi = \rho s$ , παίρνουμε

$$\begin{aligned} \frac{dS(t)}{dt} &= \int_{(V)} \left( \frac{\partial}{\partial t} (\rho s) + \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho s v_k) \right) dV \\ &= \int_{(V)} \left( s \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial s}{\partial t} + s \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho v_k) + \rho v_k \frac{\partial s}{\partial x_k} \right) dV \\ &= \int_{(V)} \rho \left( \frac{\partial s}{\partial t} + v_k \frac{\partial s}{\partial x_k} \right) dV + \int_{(V)} \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho v_k) \right) s dV \end{aligned} \quad (7.50)$$

Αν υποθέσουμε ότι ισχύει η ΑΔΜ, εξ. (7.41), τότε από την εξ. (7.50) παίρνουμε

$$\dot{S}(t) = \frac{d}{dt} \int_{(V)} \rho s dV = \int_{(V)} \rho \dot{s} dV \quad (7.51)$$

### 7.3 Μονοδιάστατη ροή ασυμπίεστου ρευστού

Ως πρώτη εφαρμογή ας θεωρήσουμε τώρα την ειδική περίπτωση ενός ασυμπίεστου ρευστού, όπου εξ ορισμού η πυκνότητα των ΥΣ δεν αλλάζει:

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_0 = \text{const.} \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial x_k} = 0 \\ \Rightarrow \dot{\rho} &= \frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + v_k \frac{\partial \rho}{\partial x_k} = 0 \end{aligned} \quad (7.52)$$

Από τις παραπάνω εκφράσεις, Εξ. (7.37) και (7.38) για τη διατήρηση της μάζας παίρνουμε ότι

$$0 = \int_{(V)} \rho \partial_k v_k dV = \int_{(\partial V)} \rho v_k n_k dS \Rightarrow \int_{(\partial V)} m_n dS = 0 \quad (7.53)$$

δηλαδή οι εισροές και οι εκροές σε και από έναν όγκο αναφοράς εξισορροπούνται. Π.χ. στην περίπτωση μονοδιάστατης ροής έχουμε,

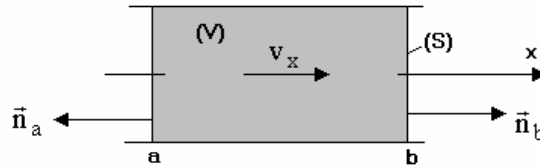
$$v_x = v(x, t) > 0 \quad (7.54)$$

$$n_x^{(a)} = -1, \quad n_x^{(b)} = +1 \quad (7.55)$$

και από την Εξ. (7.53) παίρνουμε

$$0 = \int_{(\partial V)} v_k n_k dS = v_x n_x S \Big|_{x=b} + v_x n_x S \Big|_{x=a} \quad (7.56)$$

όπου  $S(x, t)$  είναι το εμβαδόν της ορθής διατομής<sup>11</sup> στην τυχούσα θέση  $x$  τη χρονική στιγμή  $t$ . (Εικ. 7-3)



Εικ. 7-3: Ισορροπία εισροών και εκροών σε όγκο αναφοράς και σε μονοδιάστατη ροή

Η παραπάνω εξίσωση διατηρήσεως της μάζας, Εξ. (7.56), γράφεται επίσης και ως εξής

$$Q_b + Q_a = 0 \quad (7.57)$$

όπου οι ποσότητες

$$\begin{aligned} Q_a &= q_n S \Big|_a = \rho v_x n_x S \Big|_a = -\rho v S \Big|_a < 0 \\ Q_b &= q_n S \Big|_b = \rho v_x n_x S \Big|_b = \rho v S \Big|_b > 0 \end{aligned} \quad (7.58)$$

παριστούν τις εκροές μάζας ρευστού από τον όγκο αναφοράς. Πράγματι η ποσότητα,  $Q_b > 0$ , περιγράφει την εκροή στη διατομή  $x = b$  και η ποσότητα,  $Q_a < 0$ , περιγράφει την εισροή στη διατομή  $x = a$ , οπότε η Εξ.(7.57),

<sup>11</sup> Ενδεικτικά αναφέρουμε ότι σε σωλήνες με ελαστικά τοιχώματα το εμβαδόν της ορθής τους διατομής μεταβάλλεται με την εσωτερική πίεση του σωλήνα.

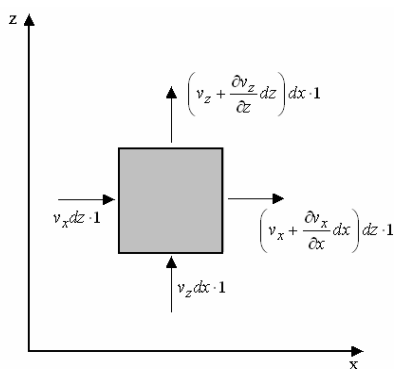
$$Q_b = -Q_a \quad (7.59)$$

περιγράφει ότι οι εκροές από έναν όγκο αναφοράς εξισορροπούνται ανά πάσα στιγμή από τις εισροές στον όγκο αυτό. Τέλος, επειδή  $\rho_a = \rho_b = \rho_0 = const.$ , παίρνουμε

$$vS|_{x=b} = vS|_{x=a} = const. \quad (7.60)$$

Η Εξ. (7.60) λέγεται *εξίσωση συνέχειας*<sup>12</sup> της ροής για ασυμπίεστα ρευστά και αποδίδεται από ορισμένους συγγραφείς<sup>13</sup> στον Leonardo da Vinci (1425-1519).

#### 7.4 Εξίσωση συνέχειας σε δύο διαστάσεις



Εικ. 7-4: Στοιχειώδης όγκος αναφοράς σε επίπεδη ροή.

Θεωρούμε ένα ασυμπίεστο ρευστό και ένα στοιχειώδη όγκο διαστάσεων  $dx$  και  $dz$  στο επίπεδο  $O(x, z)$  με μοναδιαίο πάχος, καθέτως προς το επίπεδο του σχήματος (Εικ. 7-4). Ο θεωρούμενος στοιχειώδης όγκος αυτός είναι,  $dV = dx \cdot dz \cdot 1$ . Η εξίσωση διατηρήσεως της μάζας εκφράζεται εν προκειμένω από τη συνθήκη *συνέχειας* της ροής, δηλαδή από το γεγονός ότι, όση ποσότητα ρευστού εισέρχεται στον όγκο  $dV$  ανά μονάδα χρόνου, τόση και εξέρχεται στον ίδιο χρόνο:

$$v_x dz \cdot 1 + v_z dx \cdot 1 = \left( v_x + \frac{\partial v_x}{\partial x} dx \right) dz \cdot 1 + \left( v_z + \frac{\partial v_z}{\partial z} dz \right) dx \cdot 1 \Rightarrow \quad (7.61)$$

Άρα

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (7.62)$$

<sup>12</sup> Αγγλ. continuity equation.

<sup>13</sup> Tokaty, G.A., A History and Philosophy of Fluid Mechanics, Dover, 1971.

