

## 6 ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΣΕ ΚΑΜΠΥΛΟΓΡΑΜΜΕΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

6	ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΣΕ ΚΑΜΠΥΛΟΓΡΑΜΜΕΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ	175
6.1	Ο τανυστής των τροπών	177
6.2	Ο απειροστικός τανυστής των τροπών σε πολικές κυλινδρικές συντεταγμένες	180
6.3	Το θεώρημα αποκλίσεως σε καμπυλόγραμμες συντεταγμένες	182
6.4	Η αρχή των δυνατών έργων	184
6.5	Οι Εξισώσεις ισορροπίας σε πολικές κυλινδρικές συντεταγμένες	186
6.6	Οι εξισώσεις θεωρίας της Ελαστικότητας σε κυλινδρικές συντεταγμένες	191
6.7	Το πρόβλημα Lamé της κυλινδρικής οπής	191
6.8	Το πρόβλημα της κυλινδρικής οπής υποβαλλόμενης σε περιμετρική διάτμηση	201
6.9	Οι Εξισώσεις ισορροπίας στο σύστημα κυρίων αξόνων του τανυστή των τάσεων	204
6.10	Διατύπωση των εξισώσεων ισορροπίας στο επίπεδο στο σύστημα κυρίων κατευθύνσεων του τανυστή των τάσεων	204
6.11	Φωτοελαστικότητα	209
6.12	Στατική λειτουργία τόξου	210

Στο Κεφάλαιο αυτό παρουσιάζεται συνοπτικά η γραμμική θεωρία τροπών και τάσεων σε καμπυλόγραμμες συντεταγμένες<sup>1</sup> με έμφαση στη γραμμική θεωρία Ελαστικότητας.

---

<sup>1</sup> Green, A. E. and Zerna, W., *Theoretical Elasticity*, Dover, 1968.

© 6. ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΣΕ ΚΑΜΠΥΛΟΓΡΑΜΜΕΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ,  
2008

Ιωάννης Γ. Βαρδουλάκης, Dr-Ing., Καθηγητής της Μηχανικής στο Ε.Μ.Πολυτεχνείο

<http://geolab.mechan.ntua.gr/>, [I.Vardoulakis@mechan.ntua.gr](mailto:I.Vardoulakis@mechan.ntua.gr)

## 6.1 Ο τανυστής των τροπών

Θεωρούμε την περιγραφή της κινήσεως ενός σώματος  $\mathbf{B}$  ως προς ένα σταθερό στο χώρο σύστημα καμπυλόγραμμων συντεταγμένων  $\Theta^i$ . Η θέσεις των ΥΣ του σώματος  $\mathbf{B}$  στην αρχική απεικόνιση (αναφοράς)  $C^{(0)}$  και στην τρέχουσα απεικόνιση  $C^{(t)}$  του εν λόγω σώματος περιγράφονται από αντιστοίχως από τα διανύσματα θέσεως,

$$\vec{R} = \vec{\mathfrak{R}}(\Theta^i) \quad , \quad \vec{r} = \vec{\mathfrak{r}}(\Theta^i) \quad (6.1)$$

Οι παραπάνω περιγραφές της θέσεως των Υ.Σ. του σώματος  $\mathbf{B}$  στις δύο απεικονίσεις του θα μπορούσαν π.χ. να γραφούν αναλυτικά με τη βοήθεια των καρτεσιανών συντεταγμένων των αντίστοιχων διανυσμάτων θέσεως,

$$\vec{R} = X^i(\Theta^k) \vec{e}_i \quad (6.2)$$

και

$$\vec{r} = x^i(\Theta^k) \vec{e}_i \quad (6.3)$$

Στην απεικόνιση αναφοράς  $C^{(0)}$  ο μετασχηματισμός συντεταγμένων, Εξ. (6.2),

$$X^i = X^i(\Theta^k) \quad (6.4)$$

ορίζει την τοπική συναλλοίωτη διανυσματική βάση στην απεικόνιση αυτή,

$$\vec{G}_i = \vec{\mathfrak{R}}_{,i} \quad (6.5)$$

Αντιστοίχως στην τρέχουσα απεικόνιση  $C^{(t)}$  ο μετασχηματισμός συντεταγμένων, Εξ. (6.3)),

$$x^i = \chi^i(\Theta^k) \quad (6.6)$$

ορίζει την τοπική συναλλοίωτη διανυσματική βάση<sup>2</sup>,

$$\vec{g}_i = \vec{\mathfrak{r}}_{,i} \quad (6.7)$$

Η μετρική σε κάθε μία από τις δύο θεωρούμενες απεικονίσεις του σώματος  $\mathbf{B}$  δίδεται συναρτήσεως των αντίστοιχων μετρικών τανυστών<sup>3</sup>. Αυτό σημαίνει ότι τα μήκη των απειροστικών υλικών στοιχείων στις δυο απεικονίσεις είναι αντιστοίχως

$$d\ell^{(0)2} = G_{ij} d\Theta^i d\Theta^j \quad , \quad d\ell^2 = g_{ij} d\Theta^i d\Theta^j \quad (6.8)$$

<sup>2</sup> Πρβλ. Κεφ.3.1.

<sup>3</sup> Πρβλ. Κεφ.3.3.

όπου

$$G_{ij} = \vec{G}_i \cdot \vec{G}_j \quad , \quad g_{ij} = \vec{g}_i \cdot \vec{g}_j \quad (6.9)$$

Όπως είδαμε στο Κεφ. 4.5 η μεταβολή του μήκους του απειροστικού υλικού στοιχείου δίδεται από τον τανυστή *Green* των τροπών. Ο ορισμός αυτός του τανυστή *Green* των τροπών γενικεύεται εν προκειμένω ως εξής

$$d\ell^2 - d\ell^{(0)2} = 2\gamma_{ij}d\Theta^i d\Theta^j \quad (6.10)$$

Άρα

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{2}(g_{ij} - G_{ij}) \quad (6.11)$$

Παρατηρούμε τώρα ότι για τον υπολογισμό του τανυστή *Green* των τροπών βάσει της Εξ. (6.11) μπορούμε να εισάγουμε το διάνυσμα μετατοπίσεως του ΥΣ, ως τη διαφορά των διανυσμάτων θέσεως αυτού

$$\vec{u} = \vec{r} - \vec{R} \quad (6.12)$$

Με βάση τους παραπάνω ορισμούς των τοπικών διανυσματικών βάσεων στις δύο θεωρούμενες απεικονίσεις του σώματος  $\mathbf{B}$ , Εξ. (6.5) και (6.7), από την Εξ. (6.12) παίρνουμε,

$$\vec{u}_{,i} = \vec{r}_{,i} - \vec{R}_{,i} = \vec{g}_i - \vec{G}_i \quad (6.13)$$

Οπότε,

$$\begin{aligned} g_{ij} &= \vec{g}_i \cdot \vec{g}_j = (\vec{G}_i + \vec{u}_{,i}) \cdot (\vec{G}_j + \vec{u}_{,j}) \\ &= G_{ij} + \vec{G}_i \cdot \vec{u}_{,j} + \vec{G}_j \cdot \vec{u}_{,i} + \vec{u}_{,i} \cdot \vec{u}_{,j} \end{aligned} \quad (6.14)$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι σε καμπυλόγραμμας συντεταγμένες η μερική παράγωγος ενός διανύσματος εκφράζεται συναρτήσει της συναλλοίωτης παραγώγου των συνιστουσών του και των διανυσμάτων της ανταλλοίωτης βάσεως<sup>4</sup>,

$$\vec{u}_{,i} = u_{k|i} \vec{G}^k \quad (6.15)$$

από τις Εξ. (6.11), (6.14) και (6.15) παίρνουμε,

---

<sup>4</sup> Πρβλ. Κεφ. 3.9.

$$\begin{aligned}
\gamma_{ij} &= \frac{1}{2}(\mathbf{g}_{ij} - G_{ij}) \\
&= \frac{1}{2}(\vec{G}_i \cdot (u_{k|j} \vec{G}^k) + \vec{G}_j \cdot (u_{k|i} \vec{G}^k) + (u_{k|i} \vec{G}^k) \cdot (u_{k|i} \vec{G}^l)) \\
&= \frac{1}{2}(u_{k|j} \delta_i^k + u_{k|i} \delta_j^k + u_{k|i} u_{l|j} g^{kl})
\end{aligned} \tag{6.16}$$

ή

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i|j} + u_{j|i} + g^{kl} u_{k|i} u_{l|j}) \tag{6.17}$$

Αν θεωρήσουμε πως οι παραμορφώσεις είναι απειροστικές, τότε: α) δεν γίνεται διάκριση μεταξύ των συντεταγμένων στην απεικόνιση αναφοράς και στην τρέχουσα απεικόνιση και β) ο τανυστής Green προσεγγίζεται από τον απειροστικό τανυστή των τροπών

$$\gamma_{ij} \approx \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i|j} + u_{j|i}) \tag{6.18}$$

ή

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i} - 2\Gamma_{ij}^k u_k) \tag{6.19}$$

όπου έγινε χρήση της εκφράσεως για την συναλλοίωτη παράγωγο διανύσματος, Εξ. (3.92).

Οι φυσικές συνιστώσες του τανυστή των τροπών υπολογίζονται συμφώνως με την παραπάνω εξίσωση από τις φυσικές συνιστώσες των συναλλοίωτων παραγώγων του διανύσματος μετατοπίσεως,

$$\varepsilon_{ij}^* = \frac{1}{2}(u_{i|j}^* + u_{j|i}^*) \tag{6.20}$$

Στη σχετική βιβλιογραφία θα βρούμε και τις *συνθήκες συμβιβαστού* για τις απειροστικές τροπές<sup>5</sup>,

$$\varepsilon_{im|jk} + \varepsilon_{jk|im} - \varepsilon_{ik|jm} - \varepsilon_{jm|ik} = 0 \tag{6.21}$$

Παρατηρούμε ότι για κάθε τανυστή 1<sup>ης</sup> και 2<sup>ης</sup> τάξεως αποδεικνύονται οι εξής σχέσεις συμμετρίας, ως απόρροια της μηδενικής «καμπυλότητας» του Ευκλείδειου χώρου,

<sup>5</sup> A.E. Green and W. Zerna, *Theoretical Elasticity*, Dover, p. 149, 1968.

$$\begin{aligned}
A_{r|st} &= A_{r|ts} \\
A_{ij|st} &= A_{ij|ts} \\
A_{st}^{ij} &= A_{ts}^{ij}
\end{aligned} \tag{6.22}$$

## 6.2 Ο απειροστικός τανυστής των τροπών σε πολικές κυλινδρικές συντεταγμένες

Υπενθυμίζουμε τις σχέσεις μεταξύ της τοπικής βάσεως σε πολικές κυλινδρικές συντεταγμένες και της καρτεσιανής βάσεως

$$\begin{Bmatrix} \vec{G}_1 \\ \vec{G}_2 \\ \vec{G}_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -r \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{Bmatrix} \tag{6.23}$$

καθώς και της αντίστοιχης ορθοκανονικής τοπικής βάσεως και της καρτεσιανής βάσεως,

$$\begin{Bmatrix} \vec{e}_r \\ \vec{e}_\theta \\ \vec{e}_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{Bmatrix} \tag{6.24}$$

Θεωρούμε το διάνυσμα της μετατοπίσεως

$$\begin{aligned}
\vec{u} &= u_1 \vec{G}^1 + u_2 \vec{G}^2 + u_3 \vec{G}^3 \\
&= u_r \vec{e}_r + u_\theta \vec{e}_\theta + u_z \vec{e}_z
\end{aligned} \tag{6.25}$$

Άρα

$$u_1 = u_r \quad , \quad u_2 = r u_\theta \quad , \quad u_3 = u_z \tag{6.26}$$

Οι φυσικές συνιστώσες των συναλλοίωτων παραγώγων του διανύσματος μετατοπίσεως συνοψίζονται ως εξής<sup>6</sup>

$$\left[ u_{i|j}^* \right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_r}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} & \frac{\partial u_r}{\partial z} \\ \frac{\partial u_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} & \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial u_z}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix} \tag{6.27}$$

<sup>6</sup> Πρβλ. Κεφ. 3.11.

Με δεδομένο τον παραπάνω πίνακα οι φυσικές συνιστώσες του απειροστικού τανυστή των τροπών σε πολικές κυλινδρικές συντεταγμένες υπολογίζονται βάσει της Εξ. (6.20) ως εξής,

$$[\varepsilon_{i|j}^*] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{rr} & \varepsilon_{r\theta} & \varepsilon_{rz} \\ \varepsilon_{\theta r} & \varepsilon_{\theta\theta} & \varepsilon_{\theta z} \\ \varepsilon_{zr} & \varepsilon_{z\theta} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \quad (6.28)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial u_r}{\partial r} & \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right) & \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right) & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι για το δισδιάστατο πρόβλημα, επίπεδης παραμορφώσεως έχουμε αντιστοίχως,

$$[u_{i|j}^*] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_r}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} & 0 \\ \frac{\partial u_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.29)$$

και

$$[\varepsilon_{i|j}^*] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{rr} & \varepsilon_{r\theta} & \varepsilon_{rz} \\ \varepsilon_{\theta r} & \varepsilon_{\theta\theta} & \varepsilon_{\theta z} \\ \varepsilon_{zr} & \varepsilon_{z\theta} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \quad (6.30)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial u_r}{\partial r} & \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right) & 0 \\ \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right) & \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Στην περίπτωση αυτή οι συνθήκες συμβιβαστού, Εξ.(6.21), περιορίζονται στην παρακάτω μοναδική σχέση (γιατί),

$$2\varepsilon_{12|12} - \varepsilon_{11|22} - \varepsilon_{22|11} = 0 \quad (6.31)$$

### Άσκηση

Να αποδειχθεί ότι οι φυσικές συντεταγμένες του απειροστικού τανυστή των τροπών σε σφαιρικές συντεταγμένες,  $(r, \theta, \phi)$ ,

$$[\varepsilon_{ij}^*] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{rr} & \varepsilon_{r\theta} & \varepsilon_{r\phi} \\ \varepsilon_{\theta r} & \varepsilon_{\theta\theta} & \varepsilon_{\theta\phi} \\ \varepsilon_{\phi r} & \varepsilon_{\phi\theta} & \varepsilon_{\phi\phi} \end{bmatrix} \quad (6.32)$$

έχουν ως ακολούθως,

$$[\varepsilon_{ij}^*] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_r}{\partial r} & \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_\phi}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \phi} - \frac{u_\phi}{r} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right) & \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} & \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \phi} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\phi}{\partial \theta} - \frac{\cot \theta}{r} u_\phi \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_\phi}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \phi} - \frac{u_\phi}{r} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \phi} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\phi}{\partial \theta} - \frac{\cot \theta}{r} u_\phi \right) & \left( \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} + \frac{u_r}{r} + \cot \theta \frac{u_\theta}{r} \right) \end{bmatrix} \quad (6.33)$$

### 6.3 Το θεώρημα αποκλίσεως σε καμπυλόγραμμες συντεταγμένες

Όπως είδαμε στο Κεφ. 4.10 δύο γραμμικά στοιχεία  $d\vec{x}$  και  $d\vec{y}$  αναπτύσσουν το επιφανειακό στοιχείο  $d\vec{S}$ , το οποίο είναι ένα διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο που ορίζεται από τα γραμμικά στοιχεία αυτά και έχει μέτρο ίσο με το εμβαδόν του παραλληλογράμμου που αυτά αναπτύσσουν,

$$d\vec{S} = d\vec{x} \times d\vec{y} \quad (6.34)$$

Με

$$\begin{aligned} d\vec{x} &= dX^k \vec{g}_k \\ d\vec{y} &= d\Psi^l \vec{g}_l \end{aligned} \quad (6.35)$$

σε καμπυλόγραμμες συντεταγμένες το επιφανειακό στοιχείο υπολογίζεται βάσει του ορισμού του εξωτερικού γινομένου ω εξής,

$$dS_i = (d\vec{x} \times d\vec{y})_i = e_{ikl} dX^k d\Psi^l \quad (6.36)$$

όπου  $e_{klm}$  είναι ο αντίστοιχος πλήρως αντισυμμετρικός τανυστής 3<sup>ης</sup> τάξεως<sup>7</sup>

<sup>7</sup> Πρβλ. Κεφ. 3.3.



$$e_{klm} = \begin{cases} \sqrt{g} & \text{if } : (k,l,m) = \text{cycl}(1,2,3) \\ -\sqrt{g} & \text{if } : (k,l,m) = \text{cycl}(2,1,3) \\ 0 & \text{else} \end{cases}, \quad g = |g_{ij}| \quad (6.37)$$

Συμφώνως προς το Κεφ. 4.11 ο στοιχειώδης όγκος που αναπτύσσεται από τα γραμμικά στοιχεία,

$$d\bar{x} = dX^k \bar{g}_k, \quad d\bar{y} = d\Psi^k \bar{g}_k, \quad d\bar{z} = dZ^k \bar{g}_k \quad (6.38)$$

ταυτίζεται με τον όγκο του αντίστοιχου παραλληλεπιπέδου που αυτά αναπτύσσουν,

$$dV = (d\bar{x} \times d\bar{y}) \cdot d\bar{z} = e_{ijk} dX^i d\Psi^j dZ^k \quad (6.39)$$

Αν τα διανύσματα  $(d\bar{x}, d\bar{y}, d\bar{z})$  συνιστούν δεξιόστροφο σύστημα, τότε ο όγκος  $dV$ , που υπολογίζεται από το παραπάνω μεικτό γινόμενο, προκύπτει θετικός.

Έχοντας ορίσει τη στοιχειώδη επιφάνεια και τον στοιχειώδη όγκο σε τυχαίες καμπυλόγραμμες συντεταγμένες, μπορούμε τώρα να γράψουμε την εξίσωση που εκφράζει το γνωστό από την Ανάλυση Θεώρημα της Αποκλίσεως σε διανυσματική γραφή έχει ως εξής,

$$\int_{(V)} \text{div} \bar{q} dV = \int_{\partial V} \bar{q} \cdot \bar{n} dS \quad (6.40)$$

όπου

$$\bar{q} = q^i \bar{g}_i, \quad \bar{n} = n_j \bar{g}^j \quad (6.41)$$

και το διάνυσμα  $\bar{n}$  είναι το μοναδιαίο, κάθετο εξωτερικό διάνυσμα στο σύνορο το συγκεκριμένου όγκου.

Η απόκλιση του διανύσματος  $\bar{q}$  υπολογίζεται βάσει της Εξ. (3.93),

$$\text{div} \bar{q} = q^i_{|i} \quad (6.42)$$

οπότε το θεώρημα της Αποκλίσεως, Εξ. (6.40), γράφεται,

$$\int_{(V)} q^i_{|i} dV = \int_{(\partial V)} q^i n_i dS \quad (6.43)$$

Κατά περίπτωση η στοιχειώδη επιφάνεια και ο στοιχειώδης όγκος θα υπολογισθούν συμφώνως προς τις παραπάνω Εξ. (6.36) και (6.39), αντιστοίχως.

## 6.4 Η αρχή των δυνατών έργων

Για τη διατύπωση των εξισώσεων ισορροπίας χρειάζεται να εισάγουμε την έννοια της τάσεως. Ένας ασφαλής τρόπος για καταλήξει κανείς στο σωστό ορισμό της τάσεως είναι να προσφύγει στην αρχή των δυνατών έργων (α.δ.ε.). Η αρχή αυτή διατυπώνεται εν προκειμένω ως εξής: Θεωρούμε ένα συνεχές σώμα  $\mathbf{B}$ , το οποίο καταλαμβάνει τον όγκο  $V$  και περιβάλλεται από την επιφάνεια  $\partial V$ . Επίσης θεωρούμε ένα πεδίο μετατοπίσεων που ορίζεται μονοσήμαντα σε κάθε σημείο του Συνεχούς. Θα συμβολίσουμε το πεδίο αυτό ως  $\delta u_i(\Theta^k)$ , και θα το αποκαλέσουμε *δυνατό πεδίο μετατοπίσεων*. Θα υποθέσουμε ότι το πεδίο αυτό είναι αρκούντως παραγωγίσιμο, και θα ορίσουμε το πεδίο απειροστικών τροπών  $\delta \varepsilon_{ij}(\Theta^k)$  που συναρτάται με αυτό,

$$\delta \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\delta u_{i|j} + \delta u_{j|i}) \quad (6.44)$$

Τώρα θεωρούμε ένα τανυστικό πεδίο  $\sigma^{ij}(\Theta^k)$  και ορίζουμε ένα βαθμωτό μέγεθος

$$\delta w^{(\text{int})} = \sigma^{ij} \delta \varepsilon_{ij} \quad (6.45)$$

το οποίο ονομάζουμε *πυκνότητα έργου εσωτερικών δυνάμεων*. Δεχόμαστε ότι η πυκνότητα έργου εσωτερικών δυνάμεων είναι ένα αναλλοίωτο βαθμωτό μέγεθος. Στην περίπτωση αυτή ο συζυγής προς τις απειροστικές τροπές ανταλλοίωτος τανυστής 2<sup>ας</sup> τάξεως  $\sigma^{ij}$ , καλείται *τανυστής των τάσεων*.

Από την Εξ. (6.45) έπεται ότι ο  $\sigma^{ij}$  είναι συμμετρικός,

$$\delta w^{(\text{int})} = \sigma^{ij} \delta \varepsilon_{ij} = \sigma^{ij} \delta \varepsilon_{ji} = \sigma^{ji} \delta \varepsilon_{ij} \Rightarrow \sigma^{ij} = \sigma^{ji} \quad (6.46)$$

Το ολικό έργο των εσωτερικών δυνάμεων ορίζεται ως το ολοκλήρωμα της πυκνότητας  $\delta w^{(\text{int})}$  πάνω στον όγκο  $V$ ,

$$\delta W^{(\text{int})} = \int_{(V)} \delta w^{(\text{int})} dV \quad (6.47)$$

Για τη διατύπωση της α.δ.ε. δεχόμαστε ότι στο εν λόγω Συνεχές ασκούνται δύο ειδών δυνάμεις: α) οι καθολικές δυνάμεις  $f^i dV$  και β) επιφανειακές δυνάμεις  $t^i dS$ , όπου  $dV$  είναι ο στοιχειώδης όγκος και  $dS$  είναι η στοιχειώδης επιφάνεια, στο σύνορο του θεωρούμενου όγκου. Οι δυνάμεις αυτές συναρτώνται με το τασικό πεδίο και η α.δ.ε. θα καθορίσει αυτήν την εξάρτηση. Όπως θα δούμε στη συνέχεια αυτή η εξάρτηση είναι οι λεγόμενες *εξισώσεις ισορροπίας*. Με τη βοήθεια των δυνάμεων αυτών και του πεδίου δυνατών μετατοπίσεων ορίζουμε ένα συναρτησιακό,

$$\delta W^{(ext)} = \int_{(V)} f^i \delta u_i dV + \int_{(\partial V)} t^i \delta u_i dS \quad (6.48)$$

το οποίο αποκαλούμε έργο εξωτερικών δυνάμεων.

Η α.δ.ε. διατυπώνεται ως εξής: Το σύστημα  $\{\sigma^{ij}, f^i, t^i\}$  καλείται σύστημα ισορροπίας, όταν για οποιαδήποτε επιλογή του δυνατού πεδίου μετατοπίσεων ισχύει η εξίσωση των δυνατών έργων,

$$\delta W^{(ext)} = \delta W^{(int)} \quad (6.49)$$

Από την Εξ. (6.49) και τους αντίστοιχους ορισμούς των έργων των εσωτερικών δυνάμεων, Εξ. (6.47) και (6.45), και εξωτερικών δυνάμεων, Εξ. (6.48), παίρνουμε αναλυτικά την παρακάτω ολοκληρωτική εξίσωση,

$$\int_{(V)} f^i \delta u_i dV + \int_{(\partial V)} t^i \delta u_i dS = \int_{(V)} \sigma^{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV \quad (6.50)$$

Παρατηρούμε ότι πυκνότητα έργου εσωτερικών δυνάμεων γράφεται ως εξής,

$$\delta w^{(int)} = \sigma^{ij} \delta \varepsilon_{ij} = \sigma^{ij} \delta u_{j|i} = \left( \sigma^{ij} \delta u_j \right)_{|i} - \sigma_{|i}^{ij} \delta u_j \quad (6.51)$$

Με το συμβολισμό

$$q^i = \sigma^{ij} \delta u_j \quad (6.52)$$

παρατηρούμε ότι

$$\operatorname{div} \vec{q} = q_{|k}^k \quad (6.53)$$

οπότε βάσει του θεωρήματος αποκλίσεως, Εξ.(6.40), έχουμε,

$$\int_V \left( \sigma^{ij} \delta u_j \right)_{|i} dV = \int_V \operatorname{div} \vec{q} dV = \int_{\partial V} \vec{q} \cdot \vec{n} dS = \int_{\partial V} \sigma^{ij} \delta u_j n_i dS \quad (6.54)$$

και η εξίσωση των δυνατών έργων (6.50) δίδει,

$$\int_V f^k \delta u_k dV + \int_{\partial V} t^k \delta u_k dS = \int_{\partial V} \sigma^{ik} \delta u_k n_i dS - \int_V \sigma_{|i}^{ik} \delta u_k dV \quad (6.55)$$

ή

$$\int_V (\sigma_{|i}^{ik} + f^k) \delta u_k dV - \int_{\partial V} (\sigma^{ik} n_i - t^k) \delta u_k dS = 0 \quad (6.56)$$

Οι δοκιμαστικές συναρτήσεις  $\delta u_k$  μπορούν να επιλεγούν τέτοιες ώστε η παραπάνω εξίσωση να εκφυλίζεται στις κάτωθι,

$$\int_{V'} (\sigma_{|i}^{ik} + f^k) \delta u_k dV = 0 \quad \forall V' \subseteq V \quad (6.57)$$

και

$$\int_{\partial V'} (\sigma^{ik} n_i - t^k) \delta u_k dS \quad \forall \partial V' \subseteq \partial V \quad (6.58)$$

Λόγω του γεγονότος ότι οι δοκιμαστικές συναρτήσεις μπορούν να επιλεγούν ελεύθερα, υποκείμενες μόνο σε γενικούς περιορισμούς λειότητας, τότε από τις παραπάνω ολοκληρωτικές εξισώσεις προκύπτουν οι τοπικές εξισώσεις ισορροπίας<sup>8</sup>,

$$\sigma_{|i}^{ik} + f^k = 0 \quad \forall P(\Theta^i) \in V \quad (6.59)$$

και

$$\sigma^{ik} n_i - t^k = 0 \quad \forall P(\Theta^i) \in \partial V \quad (6.60)$$

Παρατηρούμε ότι αν αντιστρόφως πολλαπλασιάσουμε τις παραπάνω εξισώσεις ισορροπίας, Εξ. (6.59), με τυχαίες δοκιμαστικές συναρτήσεις και τις ολοκληρώσουμε, τότε θα καταλήξουμε στην αρχική διατύπωση της α.δ.ε., Εξ. (6.50). Για τον λόγο αυτό λέμε ότι οι εξισώσεις ισορροπίας και η α.δ.ε. είναι εκφράσεις ισοδύναμες.

## 6.5 Οι Εξισώσεις ισορροπίας σε πολικές κυλινδρικές συντεταγμένες

Λαμβάνοντας υπόψη ότι<sup>9</sup>

$$\sigma_{|k}^{ki} = \sigma_{,k}^{ki} + \Gamma_{km}^k \sigma^{mi} + \Gamma_{km}^i \sigma^{km} \quad (6.61)$$

Οι διαφορικές εξισώσεις ισορροπίας (6.59) αναπτύσσονται ως εξής:

<sup>8</sup> Η απόδειξη του ισχυρισμού αυτού μπορεί να βρεθεί σε βιβλία Λογισμού των Μεταβολών, όπως π.χ. εκείνο του L. E. Elsgolc, *Calculus of Variations*, Pergamon Press, 1961.