Για την περαιτέρω επεξεργασία της Εξ.(7.62) υπενθυμίζουμε από τη Ρευστομηχανική<sup>14</sup> τους παρακάτω ορισμούς:

### Σωματιδιακές τροχιές<sup>15</sup>



Εικ. 7-5: Οι τροχιές οχημάτων σε κυκλοφοριακή ροή: Ερυθρές τροχιές ανήκουν σε απομακρυνόμενα οχήματα ενώ λευκές τροχιές σε επερχόμενα. Στη Ρευστομηχανική οι γραμμές αυτές καλούνται σωματιδιακές τροχιές. Θα παρατηρήσουμε όμως ότι αυτή η εικόνα αντιστοιχεί σε μία φωτογραφία με μεγάλο χρόνο εκθέσεως. Τέτοιες φωτογραφίες μας παρέχουν περιγραφή της κινήσεως την κατά Lagrange, ενώ φωτογραφίες με μικρό χρόνο εκθέσεως την περιγραφή της κινήσεως κατά Eulerian (γιατί;).

Σωματιδιακές τροχιές είναι εκείνες οι καμπύλες στο χώρο που διατρέχει ένα υλικό σωματίδιο με την παρέλευση του χρόνου. Για παράδειγμα στην Εικ. 7-5 φαίνονται οι τροχιές των οχημάτων σε ένα αυτοκινητόδρομο, γεγονός που επιτυγχάνεται πρακτικά, αν αφήσουμε το διάφραγμα της φωτογραφικής μηχανής ανοιχτό για κάποιο χρονικό διάστημα. Από μαθηματική σκοπιά η σωματιδιακή γραμμή ενός υλικού σημείου  $P$  είναι ολοκληρωτική καμπύλη του συστήματος των διαφορικών εξισώσεων

$$\begin{aligned} dx &= v_x dt \\ dy &= v_y dt \\ dz &= v_z dt \end{aligned} \tag{7.63}$$

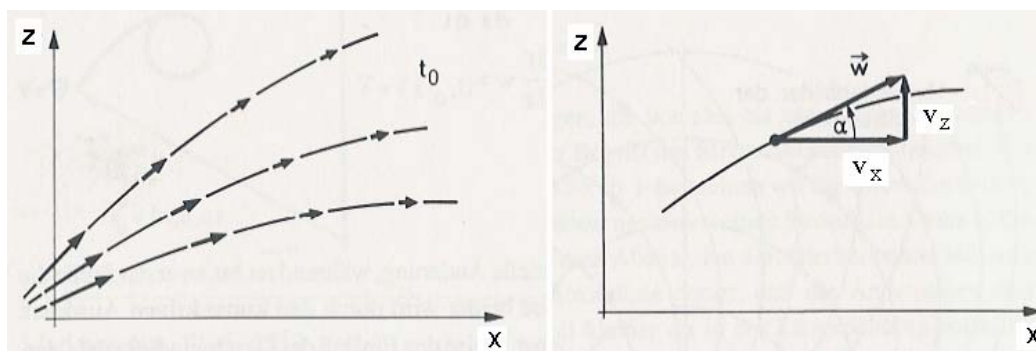
Παρατηρούμε ότι η σωματιδιακή τροχιά διέρχεται τη χρονική στιγμή  $t = t_0$  από εκείνο το σημείο του χώρου, που καταλαμβάνει το εν λόγω σωματίδιο  $P$  τη στιγμή εκείνη.

<sup>14</sup> Πρβλ. Granger, R. A., *Fluid Mechanics*. Dover, 1995

<sup>15</sup> Αγγλ. *pathlines*

Γραμμές ροής<sup>16</sup>

Εικ. 7-6: Μετεωρολογικός χάρτης, ενδεικτικός των ταχυτήτων επιφανειακών ανέμων σε δεδομένη περιοχή και χρονική στιγμή. Στη Ρευστομηχανική οι ολοκληρωτικές καμπύλες ενός τέτοιου πεδίου ταχυτήτων καλούνται γραμμές ροής.



Εικ. 7-7: Γραμμές ροής για μία δεδομένη χρονική στιγμή ως περιβάλλουσες του πεδίου ταχυτήτων τη στιγμή αυτή

Γραμμές ροής καλούνται οι περιβάλλουσες του πεδίου των ταχυτήτων. Για παράδειγμα στην Εικ. 7-6 φαίνεται το πεδίο ταχυτήτων των επιφανειακών ανέμων κάποια χρονική «στιγμή» στη βόρεια Αγγλία. Οι γραμμές ροής τη χρονική στιγμή  $t = t_0$  είναι ολοκληρωτικές καμπύλες του συστήματος των διαφορικών εξισώσεων (Εικ. 7-7),

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z} \quad (7.64)$$

Παρατηρούμε ότι ενώ υπάρχει μία τριπλή απειρία σωματιδιακών γραμμών (όσα και σημεία ενός χώρου των 3 διαστάσεων), ενώ υπάρχει μόνο μία διπλή απειρία γραμμών ροής, όσα και

<sup>16</sup> Αγγλ. *streamlines*

τα σημεία μιας επιφάνειας που αυτές διαπερνούν. Τέλος σημειώνουμε ότι, όταν οι ροή είναι *μόνιμη*<sup>17</sup>, τότε οι σωματιδιακές γραμμές και οι γραμμές ροής ταυτίζονται.

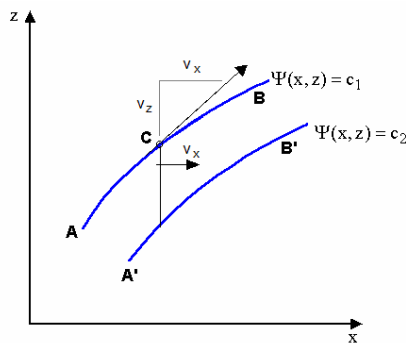
### Ροϊκή συνάρτηση

Ας υποθέσουμε τώρα ότι η ροή είναι *μόνιμη*, δηλαδή ανεξάρτητη του χρόνου  $t$ . Παρατηρούμε ότι, αν εισάγουμε μία συνάρτηση  $\Psi = \Psi(x, z)$  έτσι ώστε

$$v_x = \frac{\partial \Psi}{\partial z}, \quad v_z = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (7.65)$$

τότε η παραπάνω εξίσωση συνέχειας, Εξ. (7.62) ικανοποιείται εκ ταυτότητας, αφού

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z \partial x} = 0 \quad (7.66)$$



Εικ. 7-8: Γραμμές ροής σε μία δισδιάστατη ροή

Ας θεωρήσουμε τώρα τη γραμμή ροής (AB) σε μία δισδιάστατη ροή (Εικ. 7-8). Στο σημείο C της γραμμής ροής η ταχύτητα  $\mathbf{v}$  είναι εφαπτομενική. Επειδή οι συνιστώσες της ταχύτητας δίδονται από τις παραπάνω σχέσεις μέσω της συναρτήσεως  $\Psi = \Psi(x, z)$ , που είναι ανεξάρτητη του χρόνου  $t$ , οι γραμμές ροής ταυτίζονται με τις σωματιδιακές γραμμές (μόνιμη ροή), οπότε:

$$\frac{v_z}{v_x} = \frac{dz}{dx} \Rightarrow v_z dx - v_x dz = 0 \quad (7.67)$$

ή

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Psi}{\partial z} dz = 0 \Rightarrow d\Psi = 0 \quad (7.68)$$