<sup>9</sup> Πρβλ. Εξ. (3.95).

$$\begin{aligned}
\sigma_{,1}^{11} + \sigma_{,2}^{21} + \sigma_{,3}^{31} + f^1 &= 0 \\
\sigma_{,1}^{12} + \sigma_{,2}^{22} + \sigma_{,3}^{32} + f^2 &= 0 \\
\sigma_{,1}^{13} + \sigma_{,2}^{23} + \sigma_{,3}^{33} + f^3 &= 0
\end{aligned} \tag{6.62}$$

Η πρώτη από τις παραπάνω εξισώσεις ισορροπίας (6.62) γράφεται,

$$\begin{aligned}
\sigma_{,1}^{11} + \Gamma_{1m}^1 \sigma^{m1} + \Gamma_{1m}^1 \sigma^{1m} + \sigma_{,2}^{21} + \Gamma_{2m}^2 \sigma^{m1} + \Gamma_{2m}^1 \sigma^{2m} \\
+ \sigma_{,3}^{31} + \Gamma_{3m}^3 \sigma^{m1} + \Gamma_{3m}^1 \sigma^{3m} + f^1 = 0
\end{aligned}$$

Στην περίπτωση που π.χ. το σύστημα συντεταγμένων είναι ένα πολικό κυλινδρικό σύστημα έχουμε<sup>10</sup>

$$\left[ \Gamma_{ij}^1 \right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -r & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \left[ \Gamma_{ij}^2 \right] = \begin{bmatrix} 0 & 1/r & 0 \\ 1/r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \left[ \Gamma_{ij}^3 \right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Οπότε

$$\sigma_{,1}^{11} + \sigma_{,2}^{21} + \Gamma_{21}^2 \sigma^{11} + \Gamma_{22}^1 \sigma^{22} + \sigma_{,3}^{31} + f^1 = 0$$

ή

$$\sigma_{,1}^{11} + \sigma_{,2}^{21} + \frac{1}{r} \sigma^{11} - r \sigma^{22} + \sigma_{,3}^{31} + f^1 = 0 \tag{6.63}$$

Η δεύτερη εξίσωση ισορροπίας (6.62) δίδει,

$$\begin{aligned}
\sigma_{,1}^{12} + \Gamma_{1m}^1 \sigma^{m2} + \Gamma_{1m}^2 \sigma^{1m} + \sigma_{,2}^{22} + \Gamma_{2m}^2 \sigma^{m2} + \Gamma_{2m}^1 \sigma^{2m} \\
+ \sigma_{,3}^{32} + \Gamma_{3m}^3 \sigma^{m2} + \Gamma_{3m}^2 \sigma^{3m} + f^2 = 0
\end{aligned}$$

Οπότε έχουμε αντιστοίχως,

$$\sigma_{,1}^{12} + \Gamma_{12}^2 \sigma^{12} + \sigma_{,2}^{22} + \Gamma_{21}^2 \sigma^{12} + \Gamma_{21}^2 \sigma^{21} + \sigma_{,3}^{32} + f^2 = 0$$

ή

$$\sigma_{,1}^{12} + \frac{1}{r} \sigma^{12} + \sigma_{,2}^{22} + \frac{1}{r} \sigma^{12} + \frac{1}{r} \sigma^{21} + \sigma_{,3}^{32} + f^2 = 0 \tag{6.64}$$

Τέλος η τρίτη εξίσωση ισορροπίας (6.62) δίδει,

---

<sup>10</sup> Πρβλ. Κεφ. 3.4.

$$\sigma_{,1}^{13} + \Gamma_{1m}^1 \sigma^{m3} + \Gamma_{1m}^3 \sigma^{1m} + \sigma_{,2}^{23} + \Gamma_{2m}^2 \sigma^{m3} + \Gamma_{2m}^3 \sigma^{2m} + \sigma_{,3}^{33} + \Gamma_{3m}^3 \sigma^{m3} + \Gamma_{3m}^3 \sigma^{3m} + f^3 = 0$$

οπότε

$$\sigma_{,1}^{13} + \sigma_{,2}^{23} + \Gamma_{21}^2 \sigma^{13} + \sigma_{,3}^{33} + f^3 = 0$$

ή

$$\sigma_{,1}^{13} + \sigma_{,2}^{23} + \frac{1}{r} \sigma^{13} + \sigma_{,3}^{33} + f^3 = 0 \quad (6.65)$$

Στο θεωρούμενο σύστημα συντεταγμένων οι φυσικές συνιστώσες του τανυστή των τάσεων υπολογίζονται ως εξής

$$\sigma^{*ij} = \sigma^{ij} \sqrt{g_{(ii)}} \sqrt{g_{(jj)}} \quad (6.66)$$

όπου εν προκειμένω

$$[g_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.67)$$

Οπότε,

$$\sigma^{*11} = \sigma^{11} \sqrt{g_{11}} \sqrt{g_{11}} = \sigma^{11} \Rightarrow \sigma^{11} = \sigma^{*11} = \sigma_{rr}$$

$$\sigma^{*12} = \sigma^{12} \sqrt{g_{11}} \sqrt{g_{22}} = r \sigma^{12} \Rightarrow \sigma^{12} = \frac{1}{r} \sigma^{*12} = \frac{1}{r} \sigma_{r\theta}$$

$$\sigma^{*13} = \sigma^{12} \sqrt{g_{11}} \sqrt{g_{33}} = \sigma^{13} \Rightarrow \sigma^{13} = \sigma^{*13} = \sigma_{rz}$$

$$\sigma^{*21} = \sigma^{21} \sqrt{g_{22}} \sqrt{g_{11}} = r \sigma^{21} \Rightarrow \sigma^{21} = \frac{1}{r} \sigma^{*21} = \frac{1}{r} \sigma_{\theta r}$$

$$\sigma^{*22} = \sigma^{22} \sqrt{g_{22}} \sqrt{g_{22}} = r^2 \sigma^{22} \Rightarrow \sigma^{22} = \frac{1}{r^2} \sigma^{*22} = \frac{1}{r^2} \sigma_{\theta\theta}$$

$$\sigma^{*23} = \sigma^{23} \sqrt{g_{22}} \sqrt{g_{33}} = r \sigma^{23} \Rightarrow \sigma^{23} = \frac{1}{r} \sigma^{*23} = \frac{1}{r} \sigma_{\theta z}$$

$$\sigma^{*31} = \sigma^{31} \sqrt{g_{33}} \sqrt{g_{11}} = \sigma^{31} \Rightarrow \sigma^{31} = \sigma^{*31} = \sigma_{zr}$$

$$\sigma^{*32} = \sigma^{32} \sqrt{g_{33}} \sqrt{g_{22}} = r\sigma^{32} \Rightarrow \sigma^{23} = \frac{1}{r}\sigma^{*23} = \frac{1}{r}\sigma_{\theta z}$$

$$\sigma^{*33} = \sigma^{33} \sqrt{g_{33}} \sqrt{g_{33}} = \sigma^{33} \Rightarrow \sigma^{33} = \sigma^{*33} = \sigma_{zz}$$

Αντιστοίχως οι φυσικές συνιστώσες του διανύσματος της καθολικής δυνάμεως είναι:

$$f^{*i} = f^i \sqrt{g_{(ii)}} \quad (6.68)$$

Οπότε

$$f^{*1} = f^1 \sqrt{g_{11}} = f^1 \Rightarrow f^1 = f^{*1} = f_r$$

$$f^{*2} = f^2 \sqrt{g_{22}} = rf^2 \Rightarrow f^2 = \frac{1}{r}f^{*2} = \frac{1}{r}f_\theta$$

$$f^{*3} = f^3 \sqrt{g_{33}} = f^3 \Rightarrow f^3 = f^{*3} = f_z$$

Από τις παραπάνω εκφράσεις και τις Εξ.(6.63) έως (6.65) παίρνουμε τελικά τις διαφορικές εξισώσεις ισορροπίας σε πολικές συντεταγμένες.

- *Ισορροπία σε ακτινική διεύθυνση*

$$\sigma_{,1}^{11} + \sigma_{,2}^{21} + \frac{1}{r}\sigma^{11} - r\sigma^{22} + \sigma_{,3}^{31} + f^1 = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\sigma_{rr} + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{1}{r}\sigma_{\theta r}\right) + \frac{1}{r}\sigma_{rr} - r\left(\frac{1}{r^2}\sigma_{\theta\theta}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\sigma_{zr} + f_r = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{\theta r}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial z} + \frac{1}{r}(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) + f_r = 0 \quad (6.69)$$

- *Ισορροπία σε περιμετρική διεύθυνση*

$$\sigma_{,1}^{12} + \sigma_{,2}^{22} + \frac{2}{r}\sigma^{12} + \frac{1}{r}\sigma^{21} + \sigma_{,3}^{32} + f^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\sigma_{r\theta}\right) + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{1}{r^2}\sigma_{\theta\theta}\right) + \frac{2}{r}\left(\frac{1}{r}\sigma_{r\theta}\right) + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{r}\sigma_{\theta r}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\sigma_{\theta z}\right) + \frac{1}{r}f_\theta = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\sigma_{r\theta} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{2}{r^2}\sigma_{r\theta} + \frac{1}{r^2}\sigma_{\theta r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z} + \frac{1}{r}f_\theta = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z} + \frac{1}{r} (\sigma_{r\theta} + \sigma_{\theta r}) + f_\theta = 0 \tag{6.70}$$

• Ισορροπία σε αξονική διεύθυνση

$$\sigma_{,1}^1 + \sigma_{,2}^2 + \frac{1}{r} \sigma^{13} + \sigma_{,3}^3 + f^3 = 0 \Rightarrow$$

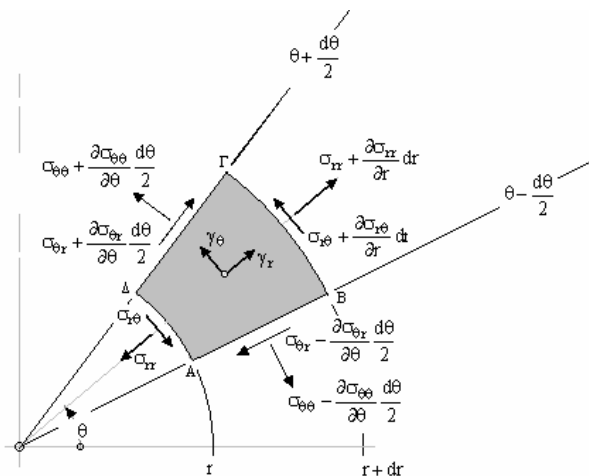
$$\frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{r} \sigma_{\theta z} \right) + \frac{1}{r} \sigma_{rz} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + f_z = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{1}{r} \sigma_{rz} + f_z = 0 \tag{6.71}$$

**Σύνοψη**

Οι διαφορικές εξισώσεις ισορροπίας σε κυλινδρικές πολικές συντεταγμένες

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta r}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial z} + \frac{1}{r} (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) + f_r &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2}{r} \sigma_{r\theta} + f_\theta &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{1}{r} \sigma_{rz} + f_z &= 0 \end{aligned} \tag{6.72}$$



**Άσκηση**

Να αποδειχθεί ότι οι διαφορικές εξισώσεις ισορροπίας σε σφαιρικές πολικές συντεταγμένες  $(r, \theta, \phi)$  έχουν ως εξής:



$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta r}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \sigma_{\phi r}}{\partial \phi} + \frac{\cot \theta}{r} \sigma_{\theta r} + \frac{1}{r} (2\sigma_{rr} - \sigma_{\phi\phi} - \sigma_{\theta\theta}) + f_r &= 0 \\
\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \sigma_{\phi\theta}}{\partial \phi} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{3}{r} \sigma_{r\theta} + \frac{\cot \theta}{r} (\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\phi\phi}) + f_\theta &= 0 \\
\frac{\partial \sigma_{r\phi}}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \sigma_{\phi\phi}}{\partial \phi} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\phi}}{\partial \theta} + \frac{3}{r} \sigma_{r\phi} + \frac{2 \cot \theta}{r} \sigma_{\theta\phi} + f_\phi &= 0
\end{aligned} \tag{6.73}$$

Να εξαχθεί η έκφραση των εξισώσεων αυτών στην ειδική περίπτωση όπου έχουμε σφαιρική συμμετρία και απουσία καθολικών δυνάμεων.

## 6.6 Οι εξισώσεις θεωρίας της Ελαστικότητας σε κυλινδρικές συντεταγμένες

Στην παράγραφο αυτή θα συνοψίσουμε τις εξισώσεις της γραμμικής θεωρίας Ελαστικότητας για ισότροπα υλικά σε πολικές κυλινδρικές συντεταγμένες. Οι σχέσεις αυτές συνδέουν τις φυσικές συνιστώσες του τανυστή των τάσεων με εκείνες του απειροστικού τανυστή των τροπών,

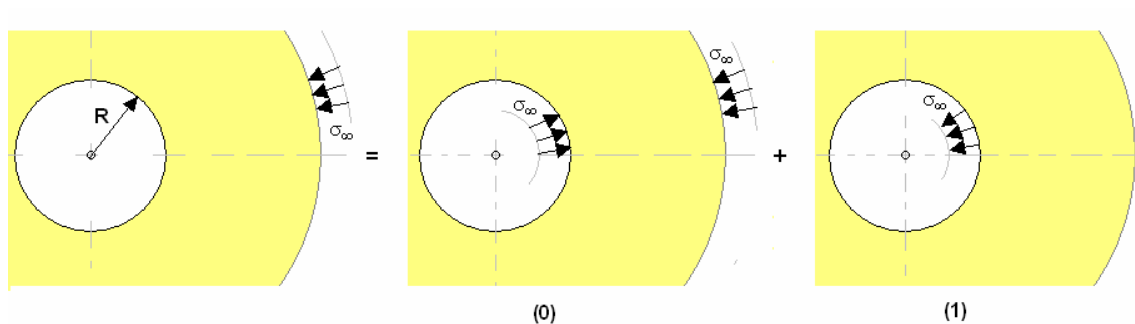
$$\begin{aligned}
\sigma_{rr} &= \lambda(\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{zz}) + 2\mu\varepsilon_{rr} \\
\sigma_{\theta\theta} &= \lambda(\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{zz}) + 2\mu\varepsilon_{\theta\theta} \\
\sigma_{zz} &= \lambda(\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{zz}) + 2\mu\varepsilon_{zz} \\
\sigma_{r\theta} &= 2\mu\varepsilon_{r\theta} \\
\sigma_{\theta z} &= 2\mu\varepsilon_{\theta z} \\
\sigma_{zr} &= 2\mu\varepsilon_{zr}
\end{aligned} \tag{6.74}$$

όπου  $\lambda$  και  $\mu = G$  είναι ελαστικές σταθερές Lamé. Ως εφαρμογή αυτών των εξισώσεων θα παραθέσουμε παρακάτω τη λύση δύο κλασικών προβλημάτων συνοριακών τιμών.