<sup>17</sup> δηλαδή αμετάβλητη στο χρόνο



Η παραπάνω Εξ. (7.68) σημαίνει ότι κατά μήκος μίας ροϊκής γραμμής η συνάρτηση  $\Psi$  παραμένει σταθερή, δηλαδή η καμπύλη (AB) περιγράφεται από την εξίσωση,

$$Q = \int_{c_1}^{c_2} v_x dz = \int_{c_1}^{c_2} \frac{\partial \Psi}{\partial z} dz = c_2 - c_1 = \text{σταθ.} \quad (7.69)$$

Για το λόγο αυτό η συνάρτηση  $\Psi = \Psi(x, z)$  καλείται *ροϊκή συνάρτηση*<sup>18</sup>. Στο επίπεδο πρόβλημα, ο χώρος μεταξύ δύο ροϊκών γραμμών λέγεται ροϊκός σωλήνας. Οπότε συμπεραίνουμε ότι σε μία μόνιμη ροή το τυχόν σωματίδιο του ρευστού που βρίσκεται κάποια στιγμή σε σημείο μέσα στον ροϊκό σωλήνα (AB, A'B'), θα κινείται επί ροϊκής γραμμής που σε όλη της την έκταση θα βρίσκεται μέσα στο ροϊκό σωλήνα αυτό. Παρατηρούμε τέλος ότι η παροχή ενός ροϊκού σωλήνα, που ορίζεται από τις ροϊκές γραμμές  $\Psi = c_1$  και  $\Psi = c_2$ , είναι σταθερή κατά μήκος αυτού

$$Q = \int_{c_1}^{c_2} v_x dz = \int_{c_1}^{c_2} \frac{\partial \Psi}{\partial z} dz = c_2 - c_1 = \text{σταθ.} \quad (7.70)$$

Λόγω της ανωτέρω ιδιότητας ένα διανυσματικό πεδίο καλείται *σωληνοειδές*<sup>19</sup> όταν η απόκλιση του μηδενίζεται ( $\text{div } \mathbf{v} = 0$ ).

### Ασκήσεις

1. Να βρεθεί η συνάρτηση ροής της δισδιάστατης ασυμπίεστης ροής,

$$v_x = u(z) = U \left[ \left( \frac{z}{L} \right)^2 - \left( \frac{z}{L} \right) \right], \quad v_z = w = 0$$

2. Δίδεται η ροϊκή συνάρτηση,  $\Psi = e^x$ . Να υπολογισθεί η ταχύτητα και να σχεδιαστεί το πεδίο ροής μέσω κατάλληλης επιλογής ροϊκών γραμμών.
3. Δίδεται το πεδίο ταχυτήτων,

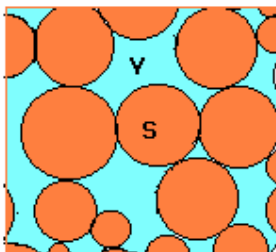
$$v_x = u(x) = x^2, \quad v_z = w(x, z) = -2xz$$

Να βρεθεί η εξίσωση των ροϊκών γραμμών.

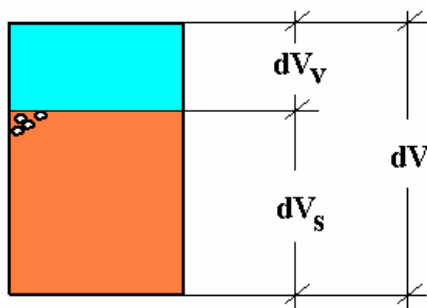
<sup>18</sup> Αγγλ. *stream function*.

<sup>19</sup> Αγγλ. *solenoidal*. Ένα σωληνοειδές πεδίο είναι ένα πεδίο ελεύθερο πηγών

### 7.5 Διατήρηση της μάζας σε μονοφασικό κοκκώδες υλικό



Εικ. 7-9: Σχηματική παράσταση κοκκώδους υλικού αποτελούμενου από κόκκους οι οποίοι αφήνουν κενά μεταξύ τους.



Εικ. 7-10: Διάγραμμα «φάσεων» σε μονοφασικό κοκκώδες υλικό, αποτελούμενου από στερεά φάση και κενά.

Ένας χαρακτηριστικός στοιχειώδης όγκος  $dV$  ενός κοκκώδους υλικού (π.χ. αμμώδους εδάφους) αποτελείται από στερεούς κόκκους που καταλαμβάνουν συνολικά όγκο  $dV_s$ <sup>20</sup> και από πόρους με όγκο  $dV_v$ , 21(Εικ. 7-9). Πορώδες<sup>22</sup> του κοκκώδους υλικού καλείται ο λόγος,

$$\phi = \frac{dV_v}{dV} \quad (7.71)$$

όπου (Εικ. 7-10),

$$dV = dV_s + dV_v \quad (7.72)$$

<sup>20</sup> δείκτης  $s$ , Αγγλ. *solids*

<sup>21</sup> δείκτης  $v$ , Αγγλ. *voids*,

<sup>22</sup> Αγγλ. *porosity*. Στην Εδαφομηχανική το πορώδες συμβολίζεται συνήθως ως  $n$ . Το σύμβολο  $\phi$  χρησιμοποιείται στην Πετρελαϊκή Μηχανική και στη Μηχανική Ταμιευτήρων.

Έστω  $\rho_s$  η πυκνότητα των κόκκων. Η πυκνότητα του πορώδους υλικού υπολογίζεται από τη σχέση,

$$\rho = \frac{dm_s}{dV} = \frac{\rho_s dV_s}{dV} = \rho_s \frac{dV - dV_v}{dV} \Rightarrow \quad (7.73)$$

$$\rho = (1 - \phi)\rho_s$$

Βάσει της Εξ. (7.40) η Α.Δ.Μ. για το Υ.Σ. του κοκκώδους υλικού δίδει,

$$\frac{D}{Dt} \rho + \rho \frac{\partial v_k}{\partial x_k} = 0 \quad (7.74)$$

ή

$$\frac{D}{Dt} ((1 - \phi)\rho_s) + (1 - \phi)\rho_s \frac{\partial v_k}{\partial x_k} = 0 \quad (7.75)$$

Για την περαιτέρω απλούστευση της παραπάνω εξίσωσης εισάγουμε την παραδοχή ότι οι κόκκοι είναι πρακτικά ασυμπίεστοι<sup>23</sup>

$$\rho_s = \text{σταθ.} \Rightarrow \dot{\rho}_s = 0 \quad (7.76)$$

Κατόπιν τούτων η Α.Δ.Μ. δίδει την εξής σχέση μεταξύ πορώδους και ρυθμού μεταβολής του όγκου,

$$\frac{\partial v_k}{\partial x_k} = \frac{\dot{\phi}}{1 - \phi} \quad (7.77)$$

Αν θεωρήσουμε ότι η ταχύτητα και η βαθμίδα της μετατοπίσεως των Υ.Σ. είναι απειροστικές ποσότητες, τότε

$$D_{kk} = \frac{\partial v_k}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\partial u_k^E}{\partial t} + v_m \frac{\partial u_m^E}{\partial x_m} \right) \approx \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial u_k^E}{\partial x_k} \quad (7.78)$$