## 6.7 Το πρόβλημα Lamé της κυλινδρικής οπής

Θεωρούμε μία κυλινδρική οπή ακτίνας  $R$  σε ένα απείρως εκτεινόμενο χωρίο (Εικ. 6-1). Η εντατική κατάσταση στο άπειρο δίδεται ως μία ισότροπη θλιπτική τάση εντάσεως  $\sigma_\infty$ . Το πρόβλημα διατυπώνεται με τη βοήθεια ενός πολικού κυλινδρικού συστήματος συντεταγμένων, του οποίου ο άξονας  $z$  ταυτίζεται με ο άξονα της κυλινδρικής οπής. Το πρόβλημα θα λυθεί στα πλαίσια της γραμμικής θεωρίας της Ελαστικότητας, οπότε ισχύει η αρχή της επαλληλίας των φορτίσεων. Κατά συνέπεια η λύση του προβλήματος θα θεωρηθεί ως η υπέρθεση των λύσεων δύο προβλημάτων συνοριακών τιμών,

$$\begin{aligned}
u_r &= u_r^{(0)} + u_r^{(1)} \\
\sigma_{ij} &= \sigma_{ij}^{(0)} + \sigma_{ij}^{(1)}
\end{aligned} \tag{6.75}$$



Εικ. 6-1: Το πρόβλημα Lamé: Υπέρθεση λύσεων.

*Πρόβλημα (0):* Απείρως εκτεινόμενος δακτύλιος φορτιζόμενος εσωτερικά και εξωτερικά από θλιπτική ακτινική τάση, εντάσεως  $\sigma_\infty$ ,

$$r = R: \sigma_{rr}^{(0)} = -\sigma_\infty \quad (6.76)$$

$$r \rightarrow \infty: \sigma_{rr}^{(1)} = -\sigma_\infty \quad (6.77)$$

*Πρόβλημα (1):* Απείρως εκτεινόμενος δακτύλιος, φορτιζόμενος μόνο εσωτερικά από εφελκυστική ακτινική τάση, εντάσεως  $\sigma_\infty$ ,

$$r = R: \sigma_{rr}^{(1)} = \sigma_\infty \quad (6.78)$$

$$r \rightarrow \infty: \sigma_{rr}^{(1)} = 0 \quad (6.79)$$

*Λύση του θεμελιώδους προβλήματος:*

Τα θεωρούμενα προβλήματα είναι αξονοσυμμετρικά. Στην περίπτωση αυτή η μόνη σημαντική εξίσωση ισορροπίας είναι αυτή κατά την ακτινική κατεύθυνση. Ειδικότερα θα δεχθούμε ότι τα πεδία μετατοπίσεων και εντάσεως είναι ανεξάρτητα από την περιμετρική και την αξονική συντεταγμένη και ότι καθολική ακτινική δύναμη είναι μηδενική,

$$\frac{d\sigma_{rr}}{dr} + \frac{1}{r}(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) = 0 \quad (6.80)$$

Η παραμόρφωση είναι επίπεδη και το διάνυσμα μετατοπίσεως ακτινικό,

$$u_r = u(r) \quad , \quad u_\theta = u_z = 0 \quad (6.81)$$

Οι μόνες συνιστώσες του απειροστικού τανυστή των τροπών που δεν είναι εκ ταυτότητας μηδέν είναι η ακτινική και περιμετρική παραμόρφωση,

$$\varepsilon_{rr} = \frac{du_r}{dr} \quad , \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r} \quad (6.82)$$

Οι καταστατικές εξισώσεις της γραμμικής Θεωρίας της Ελαστικότητας μεταξύ των τάσεων και των απειροστικών τροπών έχουν εν προκειμένω ως εξής,

$$\sigma_{rr} = \frac{2G}{1-2\nu}((1-\nu)\varepsilon_{rr} + \nu\varepsilon_{\theta\theta}) \quad (6.83)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{2G}{1-2\nu}(\nu\varepsilon_{rr} + (1-\nu)\varepsilon_{\theta\theta}) \quad (6.84)$$

όπου  $G$  και  $\nu$  είναι το ελαστικό μέτρο διατμήσεως και ο λόγος Poisson, αντιστοίχως. Από τις Εξ. (6.80) έως (6.83) προκύπτει η διαφορική εξίσωση για την ακτινική μετατόπιση,

$$\frac{d^2 u_r}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du_r}{dr} - \frac{u_r}{r^2} = 0 \Rightarrow u_r = A \frac{1}{r} + Br \quad (6.85)$$

Παρατηρούμε ότι η λύση για τη μετατόπιση είναι ανεξάρτητη των ελαστικών σταθερών. Για τον προσδιορισμό των σταθερών ολοκληρώσεως απαιτούμε κατ' αρχήν όπως η μετατόπιση είναι φραγμένη. Η συνθήκη αυτή στο θεωρούμενο ημίσφαιρο χωρίο οδηγεί στο μηδενισμό της σταθεράς ολοκληρώσεως που εμφανίζεται στο γραμμικό όρο,

$$r \rightarrow \infty: |u_r| < \infty \Rightarrow B = 0 \quad (6.86)$$

Άρα εν προκειμένω η θεμελιώδης λύση του προβλήματος είναι,

$$u_r = A \frac{1}{r} \quad (6.87)$$

Οπότε οι ακτινική και περιμετρική τροπή υπολογίζονται ως,

$$\varepsilon_{rr} = -A \frac{1}{r^2}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = A \frac{1}{r^2} \quad (6.88)$$

και με τη βοήθεια αυτών οι αντίστοιχες τάσεις

$$\sigma_{rr} = \frac{2G}{1-2\nu} \left( (1-\nu) \frac{-A}{r^2} + \nu \frac{A}{r^2} \right) = -2G \frac{A}{r^2} \quad (6.89)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{2G}{1-2\nu} \left( \nu \frac{-A}{r^2} + (1-\nu) \frac{A}{r^2} \right) = 2G \frac{A}{r^2} \quad (6.90)$$

*Λύση του Προβλήματος (0):*

Παρατηρούμε ότι η λύση,

$$\begin{aligned}\sigma_{rr}^{(0)} &= -\sigma_{\infty} - 2G \frac{A^{(0)}}{r^2} \\ \sigma_{\theta\theta}^{(0)} &= -\sigma_{\infty} + 2G \frac{A^{(0)}}{r^2}\end{aligned}\tag{6.91}$$

είναι λύση που ικανοποιεί την εξίσωση ισορροπίας, Εξ. (6.80). Από τις συνοριακές συνθήκες, Εξ. (6.76) και (6.77), παίρνουμε ότι,

$$A^{(0)} = 0 \Rightarrow u_r^{(0)} = 0\tag{6.92}$$

*Λύση του Προβλήματος (1):*

Από την θεμελιώδη λύση, Εξ. (6.89), και την συνοριακή συνθήκη, Εξ. (6.78), έπεται,

$$A^{(1)} = -\frac{\sigma_{\infty}}{2G} R^2 \Rightarrow u_r^{(1)} = -\frac{\sigma_{\infty}}{2G} R \left( \frac{R}{r} \right)\tag{6.93}$$

και

$$\begin{aligned}\sigma_{rr}^{(1)} &= -2G \frac{-\sigma_{\infty}}{2G} R^2 \frac{1}{r^2} = \sigma_{\infty} \left( \frac{R}{r} \right)^2 \\ \sigma_{\theta\theta}^{(1)} &= 2G \frac{-\sigma_{\infty}}{2G} R^2 \frac{1}{r^2} = -\sigma_{\infty} \left( \frac{R}{r} \right)^2\end{aligned}\tag{6.94}$$

Η λύση αυτή ικανοποιεί την συνοριακή συνθήκη, Εξ. (6.79).

Συμφώνως προς την Εξ.(6.75), από την υπέρθεση των λύσεων των δύο παραπάνω προβλημάτων συνοριακών τιμών παίρνουμε τη λύση για το πρόβλημα της αφόρτιστης εσωτερικά οπής, φορτιζόμενης ισότροπα στο άπειρο,

$$u_r = -R \frac{\sigma_{\infty}}{2G} \rho^{-1}, \quad \rho = \frac{r}{R}\tag{6.95}$$

$$\sigma_{rr} = -\sigma_{\infty} + \sigma_{\infty} \frac{1}{\rho^2} = -\sigma_{\infty} (1 - \rho^{-2})\tag{6.96}$$

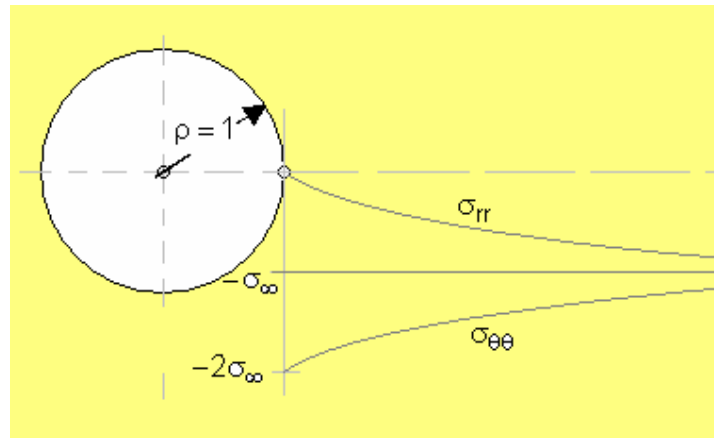
$$\sigma_{\theta\theta} = -\sigma_{\infty} - \sigma_{\infty} \frac{1}{\rho^2} = -\sigma_{\infty} (1 + \rho^{-2})$$

Παρατηρούμε ότι στο χείλος της οπής έχουμε,

$$\rho = 1 \quad (r = R) \Rightarrow u_r = -R \frac{\sigma_{\infty}}{2G}\tag{6.97}$$

$$\rho = 1 \quad (r = R) \Rightarrow \sigma_{rr} = 0 \quad , \quad \sigma_{\theta\theta} = -2\sigma_{\infty} \quad (6.98)$$

Αυτή είναι κλασική λύση Lamé της ελεύθερης οπής (Εικ. 6-2<sup>11</sup>).



Εικ. 6-2: Πρόβλημα Lamé : Ακτινική κατανομή των τάσεων

Η λύση αυτή δίνει ότι: 1) Η σύγκλιση της οπής είναι ανάλογη της ακτίνας της οπής και της τάσεως στο άπειρο και αντιστρόφως ανάλογη του μέτρου διατμήσεως του υλικού. 2) Στο αφόρτιστο χείλος της οπής η περιμετρική τάση  $\sigma_{\theta\theta}$  παίρνει τιμή διπλάσια εκείνης που επιβάλλεται στο άπειρο. Στα πλαίσια της Τεχνικής Μηχανικής το φαινόμενο αυτό θα κληθεί *συγκέντρωση των τάσεων κοντά στο χείλος της οπής*. Η λύση Lamé δίνει ότι για κυκλική οπή ο συντελεστής συγκεντρώσεως τάσεως, παίρνει την τιμή 2,

$$k = \frac{\sigma_{\theta\theta}(1)}{\sigma_{\theta\theta}(\infty)} = 2 \quad (6.99)$$

*Καμπύλη αντιδράσεως εδάφους*<sup>12</sup>: Θεωρούμε τώρα το πρόβλημα μιας υποστηριζόμενης εσωτερικά κυλινδρικής οπής. Η ακτινική τάση στο χείλος της οπής έστω,

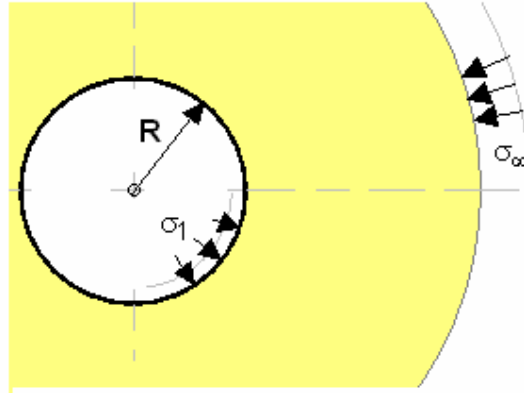
$$r = R: \quad \sigma_{rr} = -\sigma_1 \quad (6.100)$$

Στην περίπτωση αυτή τροποποιούμε το Πρόβλημα (1), θεωρώντας τις εξής συνοριακές συνθήκες (Εικ. 6-3),

$$\begin{aligned} r = R: \quad \sigma_{rr}^{(1)} &= \sigma_{\infty} - \sigma_1 \quad , \quad 0 \leq \sigma_1 < \sigma_{\infty} \\ r \rightarrow \infty: \quad \sigma_{rr}^{(1)} &= 0 \end{aligned} \quad (6.101)$$

<sup>11</sup> Στη Γεωτεχνική Μηχανική θα την βρούμε ως τη λύση της ανυποστήρικτης σήραγγας

<sup>12</sup> Αγγλ. *ground reaction curve*



Εικ. 6-3: Κυκλική οπή υπό εσωτερική πίεση και θλιπτική ισόρροπη τάση στο άπειρο.

Από τις Εξ. (6.75) και (6.101) παίρνουμε,

$$-2G \frac{A^{(1)}}{R^2} = \sigma_\infty - \sigma_1 \Rightarrow A^{(1)} = -\frac{\sigma_\infty - \sigma_1}{2G} R^2 \quad (6.102)$$

και

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^{(1)} &= -2G \frac{-(\sigma_\infty - \sigma_1)}{2G} R^2 \frac{1}{r^2} = (\sigma_\infty - \sigma_1) \rho^{-2} \\ \sigma_{\theta\theta}^{(1)} &= 2G \frac{-(\sigma_\infty - \sigma_1)}{2G} R^2 \frac{1}{r^2} = -(\sigma_\infty - \sigma_1) \rho^{-2} \end{aligned} \quad (6.103)$$

Οπότε για το θεωρούμενο πρόβλημα έχουμε τελικά την εξής λύση,

$$u_r = -\frac{\sigma_\infty}{2G} R \left( 1 - \frac{\sigma_1}{\sigma_\infty} \right) \rho^{-1} \quad (6.104)$$

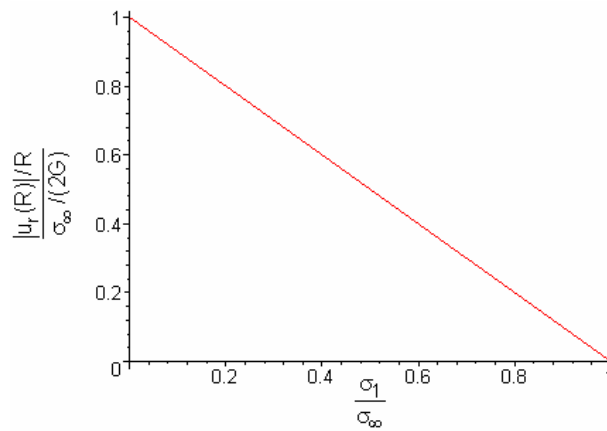
και

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= -\sigma_\infty + (\sigma_\infty - \sigma_1) \rho^{-2} = -\sigma_\infty \left( 1 - \left( 1 - \frac{\sigma_1}{\sigma_\infty} \right) \rho^{-2} \right) \\ \sigma_{\theta\theta} &= -\sigma_\infty - (\sigma_\infty - \sigma_1) \rho^{-2} = -\sigma_\infty \left( 1 + \left( 1 - \frac{\sigma_1}{\sigma_\infty} \right) \rho^{-2} \right) \end{aligned} \quad (6.105)$$

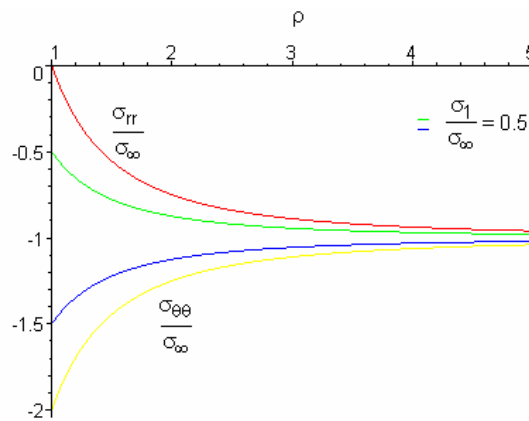
Στη Γεωτεχνική Μηχανική θα συναντήσουμε τη σχέση (6.104) στα πλαίσια μιας ελαστικής αναλύσεως μίας σήραγγας, υποστηριζόμενης εσωτερικά από δακτυλίους, των οποίων η αντίδραση ισούται με την τάση υποστηρίξεως,  $\sigma_1$ . Η αντίστοιχη σχέση,

$$u_r(R) = -\frac{\sigma_\infty}{2G} R \left( 1 - \frac{\sigma_1}{\sigma_\infty} \right) \tag{6.106}$$

καλείται καμπύλη αντιδράσεως εδάφους (Εικ. 6-4. Παρατηρούμε τέλος ότι με την αύξηση της εσωτερικής φορτίσεως, μειώνεται αντιστοίχως ο συντελεστής συγκεντρώσεως τάσεως (Εικ. 6-5).



Εικ. 6-4: Ελαστική καμπύλη αντιδράσεως εδάφους.



Εικ. 6-5: Κατανομή των τάσεων κατά μήκος μιας ακτίνας

**Ασκήσεις**

1. Να επαληθευθεί ότι το αξονο-συμμετρικό πεδίο των τροπών

$$u_1 = u_1(r) \Rightarrow \tag{6.107}$$

$$\varepsilon_{11} = u_{1|1} = u_{1,1} \quad , \quad \varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} = 0 \quad , \quad \varepsilon_{22} = u_{2|2} = ru_1$$

ικανοποιεί εκ ταυτότητος τη συνθήκη συμβιβαστού

$$2\varepsilon_{12|12} - \varepsilon_{11|22} - \varepsilon_{22|11} = 0 \quad (6.108)$$

Λύση

Στη περίπτωση όπου το σύστημα συντεταγμένων είναι πολικό κυλινδρικό, τα σύμβολα Christoffel δίδονται από τις παρακάτω σχέσεις,

$$\left[ \Gamma_{ij}^1 \right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -r & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \left[ \Gamma_{ij}^2 \right] = \begin{bmatrix} 0 & 1/r & 0 \\ 1/r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \left[ \Gamma_{ij}^3 \right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Η συναλλοίωτη παράγωγος ενός τανυστή 2<sup>ος</sup> τάξεως είναι

$$A_{ij|k} = A_{ij,k} - \Gamma_{ik}^m A_{mj} - \Gamma_{jk}^m A_{im} \quad (6.109)$$

Ομοίως ορίζεται και η συναλλοίωτη παράγωγος ενός τανυστή 3<sup>ης</sup> τάξεως,

$$A_{ijk|n} = A_{ijk,n} - \Gamma_{in}^m A_{mjk} - \Gamma_{jn}^m A_{imk} - \Gamma_{kn}^m A_{ijm} \quad (6.110)$$

Από τις παραπάνω σχέσεις υπολογίζουμε διαδοχικά

$$\varepsilon_{11|2} = \varepsilon_{11,2} - \Gamma_{12}^m \varepsilon_{m1} - \Gamma_{12}^m \varepsilon_{1m} = \varepsilon_{11,2}$$

$$\varepsilon_{11|2|2} = \varepsilon_{11|2,2} - \Gamma_{12}^m \varepsilon_{m|2} - \Gamma_{12}^m \varepsilon_{1m|2} - \Gamma_{22}^m \varepsilon_{11|m} = \varepsilon_{11,22} - \Gamma_{22}^1 \varepsilon_{11,1} = r \varepsilon_{11,1}$$

Άρα

$$\varepsilon_{11|22} = r \frac{d^2 u_1}{dr^2}$$

$$\varepsilon_{22|1} = \varepsilon_{22,1} - \Gamma_{21}^m \varepsilon_{m2} - \Gamma_{21}^m \varepsilon_{2m} = \varepsilon_{22,1} - \frac{2}{r} \varepsilon_{22}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{22|1|1} &= (\varepsilon_{22,1} - \frac{2}{r} \varepsilon_{22})_{,1} - \Gamma_{21}^m \varepsilon_{m2|1} - \Gamma_{21}^m \varepsilon_{2m|1} - \Gamma_{11}^m \varepsilon_{22|m} \\ &= (\varepsilon_{22,1} - \frac{2}{r} \varepsilon_{22})_{,1} - \Gamma_{21}^2 \varepsilon_{22|1} - \Gamma_{21}^2 \varepsilon_{22|1} \\ &= (\varepsilon_{22,1} - \frac{2}{r} \varepsilon_{22})_{,1} - \frac{2}{r} (\varepsilon_{22,1} - \frac{2}{r} \varepsilon_{22}) \end{aligned}$$

$$\varepsilon_{22|1} = \varepsilon_{22,1} - \frac{2}{r} \varepsilon_{22} = \frac{d}{dr}(ru_1) - \frac{2}{r} ru_1 = r \frac{du_1}{dr} - u_1$$



$$\begin{aligned}
\varepsilon_{22|11} &= \frac{d}{dr} \left( r \frac{du_1}{dr} - u_1 \right) - \frac{2}{r} \left( r \frac{du_1}{dr} - u_1 \right) \\
&= r \frac{d^2 u_1}{dr^2} + \frac{du_1}{dr} - \frac{du_1}{dr} - 2 \frac{du_1}{dr} + 2 \frac{u_1}{r} \\
&= r \frac{d^2 u_1}{dr^2} - 2 \frac{du_1}{dr} + 2 \frac{u_1}{r}
\end{aligned}$$

$$\varepsilon_{12|1} = \varepsilon_{12,1} - \Gamma_{11}^m \varepsilon_{m2} - \Gamma_{21}^m \varepsilon_{1m} = 0$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{12|12} &= \varepsilon_{12|1,2} - \Gamma_{12}^m \varepsilon_{m2|1} - \Gamma_{22}^m \varepsilon_{1m|1} - \Gamma_{12}^m \varepsilon_{12|m} \\
&= 0 - \Gamma_{12}^2 \varepsilon_{22|1} - \Gamma_{22}^1 \varepsilon_{11|1} - 0 = -\frac{1}{r} \varepsilon_{22|1} + r \varepsilon_{11|1}
\end{aligned}$$

$$\varepsilon_{11|1} = \varepsilon_{11,1} - \Gamma_{11}^m \varepsilon_{m1} - \Gamma_{11}^m \varepsilon_{1m} = \frac{d^2 u_1}{dr^2}$$

$$\varepsilon_{22|1} = \varepsilon_{22,1} - \frac{2}{r} \varepsilon_{22} = \frac{d}{dr} (ru_1) - \frac{2}{r} ru_1 = r \frac{du_1}{dr} - u_1$$

$$\varepsilon_{12|12} = -\frac{1}{r} \varepsilon_{22|1} + r \varepsilon_{11|1} = -\frac{1}{r} \left( r \frac{du_1}{dr} - u_1 \right) + r \frac{d^2 u_1}{dr^2}$$

Οπότε:

$$2\varepsilon_{12|12} - \varepsilon_{11|22} - \varepsilon_{22|11} = 0$$

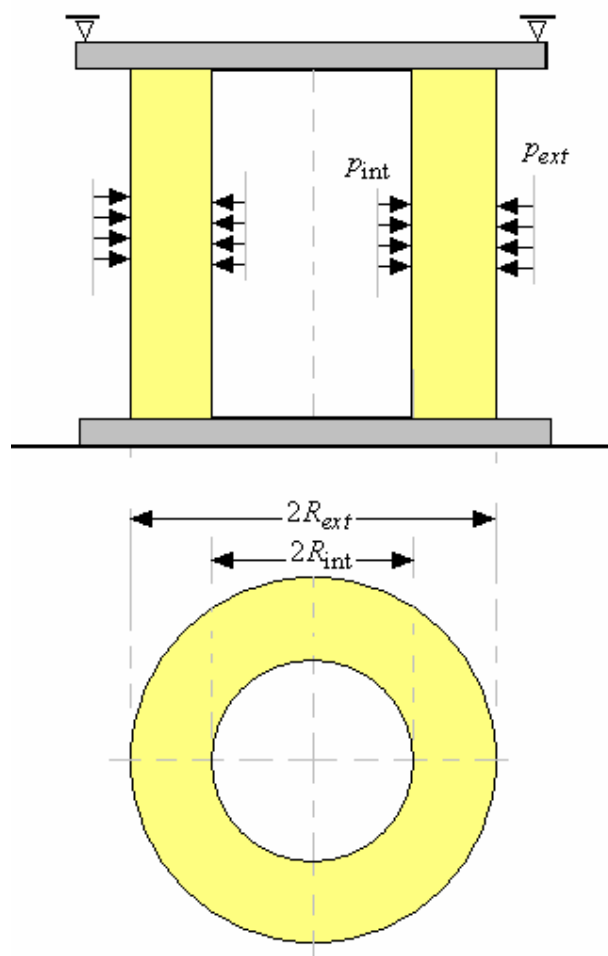
$$2 \left( -\frac{1}{r} \left( r \frac{du_1}{dr} - u_1 \right) + r \frac{d^2 u_1}{dr^2} \right) - r \frac{d^2 u_1}{dr^2} - \left( r \frac{d^2 u_1}{dr^2} - 2 \frac{du_1}{dr} + 2 \frac{u_1}{r} \right) = 0$$

$$-2 \frac{du_1}{dr} + 2 \frac{u_1}{r} + 2r \frac{d^2 u_1}{dr^2} - 2r \frac{d^2 u_1}{dr^2} + 2 \frac{du_1}{dr} - 2 \frac{u_1}{r} = 0$$

ο.ε.δ.

2. Θεωρούμε μία σφαιρική οπή ακτίνας  $R$  σε ένα απείρως εκτεινόμενο χωρίο, απουσία καθολικών δυνάμεων. Η εντατική κατάσταση στο άπειρο δίδεται ως μία ισότροπη θλιπτική τάση εντάσεως  $\sigma_\infty$ . Το πρόβλημα διατυπώνεται με τη βοήθεια ενός πολικού σφαιρικού συστήματος συντεταγμένων, του οποίου το κέντρο ταυτίζεται με το κέντρο της οπής. Να λυθεί το πρόβλημα στα πλαίσια της γραμμικής θεωρίας της Ελαστικότητας με τη μέθοδο της επαλληλίας των φορτίσεων. Ζητούνται:

1. Η διέπυσα το πρόβλημα διαφορική εξίσωση.
  2. Ο αναλυτικός υπολογισμός του εντατικού πεδίου και του πεδίου των μετατοπίσεων.
  3. Ο αναλυτικός υπολογισμός του συντελεστή συγκεντρώσεως τάσεως στο χείλος της σφαιρικής οπής.
  4. Η καμπύλη «αντιδράσεως εδάφους».
  5. Σχολιασμός αποτελεσμάτων.
3. Θεωρούμε έναν σωληνωτό φορέα από ισότροπο ελαστικό υλικό σε επίπεδη παραμόρφωση κάτω από την επίδραση εσωτερικής και εξωτερικής πίεσεως, όπως φαίνεται στο σχήμα. Έστω  $R_{int}$  και  $R_{ext}$  οι εσωτερική και εξωτερική ακτίνα του σωλήνα καθώς και  $p_{int}$ ,  $p_{ext}$  η εσωτερική και εξωτερική πίεση, που ασκούνται στον σωλήνα (Εικ. 6-6).



Εικ. 6-6: Σωλήνας σε επίπεδη παραμόρφωση κάτω από την επίδραση εσωτερικής και εξωτερικής πίεσεως

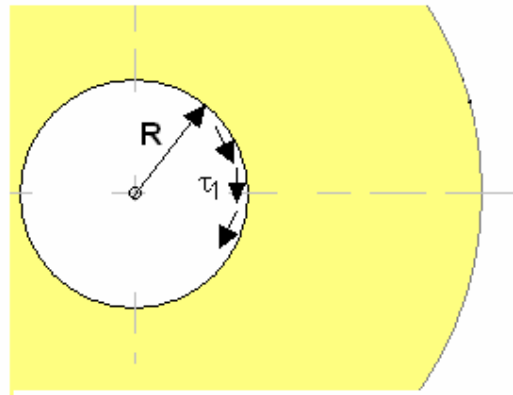
Να αποδειχθούν οι παρακάτω σχέσεις για τις τάσεις

$$\sigma_r = -\frac{p_{ext}R_{ext}^2 - p_{int}R_{int}^2}{R_{ext}^2 - R_{int}^2} + (p_{ext} - p_{int}) \frac{R_{ext}^2 R_{int}^2}{(R_{ext}^2 - R_{int}^2)r^2}$$

$$\sigma_\theta = -\frac{p_{ext}R_{ext}^2 - p_{int}R_{int}^2}{R_{ext}^2 - R_{int}^2} - (p_{ext} - p_{int}) \frac{R_{ext}^2 R_{int}^2}{(R_{ext}^2 - R_{int}^2)r^2}$$
(6.111)

Να επαληθευθεί ότι από τους παραπάνω τύπους προκύπτουν στο όριο  $R_{ext} \rightarrow \infty$  οι τύποι Lamé, εξ. (6.105). Επίσης να υπολογισθούν οι τάσεις στον δακτύλιο όταν  $R_{int} = R - d/2$  και  $R_{ext} = R + d/2$ , για  $d/R \ll 1$ .