Με το συμβολισμό,

$$\varepsilon = \frac{\partial u_k^E}{\partial x_k} \quad (7.79)$$

και την προσέγγιση,

---

<sup>23</sup> Π.χ. για χαλαζιακούς κόκκους,  $\rho_s = 2.75 \text{ g/cm}^3$  και συμπίεστικότητα σε ισότροπη καταπόνηση είναι  $c_s = 2.75 \cdot 10^{-2} \text{ GPa}^{-1}$

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial u_k^E}{\partial x_k} + v_l \frac{\partial}{\partial x_l} \frac{\partial u_k^E}{\partial x_k} \approx \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial u_k^E}{\partial x_k} \quad (7.80)$$

από τις Εξ. (7.78) έως (7.80) παίρνουμε

$$D_{kk} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}, \quad (7.81)$$

Παρατηρούμε τέλος ότι ο ρυθμός μεταβολής του πορώδους περιλαμβάνει γενικώς ένα τοπικό και ένα μεταθετικό όρο

$$\dot{\phi} = \frac{\partial \phi}{\partial t} + v_k \frac{\partial \phi}{\partial x_k} \approx \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (7.82)$$

Στις περισσότερες εφαρμογές οι όροι εκ μεταφοράς στην έκφραση για το ρυθμό μεταβολής του πορώδους θα θεωρηθούν ως αμελητέοι, ως γινόμενο μικρών ποσοτήτων, οπότε

$$\dot{\phi} \approx \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (7.83)$$

Στην περίπτωση αυτή οι παραπάνω σχέσεις (7.77) έως (7.83) δίδουν,

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \approx \frac{1}{1-\phi} \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (7.84)$$

Παρατηρούμε ότι για μονότονες, απειροστικές παραμορφώσεις από την παραπάνω σχέση έπεται η γνωστή από την Εδαφομηχανική σχέση<sup>24</sup>,

$$\Delta \varepsilon = \frac{\Delta \phi}{1-\phi} \quad (7.85)$$

όπου  $\Delta \varepsilon$  συμβολίζει την απειροστική ογκομετρική τροπή

$$\Delta \varepsilon = \Delta \varepsilon_{xx} + \Delta \varepsilon_{yy} + \Delta \varepsilon_{zz} \quad (7.86)$$

Η παραπάνω συσχέτιση μεταξύ μεταβολής του πορώδους (ή αντιστοίχως του δείκτη πόρων) θα χρησιμοποιηθεί στην πράξη, όταν π.χ. θα παραστήσουμε γραφικά τα αποτελέσματα μιας δοκιμής «στερεοποιήσεως» (συμπυκνώσεως) ενός εδαφικού υλικού, όπου η μεταβολή όγκου θα περιγραφεί συνήθως συναρτήσει της μεταβολής του δείκτη πόρων.

<sup>24</sup> Σε αντίθεση με τη Μηχανική του Συνεχούς Μέσου, συνήθως στην Εδαφομηχανική θα γίνει η παραδοχή ότι μείωση του όγκου είναι θετική, οπότε η Εξ. (7.85) θα αναφέρεται με διαφορετικό πρόσημο στο δεξιό μέρος της.

## 7.6 Διατήρηση της μάζας σε διφασικό κοκκώδες υλικό<sup>25</sup>

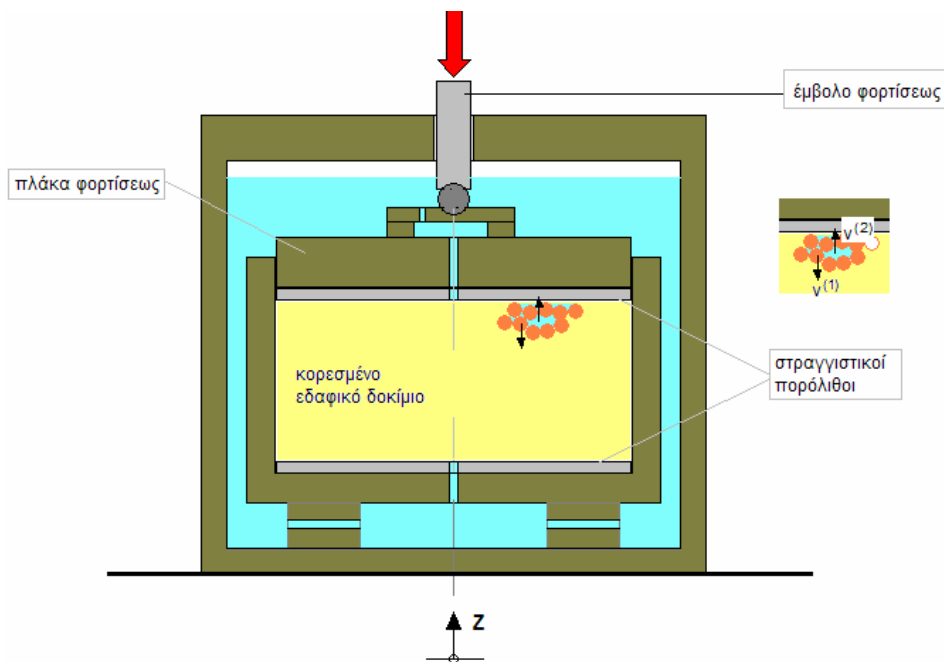
Θεωρούμε ένα διφασικό υλικό, αποτελούμενο από στερεό σκελετό (π.χ. κόκκους άμμου) και ρευστό (π.χ. ύδωρ), το οποίο καταλαμβάνει πλήρως τα κενά μεταξύ των κόκκων. Επίσης χάριν απλότητας θεωρούμε ότι οι δύο φάσεις, που συνθέτουν το εν λόγω υλικό, είναι ασυμπίεστες  $\rho_s = \text{σταθ.}$ ,  $\rho_f = \text{σταθ.}$ , και αντιστοίχως ορίζουμε μερικές πυκνότητες και μερικές ταχύτητες για τις δύο φάσεις: α) Στερεά φάση με πυκνότητα

$$\rho_1 = (1 - \phi)\rho_s \quad (7.87)$$

και ταχύτητα  $v^{(1)}$ . β) Ρευστή φάση με πυκνότητα

$$\rho_2 = \phi\rho_f \quad (7.88)$$

και ταχύτητα  $v^{(2)}$ . Συνήθως οι πυκνότητες και ταχύτητες των Υ.Σ. των διαφόρων φάσεων που συνθέτουν το «μείγμα» καλούνται μερικές πυκνότητες και μερικές ταχύτητες, αντιστοίχως.

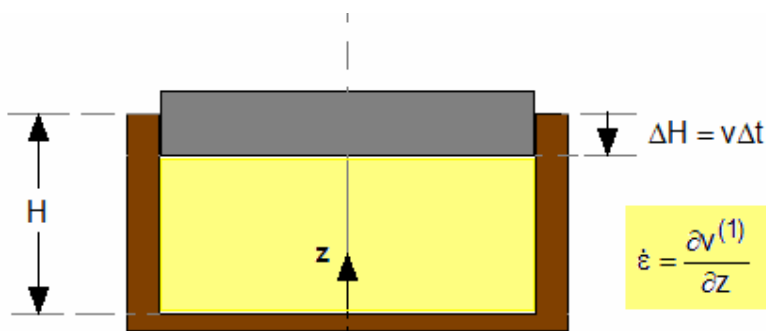


Εικ. 7-11: «Οιδημετρική» συμπίεση διφασικού κοκκώδους υλικού, κορεσμένου ύδατος.

Για να επεξηγήσουμε την έννοια των «μερικών ταχυτήτων», που υπεισέρχονται στις εξισώσεις διατηρήσεως της μάζας σε ένα διφασικό υλικό θεωρούμε για παράδειγμα την πειραματική διάταξη της Εικ. 7-11, στην οποία πραγματοποιείται η δοκιμή μονοαξονικής

<sup>25</sup> Vardoulakis, I and Sulem, J., *Bifurcation Analysis in Geomechanics*, Chapt. 5, Chapman & Hall, 1995.

θλίψεως ενός δοκιμίου εδάφους, κορεσμένου σε ύδωρ. Στη διάταξη αυτή παρατηρούμε ότι οι κόκκοι του εδαφικού υλικού κινούνται προς τα κάτω λόγω της δράσεως του εμβόλου ( $v^{(1)} < 0$ ). Το εδαφικό δοκίμιο συμπυκνώνεται, αφού η διάταξη αυτή επιβάλλει μείωση του όγκου του. Όπως θα δούμε παρακάτω η μείωση αυτή του όγκου του δοκιμίου εξηγείται ως μείωση του πορώδους του (δηλ. μείωση του όγκου των κενών), γεγονός που σημαίνει ότι κατά το πείραμα αυτό πρέπει να εξασφαλίσουμε όπως το δοκίμιο έχει τη δυνατότητα αποστραγγίσεως, μέσω ειδικών στιβαρών και υδατοδιαπερατών πωρόλιθων στην πάνω και την κάτω πλάκα επαφής. Στη διάταξη αυτή είναι φανερό ότι τα μόρια του ύδατος κινούνται με κατεύθυνση προς τους στραγγιστικούς πωρόλιθους, οπότε στην πάνω περιοχή του δοκιμίου η ταχύτητα της ρευστής φάσεως έχει αντίθετη φορά από ότι η ταχύτητα των κόκκων ( $v^{(2)} > 0$ ). Γενικώς σε ένα τέτοιο φαινόμενο συμπυκνώσεως με παράλληλη στράγγιση η ταχύτητα των σωματιδίων του ρευστού και εκείνη της στερεάς φάσεως θα διαφέρουν σημαντικά.



Εικ. 7-12: Σχηματικός ορισμός του ρυθμού τροπής όγκου της στερεάς φάσεως στο παράδειγμα της οιδημετρικής συμπίεσεως.

Στη προκείμενη περίπτωση ενός διφασικού υλικού σε μονοδιάστατη θλίψη η Α.Δ.Μ , Εξ. (7.41), θα γραφτεί για κάθε φάση ξεχωριστά,

$$\frac{\partial \rho_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} (\rho_\alpha v^{(\alpha)}) = 0, \quad (\alpha = 1, 2) \quad (7.89)$$

Όπως φαίνεται ενδεικτικά στην Εικ. 7-12, η ποσότητα

$$\dot{\epsilon} = \frac{\partial v^{(1)}}{\partial z} \quad (7.90)$$

περιγράφει τον ρυθμό μεταβολής του όγκου που καταλαμβάνει ο σκελετός της στερεάς φάσεως. και καλείται *ρυθμός τροπής όγκου της στερεάς φάσεως*. Στην περίπτωση που τόσο οι κόκκοι όσο και τα σωματίδια του ρευστού κινούνται τότε εισάγουμε την σχετική ταχύτητα

$v^{(2)} - v^{(1)}$  των σωματιδίων του ρευστού σε σχέση με τη ταχύτητα των στερεών. Στη βάση αυτής της σχετικής ταχύτητας ορίζουμε τέλος την ειδική σχετική παροχή κατά Gersevanov<sup>26</sup>,

$$q = \phi(v^{(2)} - v^{(1)}) \quad (7.91)$$

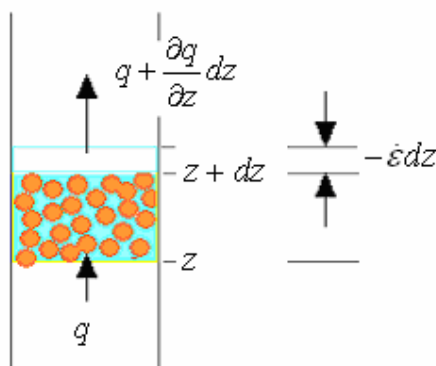
Με τη βοήθεια αυτών των ορισμών η διατήρηση της μάζας για κάθε μια από τις φάσεις του υλικού καταλήγει τελικά στις εξής εκφράσεις:

1) Στην εξίσωση, η οποία εκφράζει το γεγονός ότι, για ασυμπίεστες συνιστώσες, η μεταβολή του όγκου του κοκκώδους σκελετού εκφράζει μόνο τη μεταβολή του πορώδους,

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\phi}}{1 - \phi} \quad (7.92)$$

2) Στην εξίσωση, η οποία αποδίδει το γεγονός ότι οι αλλαγές του πορώδους παρέχουν χώρο για αποθήκευση του ρευστού

$$\frac{\dot{\phi}}{1 - \phi} = -\frac{\partial q}{\partial z} \quad (7.93)$$



Εικ. 7-13: Ροή διαμέσου κοκκώδους αιωρήματος

Απαλείφοντας το ρυθμό μεταβολής του πορώδους από τις παραπάνω εξισώσεις διατηρήσεως, (7.92) και (7.93), παίρνουμε κατ' αρχήν τη λεγόμενη *εξίσωση αποθηκεύσεως*<sup>27</sup>

$$-\frac{\partial q}{\partial z} = \dot{\varepsilon} \quad (7.94)$$

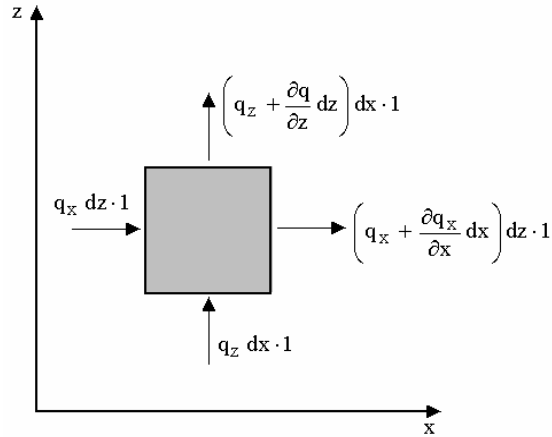
Η σχέση αυτή ερμηνεύεται ως εξής: Αν π.χ. κατά μήκος ενός ροϊκού σωλήνα οι εκροές είναι μικρότερες από τις εισροές, αυτό σημαίνει ότι μέσα στο υλικό αυξήθηκε ο χώρος όπου

<sup>26</sup> Αγγλ. relative specific discharge

<sup>27</sup> Αγγλ. storage equation

μπορεί να αποθηκευθεί το (ασυμπίεστο) ρευστό (Εικ. 7-13). Στην αντίθετη περίπτωση μείωση του χώρου αποθηκεύσεως του ρευστού σε ένα κοκκώδες υλικό με ασυμπίεστους κόκκους αντιστοιχεί στην μείωση του πορώδους. Το φαινόμενο που περιγράφουμε στην περίπτωση αυτή λέγεται *στράγγιση*.