### 6.8 Το πρόβλημα της κυλινδρικής οπής υποβαλλόμενης σε περιμετρική διάτμηση



Εικ. 6-7: Κυλινδρική οπή υπό την επίδραση διατμητικού φορτίου

Θεωρούμε μία κυλινδρική οπή ακτίνας  $R$  σε ένα απείρως εκτεινόμενο χωρίο. Αυτή τη φορά στο χείλος της οπής επιβάλλεται ένα σταθερά καταναμημένο διατμητικό φορτίο, εντάσεως  $\tau_1$ , ενώ η τάσεις στο άπειρο θεωρούνται μηδενικές (Εικ. 6-7). Όλα τα πεδία είναι ανεξάρτητα της περιμετρικής και αξονικής συντεταγμένης  $\theta$  και  $z$ . Επίσης η δράση των καθολικών δυνάμεων δεν λαμβάνεται υπόψη. Η μόνη σημαντική εξίσωση ισορροπίας που παραμένει εν προκειμένω είναι εκείνη που ισχύει κατά την περιμετρική κατεύθυνση,

$$\frac{d\sigma_{r\theta}}{dr} + \frac{2}{r}\sigma_{r\theta} = 0$$
(6.112)

Οι συνοριακές συνθήκες του προβλήματος είναι,

$$r = R: \quad \sigma_{r\theta} = \tau_1 \quad (6.113)$$

και

$$r \rightarrow \infty: \quad |\sigma_{r\theta}| < \infty \quad (6.114)$$

Παρατηρούμε ότι η εξίσωση ισορροπίας (6.112) λύνεται χωρίς να χρειασθεί να γίνει χρήση καταστατικών σχέσεων. Με άλλα λόγια το πρόβλημα είναι *στατικά ορισμένο* («ισοστατικό»). Η λύση της Εξ. (6.112) είναι,

$$\sigma_{r\theta} = Ar^{-2} \quad (6.115)$$

Η λύση αυτή με τη συνοριακή συνθήκη Εξ. (6.113) δίδει

$$\sigma_{r\theta} = \tau_1 \rho^{-2} \quad , \quad \rho = \frac{r}{R} \quad (6.116)$$

Η συγγενής κινηματική δίδεται κατ' ευθείαν από τη γεωμετρική σχέση μεταξύ μετατοπίσεως και τροπής, Εξ. (6.30)

$$\varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right) \quad (6.117)$$

και τη σχετική καταστατική εξίσωση μεταξύ διατμητικής τάσεως και τροπής. Εν προκειμένω δεχόμαστε τη καταστατική σχέση της γραμμικής θεωρίας της ελαστικότητας, Εξ.(6.74),

$$\sigma_{r\theta} = 2G\varepsilon_{r\theta} \quad (6.118)$$

Από τις παραπάνω σχέσεις παίρνουμε τη διαφορική εξίσωση για την περιμετρική μετατόπιση,

$$\frac{du_\theta}{dr} - \frac{u_\theta}{r} = \frac{\tau_1}{G} \left( \frac{R}{r} \right)^2 \Rightarrow u_\theta = \left( Br - \frac{1}{2} \frac{\tau_1}{G} \left( \frac{R}{r} \right)^2 r \right) \quad (6.119)$$

Απαιτώντας όπως το πεδίο μετατοπίσεως είναι φραγμένο στο άπειρο, μηδενίζεται η σταθερά ολοκληρώσεως,

$$r \rightarrow \infty: \quad |u_\theta| < \infty \Rightarrow B = 0 \quad (6.120)$$

οπότε

$$u_\theta = -\frac{\tau_1}{2G} R \rho^{-1} \quad , \quad \rho = \frac{r}{R} \quad (6.121)$$

Άρα η μετατόπιση στο χείλος της οπής δίδεται από την εξής απλή σχέση,

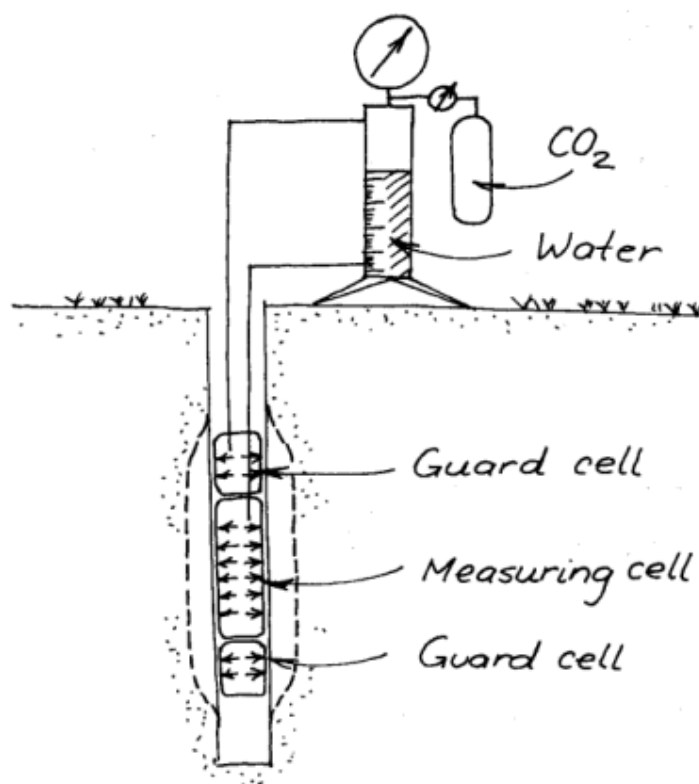
$$u_{\theta}(R) = -\frac{\tau_1}{2G} R \quad (6.122)$$

### Παρατήρηση

Η παραπάνω σχέσεις, Εξ.(6.106) και (6.122) μπορούν να χρησιμοποιηθούν για μία επί τόπου εκτίμηση της εντατικής καταστάσεως σε ένα φορέα

$$\sigma_{\infty} = \sigma_1 + \frac{u_r(R)}{u_{\theta}(R)} \tau_1 \quad (6.123)$$

Η αντίστοιχη συσκευή τρήσεως θα έπρεπε να συνδυάζει ένα «πρεσιόμετρο»<sup>13</sup> (Εικ. 6-8) με ένα τρυπάνι.



Εικ. 6-8: Το πρεσιόμετρο τύπου Menard

<sup>13</sup> Menard pressuremeter (MPM) test. Menard, L. F. (1957). Mesures in situ des propriétés physiques des sols. Annales des Ponts et Chaussées 127, No. 3, 357-377.

## 6.9 Οι Εξισώσεις ισορροπίας στο σύστημα κυρίων αξόνων του τανυστή των τάσεων

Ως νέος διδάκτορας στο Πανεπιστήμιο της Καρλσρούης το 1977 είχα την τύχη να συζητήσω με τον αιώνιο Καθηγητή W. Günther. Μια από τις ερωτήσεις που του υπέβαλα τότε ήταν αν άραγε, με δεδομένο ένα εντατικό πεδίο, θα μπορούσαμε πάντοτε να κατασκευάσουμε τρεις οικογένειες επιφανειών στο χώρο, που να τέμνονται καθέτως μεταξύ τους και που η καμπύλες αλληλοτομίας τους να έχουν σε κάθε σημείο τους ως εφαπτομενικά διανύσματα τα ιδιοδιανύσματα του συμμετρικού τανυστή των τάσεων. Ο Καθηγητής Günther μου έγραψε σε απάντηση μια μακροτενή επιστολή, όπου εξηγεί ότι αυτό γενικώς δεν είναι δυνατό. Μάλιστα υποδεικνύει στην επιστολή του αυτή ότι το πρόβλημα αυτό τοποθετήθηκε αρχικά και λύθηκε από τον Lamé: «... *Das Problem wurde erstmals von Lamé<sup>14</sup> gestellt und auch gelöst; es wird mit unterschiedlichem Abstraktheitsgrad, in vielen Lehrbüchern der Flächentheorie und der Differentialgeometrie behandelt. Für die Kontinuumsmechanik interessant ist der Fall, daß das Kurvennetz durch die Eigenrichtungen eines symmetrischen Tensors erzeugt wird; hierzu findet sich ein Hinweis bei Schouten<sup>15</sup>. Ein durchgerechnetes Beispiel habe ich nirgends finden können...*». Η επιστολή συνεχίζει με ένα θαυμάσιο αντιπαράδειγμα. Ίσως κάποτε βρεθεί ο χρόνος να δώσουμε σ' αυτό το τόσο διδακτικό αντιπαράδειγμα την πρέπουσα δημοσιότητα. Σχετικά στο κλασικό σύγραμμα του Love<sup>16</sup>, διαβάζουμε: “... *Partial representations by graphic means have sometimes been used in cases where a complete representation cannot be obtained. Of this kind are tracings or models of the “lines of stress”. These lines are such that the tangent to any one of them at any point is normal to a principal plane of stress at the point. Through any point there pass three such lines, cutting each other at right angles. These lines may determine a triply orthogonal set of surfaces, but in general no such set exists. When such surfaces exist they are described as “isostatic surfaces\*”, and from a knowledge of them the directions of the principal stresses at any point can be inferred. In two-dimensional systems there is always a set of isostatic surfaces. Distributions of stress may be studied by the aid of polarized light...*”.

\* These surfaces were first discussed by Lamé, *J. de Math. Liouville*, t.6 (1841), and *Leçons sur les coordonnées curvilignes*. The fact that they do not in general exist was pointed out by Boussinesq, *Paris, C.R.*, t.74 (1872).

## 6.10 Διατύπωση των εξισώσεων ισορροπίας στο επίπεδο στο σύστημα κυρίων κατευθύνσεων του τανυστή των τάσεων

Το επίπεδο το πρόβλημα έχει πάντοτε λύση, η οποία και αποδίδεται στον C. Maxwell. Στη συνέχεια παραθέτουμε την κατασκευή του συστήματος των εξισώσεων ισορροπίας στο επίπεδο στο σύστημα των καμπυλόγραμμων συντεταγμένων, που καθορίζονται από τις ιδιοκατευθύνσεις («τροχιές») του τανυστή των τάσεων.

Έστω ένα σώμα  $\mathbf{B}$  υπό ένταση σε μία απεικόνιση ισορροπίας  $C$ . Θεωρούμε ένα πρόβλημα επίπεδης παραμορφώσεως. Στην περίπτωση αυτή, εάν το σώμα είναι ισότροπο υπό την έννοια

<sup>14</sup> Lamé G., *Leçons sur les Coordonnées Curvilignes*, Paris 1859.

<sup>15</sup> Schouten, J.A. *Der Ricci-Kalkül*, Berlin, 1924, S. 196 f.

<sup>16</sup> Love, A. E. H., *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, 1927, Dover, § 57, p. 88-89, 1994.

του Noll<sup>17</sup>, τότε οι διατμητικές συνιστώσες του τανυστή των τάσεων στην απεικόνιση C σε επίπεδα κάθετα προς την κατεύθυνση μηδενικής παραμορφώσεως  $Ox^3$  μηδενίζονται,

$$\sigma^{i3} = 0 \quad (i=1,2) \quad (6.124)$$

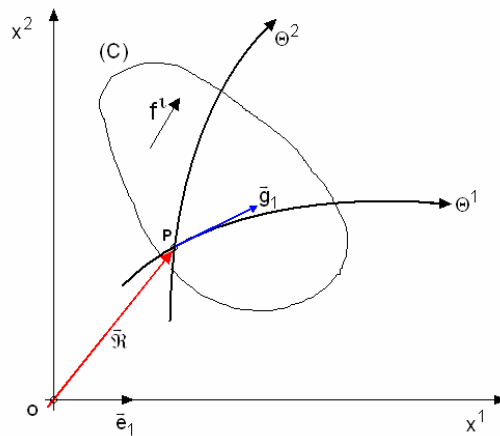
Άρα η κατεύθυνση  $Ox^3$  είναι κατεύθυνση μιας κύριας τάσεως, της

$$\sigma^3 = \sigma^{33} \quad (6.125)$$

Το γεγονός αυτό απλουστεύει σημαντικά το πρόβλημα καθότι το καθιστά επίπεδο.

Έστω  $(\Theta^1, \Theta^2)$  ένα σύστημα καμπυλόγραμμων συντεταγμένων στο επίπεδο  $O(x^1, x^2)$  (Εικ. 6-9). Οι εξισώσεις ισορροπίας στο επίπεδο εκφράζονται συναρτήσει των συντεταγμένων του τανυστή των τάσεων αναφορικά προς το εν λόγω καμπυλόγραμμο σύστημα συντεταγμένων ως εξής,

$$\sigma_{|k}^{kl} + f^l = 0 \quad (l, k=1,2) \quad (6.126)$$



Εικ. 6-9: Καμπυλόγραμμο σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο. Διάνυσμα βάσεως και καθολική δύναμη.

Στη διατύπωση του θεωρούμενου προβλήματος χρησιμοποιούμε δείκτες από το ελληνικό αλφάβητο, δεχόμενοι ότι αυτοί λαμβάνουν τις τιμές 1 και 2 μόνο. Αντιστοίχως συμβολίζουμε με  $f^l$  τις συνιστώσες της καθολικής δυνάμεως στο επίπεδο και με  $(\bullet)_{|k}$  συμβολίζουμε την συναλλοίωτη παράγωγο ενός πεδίου στο επίπεδο, ήτοι

$$\sigma_{|k}^{kl} = \sigma_{,k}^{kl} + \sigma^{k\lambda} \Gamma_{\lambda k}^l + \sigma^{kl} \Gamma_{\lambda k}^{\lambda} \quad (6.127)$$

<sup>17</sup> Ιδέ Παράρτημα Ι.

όπου με  $(\bullet)_{,l}$  συμβολίζουμε την μερική παράγωγο ως προς την καμπυλόγραμμη συντεταγμένη  $\Theta^l$  και με  $\Gamma_{\kappa\lambda}^l$  τα αντίστοιχα σύμβολα Christoffel.

Για  $l=1$  η Εξ.(6.127) δίδει,

$$\begin{aligned}\sigma_{|\kappa}^{\kappa 1} &= \sigma_{,\kappa}^{\kappa 1} + \sigma^{\kappa\lambda} \Gamma_{\lambda\kappa}^1 + \sigma^{\kappa 1} \Gamma_{\lambda\kappa}^\lambda \\ &= \sigma_{,1}^{11} + \sigma_{,2}^{21} \\ &\quad + \sigma^{11} \Gamma_{11}^1 + \sigma^{12} \Gamma_{21}^1 + \sigma^{21} \Gamma_{12}^1 + \sigma^{22} \Gamma_{22}^1 \\ &\quad + \sigma^{11} (\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{21}^2) + \sigma^{21} (\Gamma_{12}^1 + \Gamma_{22}^2)\end{aligned}\tag{6.128}$$

Αν τώρα δεχθούμε ότι οι κατευθύνσεις  $\Theta^1$  και  $\Theta^2$  ταυτίζονται με τις κύριες κατευθύνσεις του ταυνοστή των τάσεων στο επίπεδο στο εν λόγω σημείο, τότε

$$\sigma^{12} = \sigma^{21} = 0\tag{6.129}$$

οπότε η παραπάνω σχέση δίδει,

$$\sigma_{|\kappa}^{\kappa 1} = \sigma_{,1}^{11} + \sigma^{11} (2\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{21}^2) + \sigma^{22} \Gamma_{22}^1\tag{6.130}$$

Για τον υπολογισμό των συμβόλων Christoffel, θεωρούμε τον μετασχηματισμό από τις καρτεσιανές στις εν λόγω καμπυλόγραμμες συντεταγμένες,

$$\begin{aligned}x^1 &= \chi^1(\Theta^1, \Theta^2) \\ x^2 &= \chi^2(\Theta^1, \Theta^2)\end{aligned}\tag{6.131}$$

Π.χ. οι εξισώσεις,

$$x^1 = \chi^1(\Theta^1, c) \quad , \quad x^2 = \chi^2(\Theta^1, c) \quad , \quad c = const.\tag{6.132}$$

ορίζουν μία από τις καμπύλες της οικογένειας  $\Theta^1$ . Ως εκ τούτου η τοπική διανυσματική βάση σε ένα σημείο του επιπέδου  $P(\Theta^1 = c^1, \Theta^2 = c^2)$ , δίδεται από τις εξής διανυσματικές σχέσεις,

$$\bar{g}_\alpha = \left( \frac{\partial \chi^\beta}{\partial \Theta^\alpha} \right)_P \bar{e}_\beta\tag{6.133}$$

Υποθέτουμε τώρα ότι τοπικά επιλέγουμε την παράμετρο  $\Theta^\alpha$  να συμπίπτει με το μήκος του τόξου  $s^\alpha$  κατά μήκος της καμπύλης  $\Theta^\alpha$ , οπότε το διάνυσμα



$$\bar{g}_\alpha = \left( \frac{\partial \chi^\beta}{\partial s^\alpha} \right)_P \bar{e}_\beta \quad (6.134)$$

είναι μοναδιαίο,

$$\bar{g}_\alpha = \bar{g}_\alpha^{(0)} \quad (6.135)$$

Αυτό σημαίνει ότι αν χρησιμοποιήσουμε τοπικά το μήκος τόξου για την παραμετρική περιγραφή των «τροχιών» των κυρίων τάσεων, τότε η προκύπτουσα τοπική διανυσματική βάση είναι ορθοκανονική,

$$g_{\alpha\beta} = \bar{g}_\alpha \cdot \bar{g}_\beta = \delta_{\alpha\beta} \quad (6.136)$$

Τώρα συμφώνως προς τον ορισμό των συμβόλων Christoffel έχουμε,

$$\bar{g}_{\kappa,\lambda} = \Gamma'_{\kappa\lambda} \bar{g}_i \quad (6.137)$$

Από τις Εξ. (6.136) και (6.137) έπεται ότι,

$$0 = g_{11,1} = (\bar{g}_1 \cdot \bar{g}_1)_{,1} = 2\bar{g}_{1,1} \cdot \bar{g}_1 = 2\Gamma_{11}^1 g_{11} = 2\Gamma_{11}^1 \quad (6.138)$$

οπότε,

$$T_{\kappa}^{\kappa 1} \sigma \frac{\partial \sigma^{11}}{\partial s^1} + \sigma^{11} \Gamma_{21}^2 + \sigma^{22} \Gamma_{22}^1 \quad (6.139)$$

Επειδή η επιλεγείσα τοπική βάση είναι κανονική, οι συνιστώσες του τανυστή των τάσεων ταυτίζονται σε τις φυσικές συνιστώσες αυτού. Επίσης λόγω της Εξ. (6.129) στην εξίσωση ισορροπίας εμφανίζονται μόνο ορθές τάσεις που ταυτίζονται ως εκ τούτου με τις κύριες τάσεις στο επίπεδο,

$$\sigma^1 = \sigma^{*11} = \sigma^{11} \sqrt{g_{11}} \sqrt{g_{11}} = \sigma^{11} \quad (6.140)$$

$$\sigma^2 = \sigma^{*22} = \sigma^{22} \sqrt{g_{22}} \sqrt{g_{22}} = \sigma^{22}$$

οπότε η Εξ. (6.139) γράφεται,

$$\sigma_{\kappa}^{\kappa 1} = \frac{\partial \sigma^1}{\partial s^1} + \sigma^1 \Gamma_{21}^2 + \sigma^2 \Gamma_{22}^1 \quad (6.141)$$

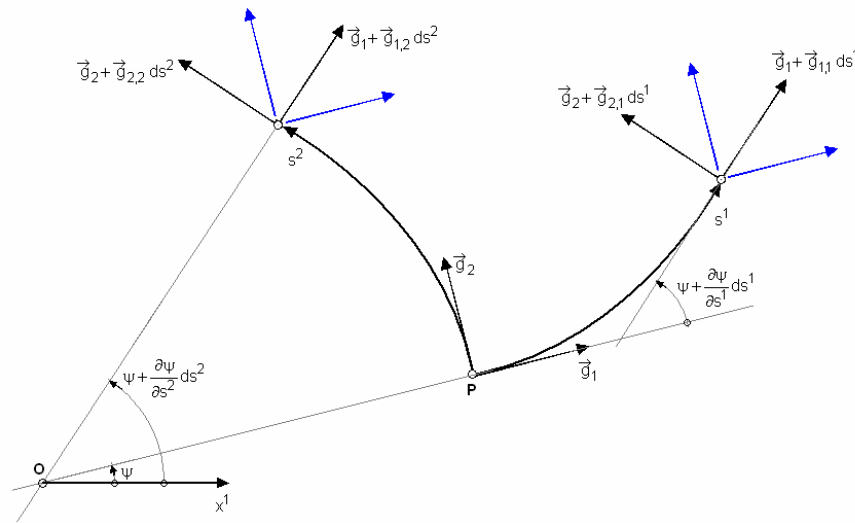
Από την Εξ. (6.137) παίρνουμε,

$$\bar{g}_{1,2} = \Gamma_{12}^1 \bar{g}_1 + \Gamma_{12}^2 \bar{g}_2 \Rightarrow \Gamma_{12}^2 = \bar{g}_{1,2} \cdot \bar{g}_2 \quad (6.142)$$

$$\bar{g}_{2,2} = \Gamma_{22}^1 \bar{g}_1 + \Gamma_{22}^2 \bar{g}_2 \Rightarrow \Gamma_{22}^1 = \bar{g}_{2,2} \cdot \bar{g}_1$$

Υπενθυμίζουμε τη συμμετρία των συμβόλων Christoffel ως προς του δύο κάτω δείκτες, οπότε

$$\Gamma_{21}^2 = \Gamma_{12}^2 = \bar{g}_{1,2} \cdot \bar{g}_2 \quad (6.143)$$



Εικ. 6-10: Τοπικά διανύσματα βάσεως και η μεταβολή τους σε σύστημα ορθογώνιων καμπυλόγραμμων συντεταγμένων.

Από την Εικ. 6-9 παίρνουμε ότι τα σύμβολα Christoffel μπορούν να εκφραστούν συναρτήσει της γωνίας  $\psi$  που σχηματίζει η τροχιά της κύριας τάσεως  $\sigma^1$  με τον άξονα  $Ox^1$ . Πράγματι έχουμε ότι,

$$(\bar{g}_1 + \bar{g}_{1,2} ds^2) \cdot \bar{g}_2 = \bar{g}_1 \cdot \bar{g}_2 + \frac{\partial \psi}{\partial s^2} ds^2 \bar{g}_2 \cdot \bar{g}_2 \Rightarrow \Gamma_{12}^2 = \frac{\partial \psi}{\partial s^2} \quad (6.144)$$

$$(\bar{g}_2 + \bar{g}_{2,2} ds^2) \cdot \bar{g}_1 = \bar{g}_2 \cdot \bar{g}_1 - \frac{\partial \psi}{\partial s^2} ds^2 \bar{g}_1 \cdot \bar{g}_1 \Rightarrow \Gamma_{22}^1 = -\frac{\partial \psi}{\partial s^2}$$

Με τις εκφράσεις αυτές για τα σύμβολα Christoffel η Εξ.(6.141) γράφεται ως εξής,

$$\sigma_{|k}^{k1} = \frac{\partial \sigma^1}{\partial s^1} + (\sigma^1 - \sigma^2) \frac{\partial \psi}{\partial s^2} \quad (6.145)$$

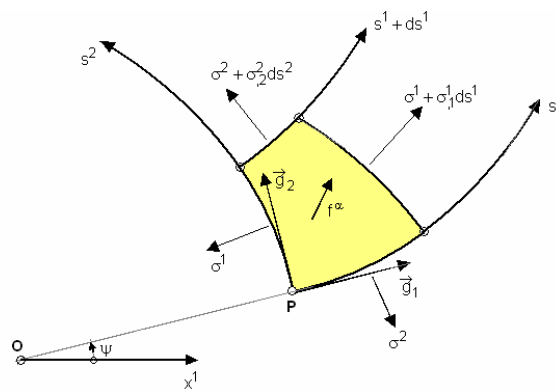
Ομοίως παίρνουμε (γιατί;)

$$\begin{aligned}\sigma_{|k}^{\kappa 2} &= \frac{\partial \sigma^1}{\partial s^2} + \sigma^1 \Gamma_{11}^2 + \sigma^2 \Gamma_{21}^1 \\ &= \frac{\partial \sigma^1}{\partial s^2} + (\sigma^1 - \sigma^2) \frac{\partial \psi}{\partial s^1}\end{aligned}\quad (6.146)$$

Εισάγοντας τις παραπάνω εκφράσεις στις εξισώσεις ισορροπίας (6.126) καταλήγουμε στις λεγόμενες εξισώσεις Maxwell,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma^1}{\partial s^1} + (\sigma^1 - \sigma^2) \frac{\partial \psi}{\partial s^2} + f^1 &= 0 \\ \frac{\partial \sigma^1}{\partial s^2} + (\sigma^1 - \sigma^2) \frac{\partial \psi}{\partial s^1} + f^2 &= 0\end{aligned}\quad (6.147)$$

Παρατηρούμε ότι οι εξισώσεις αυτές περιγράφουν την ισορροπία στο τοπικό σύστημα ορθογώνιων συντεταγμένων των τροχιών των κυρίων τάσεων στο επίπεδο για ένα ορθογώνιο στοιχείο, του οποίου οι πλευρές του ορίζονται από τις τροχιές  $s^1, s^2$  και  $s^1 + ds^1, s^2 + ds^2$  (Εικ. 6-11).

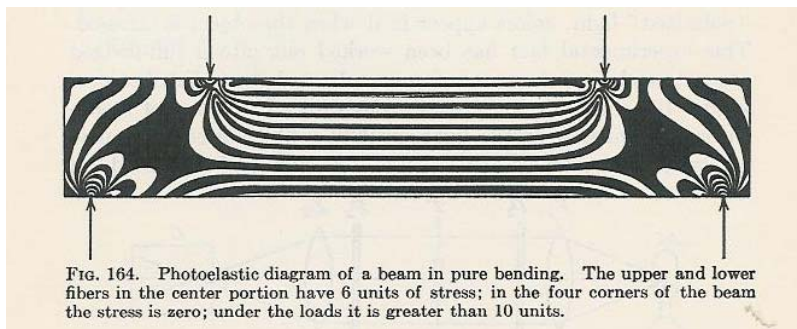


Εικ. 6-11: Ισορροπία στο στοιχείο

## 6.11 Φωτοελαστικότητα

Η οπτική πειραματική μέθοδος της φωτοελαστικότητας εφαρμόζεται για τον προσδιορισμό της εντατικής καταστάσεως σε λεπτά επίπεδα προσομοιώματα κατασκευών, κατασκευασμένα από διπλοθλαστικό υλικό. Σε ένα φωτοελαστικό πείραμα θα καταγραφούν οι λεγόμενες *ισοχρωματικές* και *ισοκλινείς* καμπύλες (Εικ. 6-12). Οι *ισοχρωματικές* καμπύλες είναι οι γεωμετρικοί τόποι των σημείων εκείνων στο επίπεδο το δοκιμίου στα οποία η τιμή της διαφοράς των κυρίων τάσεων είναι σταθερή. Οι *ισοκλινείς* καμπύλες είναι οι περιβάλλουσες

των κατευθύνσεων των κυρίων τάσεων<sup>18</sup>. Με δεδομένες τις ισοχρωματικές και τις ισοκλινείς καμπύλες από το πείραμα, καλείται κανείς να ολοκληρώσει το εντατικό πεδίο βασιζόμενος στις εξισώσεις Maxwell.