### 7.7 Ροή σε πορώδη μέσα: ο νόμος του Darcy



Εικ. 7-14: Σχηματική παράσταση της εξισώσεως συνέχειας της ροής σε δύο διαστάσεις.

Θεωρούμε ένα διφασικό, πλήρως κορεσμένο κοκκώδες υλικό αποτελούμενο από στερεούς (ασυμπίεστους) κόκκους και από ασυμπίεστο ρευστό (π.χ. ύδωρ). Επίσης θεωρούμε την περίπτωση μόνιμης ροής του ρευστού των πόρων στο επίπεδο  $O(x, z)$  (Εικ. 7-14). Θα υποθέσουμε επίσης ότι το πορώδες είναι ομογενές και στατιστικά ισότροπο. Στην περίπτωση πλήρους κορεσμού και που το πορώδες είναι αμετάβλητο στο χρόνο δεν παρατηρείται αποθήκευση ρευστού. Από μαθηματική σκοπιά το γεγονός αυτό εκφράζεται ως εξής: Έστω  $dV$  ένας στοιχειώδης (απειροστικός) όγκος του μέσου με διαστάσεις  $dx$  και  $dz$  στο επίπεδο  $O(x, z)$  και μοναδιαίο πάχος κατά την τρίτη διάσταση. Έστω

$$\begin{aligned} q_x &= q_1(x, z) \\ q_y &= 0 \\ q_z &= q_3(x, z) \end{aligned} \quad (7.95)$$

οι συνιστώσες της αντίστοιχης ειδικής παροχής στο επίπεδο  $O(x, z)$  και ανά μονάδα μήκους καθέτως προς το επίπεδο της ροής. Συνέχεια της ροής στη θεωρούμενη περίπτωση αποδίδεται από την απαίτηση ισορροπίας μεταξύ ολικής εισροής και ολικής εκροής στον θεωρούμενο στοιχειώδη όγκο:

$$q_x dz \cdot 1 + q_z dx \cdot 1 = \left( q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx \right) dz \cdot 1 + \left( q_z + \frac{\partial q_z}{\partial z} dz \right) dx \cdot 1 \Rightarrow$$

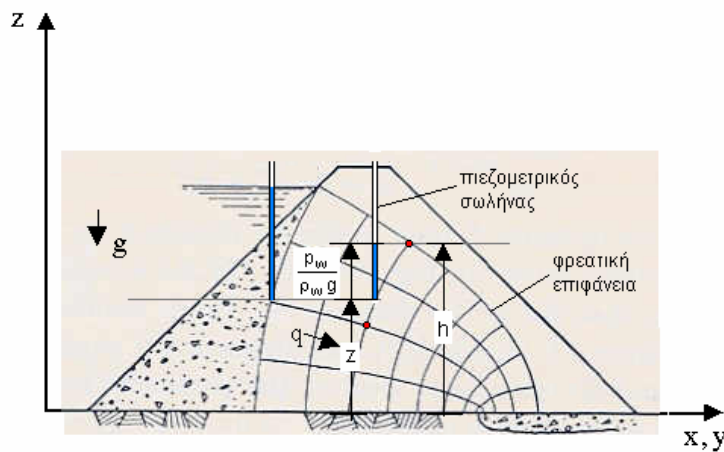


$$\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_z}{\partial z} = 0 \quad (7.96)$$

Όπως αναφέραμε πιο πάνω, εδώ μελετάμε την περίπτωση που η ροή του ύδατος στο πορώδες του εδάφους είναι μόνιμη. Παρατηρούμε ότι στην περίπτωση αυτή μπορούμε να εισάγουμε μια ροϊκή συνάρτηση,  $\Psi = \Psi(x, z)$  έτσι ώστε

$$q_x = \frac{\partial \Psi}{\partial z}, \quad q_z = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (7.97)$$

οπότε η εξίσωση συνέχειας ικανοποιείται εκ ταυτότητας.



Εικ. 7-15: Σχηματική παράσταση του υδραυλικού, πιεζομετρικού και γεωδαιτικού ύψους.

Η ροή ρευστού σε πορώδη μέσα περιγράφεται από τον νόμο του Darcy<sup>28</sup>, βάσει του οποίου η παροχή ύδατος ακολουθεί την βαθμίδα τη βαθμίδα του λεγόμενου υδραυλικού ύψους. Όπως φαίνεται στο σχήμα (Εικ. 7-15) το υδραυλικό ύψος<sup>29</sup> θα θεωρηθεί ως το άθροισμα του γεωδαιτικού ύψους και του πιεζομετρικού ύψους (Εικ. 7-15):

$$h = z + \frac{p_w}{\gamma_w}, \quad \gamma_w = \rho_w g \quad (7.98)$$

Με τον ορισμό αυτό του υδραυλικού ύψους ο νόμος του Darcy γράφεται ως εξής:

$$\begin{aligned} q_x &= -k_w \frac{\partial h}{\partial x} \\ q_z &= -k_w \frac{\partial h}{\partial z} \end{aligned} \quad (7.99)$$

<sup>28</sup> Πρβλ. Ι. Βαρδουλάκη, *Εισαγωγή στη Μηχανική του Συνεχούς Μέσου*, Εκδ. Συμμετρία, Κεφ. 6.8, 2002.

<sup>29</sup> Αγγλ. *total head*. Καλείται και υδραυλικό φορτίο.

Στο νόμο του Darcy ο συντελεστής  $k_w$  καλείται *συντελεστής διαπερατότητας*<sup>30</sup> του πορώδους μέσου στο ύδωρ που το διαρρέει. Ο συντελεστής διαπερατότητας εξαρτάται από τα φυσικά χαρακτηριστικά του κοκκώδους υλικού και από το ιξώδες του ρευστού (Πίνακας 7-1).

Πίνακας 7-1: Διαπερατότητα σε ύδωρ τυπικών εδαφών

Τύπος εδάφους	$k_w$ [cm/s]
χάλικες	1. ÷ 100.
χονδρόκοκκη άμμος	0.01 ÷ 1.
λεπτόκοκκη άμμος	0.001 ÷ 0.01
ιλυώδης άργιλος	0.00001 ÷ 0.001
άργιλος	$< 10^{-5}$

Παρατηρούμε τώρα ότι για ένα ομογενές μέσο ( $k_w = const.$ ) η συνάρτηση,

$$\Phi = -k_w h(x, z) + C = -k_w \left( \frac{p_w}{\gamma_w} + z \right) + C \quad (7.100)$$

είναι μια *συνάρτηση δυναμικού* για το διάλυσμα παροχής,

$$q_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad q_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z} \quad (7.101)$$

Συνδυάζοντας την εξίσωση συνέχειας, Εξ. (7.96) με τις παραπάνω σχέσεις παίρνουμε,

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad (7.102)$$

Η

$$\nabla^2 \Phi = 0 \quad (7.103)$$

### Παρατήρηση

Ένα αστρόβιλο και ελεύθερο πηγών διανυσματικό πεδίο καλείται *πεδίο Laplace*. Ως εκ τούτου το πεδίο παροχών είναι διαδοχικά:

<sup>30</sup> Αγγλ. *permeability coefficient*. Ο δείκτης (*f*: fluid) υποδηλώνει το ρευστό, το οποίο καταλαμβάνει τους πόρους.

Σωληνοειδές:  $\text{div } \mathbf{q} = 0$

Αστρόβιλο:  $\mathbf{q} = \text{grad } \Phi \Rightarrow \text{rot } \mathbf{q} = \text{rot } \text{grad } \Phi = 0$

Laplace:  $\text{div } \text{grad } \Phi \Rightarrow \nabla^2 \Phi = 0$

### 7.8 Ροϊκά δίκτυα<sup>31</sup>

Από τις Εξ. (7.97), που εκφράζουν το διάνυσμα της παροχής ως συνάρτηση της ροϊκής συναρτήσεως,

$$q_x = \frac{\partial \Psi}{\partial z} \quad , \quad q_z = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (7.104)$$

και τις Εξ.(7.101), που εκφράζουν το ίδιο διάνυσμα ως συνάρτηση της συναρτήσεως δυναμικού,

$$q_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad , \quad q_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z} \quad (7.105)$$

προκύπτουν οι λεγόμενες *συνθήκες Cauchy-Riemann* για τη ροϊκή συνάρτηση και τη συνάρτηση δυναμικού

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial x} &= \frac{\partial \Psi}{\partial z} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial z} &= -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \end{aligned} \quad (7.106)$$

Από τις εξισώσεις αυτές προκύπτει ότι η ροϊκή συνάρτηση ικανοποιεί επίσης την εξίσωση Laplace

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial x} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = 0 \quad (7.107)$$

Παρατηρούμε επίσης ότι  $\Phi(x,z) = \text{σταθ.}$ , λόγω των συνθηκών Cauchy-Riemann οι ισοδυναμικές καμπύλες είναι κάθετες προς τις ροϊκές γραμμές  $\Psi(x,z) = \text{const.}$ . Επίσης λόγω συνθηκών των Cauchy-Riemann, Εξ. (7.106), ή ισοδυνάμως λόγω των ολοκληρωμάτων

<sup>31</sup> Cedergren, H., R., *Seepage, Drainage and Flow Nets*, John Wiley & Sons, 1989.

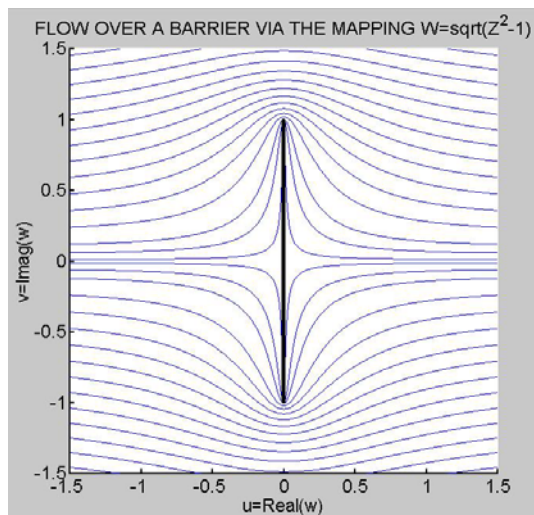
$$\Psi = \int \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} dz - \frac{\partial \Phi}{\partial z} dx \right) \quad (7.108)$$

$$\Phi = \int \left( \frac{\partial \Psi}{\partial z} dx - \frac{\partial \Psi}{\partial x} dz \right)$$

αρκεί ο προσδιορισμός μόνο μίας οικογένειας εξ' αυτών των συναρτήσεων για την επίλυση του προβλήματος της δισδιάστατης ροής υπογείων υδάτων. Αυτό γίνεται φανερό με την παρατήρηση ότι το λεγόμενο μιγαδικό δυναμικό (πρβλ.Εικ. 7-16),

$$\Omega = \Phi + i\Psi \quad (7.109)$$

λόγω των συνθηκών Cauchy-Riemann είναι μία ολόμορφη (αναλυτική) συνάρτηση. Αυτό σημαίνει ότι το πρόβλημα της μόνιμης ροής υπογείων υδάτων καταλήγει στο πρόβλημα επίλυσης της εξίσωσης Laplace για το μιγαδικό δυναμικό  $\Omega$  σε δεδομένο χωρίο κάτω από δεδομένες συνοριακές συνθήκες. Δηλαδή το πρόβλημα της μόνιμης υπόγειας ροής ύδατος τελικά μετατρέπεται σε πρόβλημα επίλυσης της εξίσωσης Laplace για τη μιγαδική συνάρτηση-μιγαδικό δυναμικό  $\Omega$ . Ακριβώς για αυτό το λόγο απαραίτητη είναι η υπενθύμιση μερικών βασικών εννοιών από τη μιγαδική ανάλυση κι η εισαγωγή στη μέθοδο της *σύμμορφης απεικόνισης*, που ενδείκνυται για τη λύση τέτοιων μιγαδικών προβλημάτων.



Εικ. 7-16: Ροϊκές γραμμές στην περιοχή ανακοπής μιας ομοιόμορφης ροής από επίπεδο πέτασμα

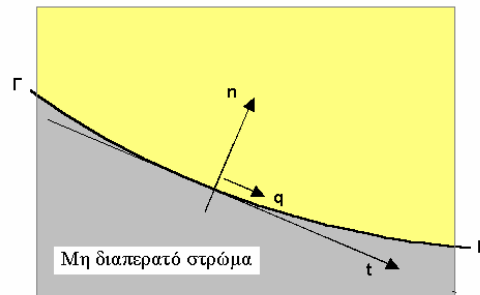
### Συνοριακές συνθήκες

Οι συνοριακές συνθήκες είναι από τη μεριά τους περιορισμοί στο σύνορο είτε για τη ροϊκή συνάρτηση, είτε για τη συνάρτηση δυναμικού, είτε είναι μεικτές εκφράσεις<sup>32</sup> Παρακάτω

<sup>32</sup> Harr, M. E., *Groundwater and Seepage*, Dover, 1962

παραθέτουμε παραδείγματα απλών συνοριακών συνθηκών που θα εμφανισθούν σε πρακτικές εφαρμογές.

### Μη διαπερατό σύνορο

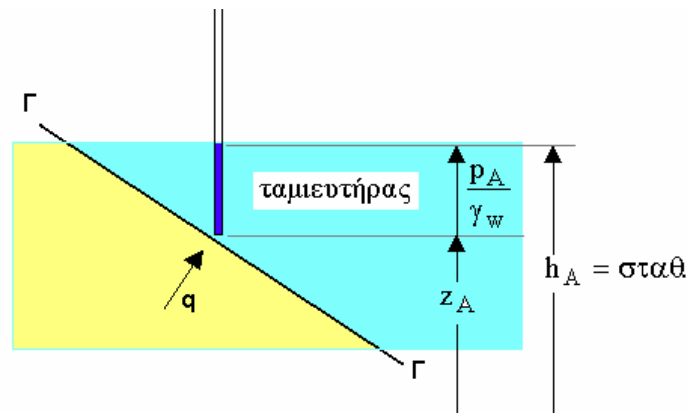


Εικ. 7-17: Συνθήκη μη-διαπερατού συνόρου

Έστω  $(t, n)$  η εφαπτομενική και κάθετη κατεύθυνση στο σύνορο  $(\Gamma)$ , Εικ. 7-17. Επειδή η παροχή καθέτως προς ένα μη-διαπερατό σύνορο είναι μηδέν, έπεται ότι κατά μήκος ενός τέτοιου συνόρου η ροϊκή συνάρτηση είναι σταθερή:

$$q_n = 0 \Rightarrow \frac{\partial \Phi}{\partial n} = \frac{\partial \Psi}{\partial t} = 0 \Rightarrow \Psi = const. \quad (7.110)$$

### Σύνορα με ταμιευτήρες

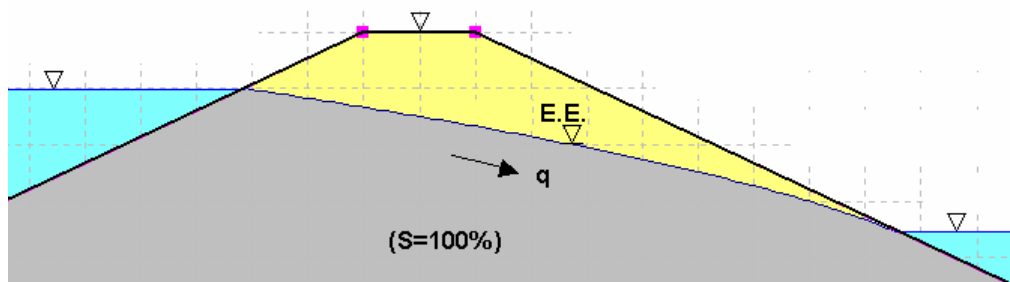


Εικ. 7-17: Συνθήκη συνόρου με ταμιευτήρα.

Κατά μήκος ενός συνόρου  $(\Gamma)$  με ταμιευτήρα το υδραυλικό ύψος είναι σταθερό (Εικ. 7-17), οπότε κατά μήκος ενός τέτοιου συνόρου η συνάρτηση δυναμικού είναι σταθερή

$$\Phi = -k_w \left( \frac{p_A}{\gamma_w} + z_A \right) + C = -k_w h_A + C = \text{const.} \quad (7.111)$$

### Ελεύθερη επιφάνεια



Εικ. 7-18: Συνθήκη συνόρου ελεύθερης φρεατικής επιφάνειας.

Μια «ελεύθερη» επιφάνεια είναι η διεπιφάνεια του κορεσμένου με το ακόρεστο ή μερικώς κεκορεσμένο πορώδες μέσο (Εικ. 7-18). Η πίεση στην Ε.Ε. παραμένει σταθερή, ίση προς την ατμοσφαιρική (έστω  $p_{atm} = 0$ ). Το δυναμικό κατά μήκος της Ε.Ε., είναι

$$\Phi = -k_w \left( \frac{p_{atm}}{\rho_w g} + z \right) \Rightarrow \Phi + k_w z = \text{σταθ.} \quad (7.112)$$

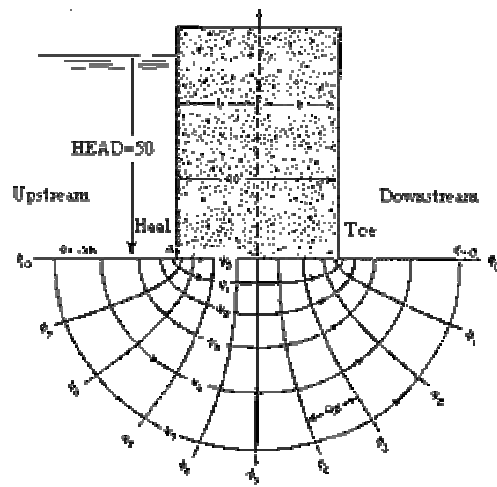
Για την επίλυση πραγματικών προβλημάτων προσομοιώσεως υπόγειας ροής θα προσφύγει κανείς σήμερα σε Αναλυτικο-αριθμητικές Μεθόδους<sup>33</sup>, ενώ σε απλές εφαρμογές μπορεί κανείς να χρησιμοποιήσει και απλούστερες αριθμητικές μεθόδους, όπως είναι π.χ. η Μέθοδος των Πεπερασμένων Διαφορών και των Πεπερασμένων Στοιχείων<sup>34</sup>. Σε πρακτικές εφαρμογές για μία ταχεία εκτίμηση των συνθηκών υπόγειας ροής θα προσφύγουμε συνήθως σε μια γραφο-αναλυτική μέθοδο επίλυσεως.

### Άσκηση

Να μελετηθεί η μόνιμη, δισδιάστατη, ασυμπίεστη ροή, για την περίπτωση του φράγματος του παρακάτω σχήματος (Εικ. 7-19), όταν το τοίχος είναι αδιαπέραστος. Να διαμορφώθούν οι εξισώσεις ροής, δυναμικού και μιγαδικού δυναμικού. Η επίλυση να γίνει με την μέθοδο της σύμμορφης απεικόνισεως και συγκεκριμένα μέσω του μετασχηματισμού Schwarz-Cristoffel για τις συνοριακές συνθήκες του συγκεκριμένου προβλήματος.

<sup>33</sup> Η Μέθοδος των Αναλυτικών Στοιχείων αναπτύχθηκε στην δεκαετία του '70 από τον Otto Strack στο Πανεπιστήμιο της Minnesota. Πρβλ. O. D. L. Strack, *Groundwater Mechanics*, Prentice Hall, 1989 και H. M. Haitjema, *Analytic Element Modeling of Groundwater Flow*, Academic Press, 1995.

<sup>34</sup> P. Kiousis (2002). Least-squares Finite-Element Evaluation of flow-nets. *ASCE J. of Geotechnical and Geoenvironmental Eng.*, 128, 699- 701.



Εικ. 7-19: Φράγμα με αδιαπέραστο τοίχος