Εικ. 6-12: Κάμψη 4 σημείων<sup>19</sup>: Στο κεντρικό φάτνωμα η οικογένεια των παράλληλων προς το άξονα της δοκού ισοχρωματικών καταδεικνύει την γραμμική κατανομή της διαφοράς,  $(\sigma_1 - \sigma_2) = \sigma_{xx} = cz$ , γνωστής ήδη από την Τεχνική Θεωρία Κάμψεως

## 6.12 Στατική λειτουργία τόξου

Παρατηρούμε ότι οι αν το πρόβλημα είναι ισοστατικό, τότε οι εξισώσεις Maxwell επιλύονται κατευθείαν. Π.χ. για το πρόβλημα της κυλινδρικής οπής υποβαλλόμενης σε περιφερειακή διάτμηση, έχουμε την εξής λύση στο επίπεδο (Εικ. 6-13),

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{rr} & \sigma_{r\theta} \\ \sigma_{\theta r} & \sigma_{\theta\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \tau_1 \rho^{-2} \\ \tau_1 \rho^{-2} & 0 \end{bmatrix} \quad (6.148)$$

Οι κύριες τάσεις είναι

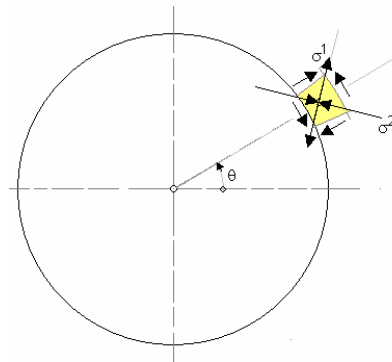
$$\sigma^1 = \tau_1 \rho^{-2} \quad , \quad \sigma^2 = -\tau_1 \rho^{-2} \quad (6.149)$$

και η γωνία που σχηματίζει ο η κύρια τάση  $\sigma^1$  με στο τοπικό σύστημα είναι,

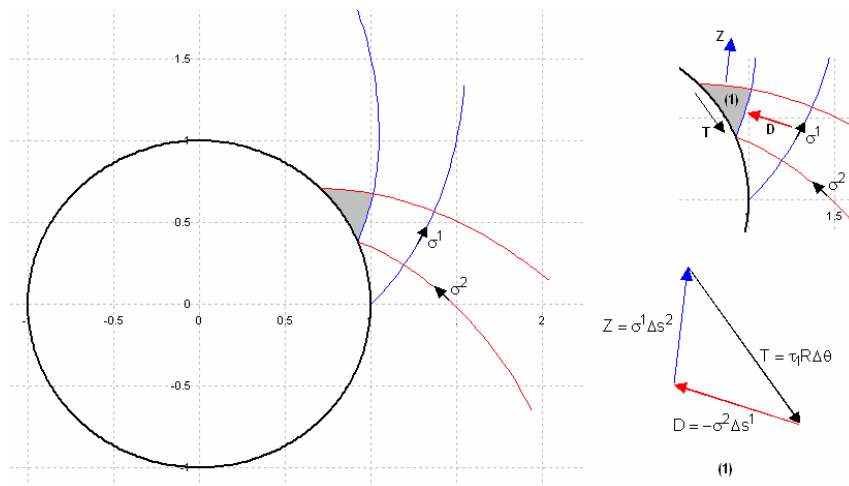
$$\psi_1 = \theta + \pi/4 \quad (6.150)$$

<sup>18</sup> P. Pinit and E. Umezaki (2005). Full-Field Determination of Principal-Stress Directions Using Photoelasticity with Plane-Polarized RGB Lights. Optical Review 12 (3), 228–232.

<sup>19</sup> P. Den Hartog, *Strength of Materials*, Dover, p.200, 1961.



Εικ. 6-13: Εντατική κατάσταση στο χείλος μιας οπής υπό διάτμηση



Εικ. 6-14: Τροχιές κυρίων τάσεων στο πρόβλημα της οπής υπό διάτμηση

Στην περίπτωση αυτή οι τροχιές των κυρίων τάσεων είναι λογαριθμικές σπείρες της μορφής,

$$(\sigma^1): r = \text{Re}xp\left(\theta \cot\left(\frac{\pi}{4}\right)\right), \quad x = r \cos(\theta + \theta_0), \quad y = r \sin(\theta + \theta_0) \tag{6.151}$$

$$(\sigma^2): r = \text{Re}xp\left(-\theta \cot\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right), \quad x = r \cos(-\theta + \theta_0), \quad y = r \sin(-\theta + \theta_0)$$

Από την Εικ. 6-14 καθίσταται φανερό ότι στο παράδειγμα αυτό το δίκτυο των τροχειών είναι ισοστατικό. Η Στατική επίλυση ξεκινά από τα τριγωνικά στοιχεία στο χείλος της οπής και επεκτείνεται στο εσωτερικό χωρίο, καθότι τα γειτονικά τετραγωνικά στοιχεία έχουν δύο γνωστές και δύο άγνωστες συνοριακές δυνάμεις. Σε παρατηρήσεις σαν και αυτή βασίζεται η

ιδέα της κατασκευής εντατικών πεδίων, όπου γίνεται χρήση της έννοιας της «τοξωτής λειτουργίας<sup>20</sup>». Με τον όρο αυτό εννοούμε την εξής κατασκευή:

1. Για ένα δεδομένο πρόβλημα κατασκευάζουμε ένα στατικώς ορισμένο, πεπερασμένο δίκτυο τροχιών κυρίων τάσεων. Το δίκτυο των τροχιών των κυρίων τάσεων χωρίζει το χωρίο σε τετράγωνα σχήματα ή ορθογώνια τρίγωνα. Οι δυνάμεις μεταξύ των στοιχείων αυτών είναι κάθετες στις πλευρές των σχημάτων. Το δίκτυο καλείται ισοστατικό όταν όλες οι δυνάμεις μεταξύ των στοιχείων υπολογίζονται. Αν η διαμέριση είναι αρκούντως «λεπτή», τότε αρκεί να εξασφαλισθεί η ισορροπία δυνάμεων. Αν η διαμέριση είναι «χονδροειδής», τότε πρέπει να εξασφαλισθεί και η ισορροπία ροπών στο κάθε στοιχείο.
2. Ένα ισοστατικό δίκτυο προσεγγίζει μια δυνατή κατάσταση ισορροπίας, η οποία με τη σειρά της είναι «κοντά» σε μια κατάσταση «αστοχίας», αφού προτού γίνει η μετάβαση ενός συστήματος από στερεό σε κινηματικό, οφείλει αυτό να διέλθει από μία κατάσταση όπου είναι ισοστατικό. Αυτή η μετάβαση γίνεται εύκολα αισθητή αν αφαιρέσουμε από το ισοστατικό δίκτυο ένα στοιχείο και καταστήσουμε αδύνατη την κατασκευή της λύσεως ισορροπίας. Στο παραπάνω παράδειγμα αυτό γίνεται με την αφαίρεση ενός τριγωνικού στοιχείου, (1), που στην πράξη αποκαλείται και «κλειδα».

### Παράδειγμα<sup>21</sup>

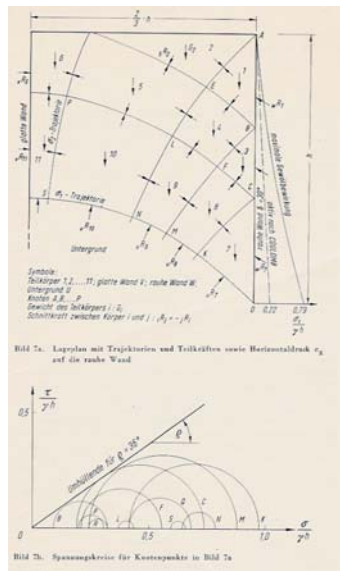
Τα παρακάτω σχήματα (Εικ. 6-15 και Εικ. 6-16) περιγράφουν την γραφοστατική επίλυση ενός προβλήματος πλευρικής ωθήσεως γαιών επί ενός αδρού τοίχου αντιστηρίξεως που ταυτίζεται με το δεξιό κατακόρυφο σύνορο στο σχήμα. Η κατασκευή αφορά στην προσέγγιση ενός δικτύου τροχιών κυρίων τάσεων που να αντιστοιχεί στην εμφάνιση ενός δυσμενούς τόξου επιφορτίσεως του τοίχου αντιστηρίξεως. Αυτό σημαίνει ότι ο σχεδιασμός του δικτύου των τροχιών των κυρίων τάσεων ακολουθεί τη στρατηγική μεγιστοποίησης της πλευρικής ωθήσεως στο δεξιό κατακόρυφο σύνορο. Το αριστερό κατακόρυφο σύνορο θεωρείται λείο, όποτε οι τροχιές τις αντίστοιχης κύριας τάσεως ξεκινούν κάθετα προς αυτό. Το δίκτυο είναι στατικώς ορισμένο εφ' όσον δοθεί η κατανομή της ορθής και της διατμητικής τάσεως στο δεξιό κατακόρυφο σύνορο. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα επιλέχθηκε σταθερός λόγος διατμητικής προς ορθή τάση στο σύνορο αυτό. Με διαδοχικές δοκιμές που αφορούν στην επιλογή του δικτύου και μιας κατανομής της ορθής τάσεως στο δεξιό σύνορο, τελικά προσεγγίζεται το δυσμενές τόξο επιφορτίσεως με τον περιορισμό, πουθενά στο χωρίο να μην καταρρίπτεται το επιλεγμένο κριτήριο αντοχής Mohr-Coulomb.

Στη βιβλιογραφία θα βρούμε και κάποιες άλλες κατασκευές δυσμενών και ευμενών τόξων, όπως τα εικονιζόμενα στην Εικ. 6-17, που αφορούν στα δίκτυα κυρίων τάσεων σε πρηνές από κοκκώδες υλικό. Η λύση (α) αφορά στην «ελάχιστη» τοξωτή λειτουργία ενώ η λύση (β) στη μέγιστη τοξωτή λειτουργία<sup>22</sup>.

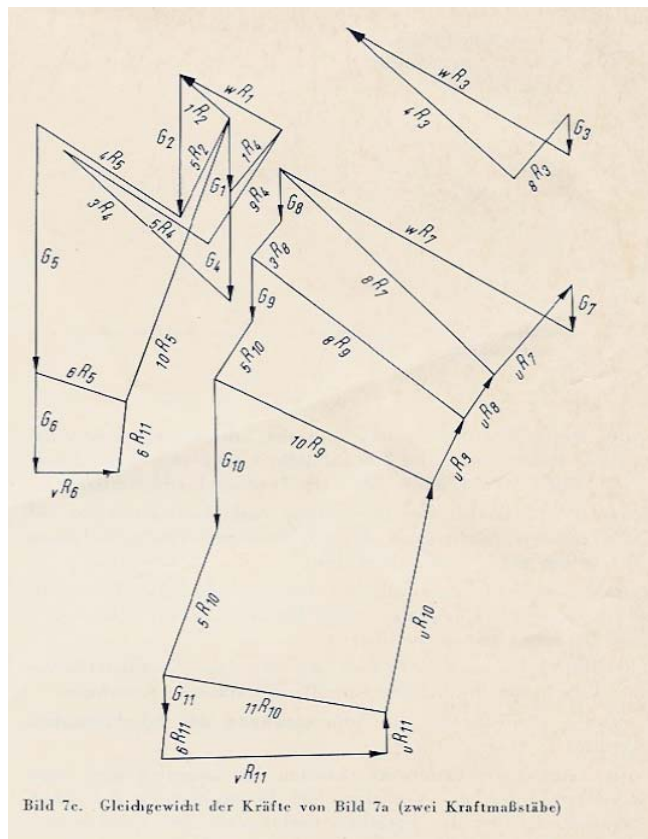
<sup>20</sup> Αγγλ. *arching*.

<sup>21</sup> Το παράδειγμα αυτό προετοιμάστηκε από τον συγγραφέα και δημοσιεύθηκε στην εργασία: Gudenus, G. (1974). Konstruktion statisch möglicher Spannungsfelder in Erdkörpern. *Strasse Brücke Tunnel*, 6, 157-161

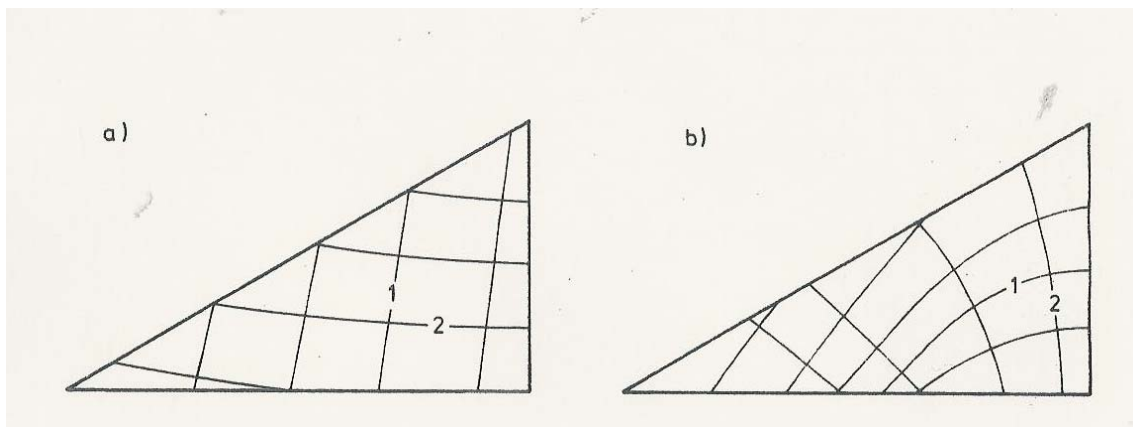
<sup>22</sup> Trollope, D.H. (1957). The systematic arching theory applied to the stability analysis of embankments. *Proc. 4th Int. Conf. Soil Mech. Found. Eng.*, London, 382-388.



Εικ. 6-15::Ισοστατικό δίκτυο τροχιών κύριων τάσεων: Ανάλυση πεπερασμένων τεμαχίων



Εικ. 6-16::Το διάγραμμα Cremona του αναλυθέντος ισοστατικού δικτύου arching field



Εικ. 6-17: Τοξωτή λειτουργία στο πρόβλημα του κώνου εναποθέσεως (Trollope 1957).



**Παράρτημα Ι: Συμμετρίες στην επίπεδη παραμόρφωση**

Θεωρούμε χάριν απλότητας ένα Συνεχές υλικό σώμα  $\mathbf{B}$ , το οποίο υπόκειται σε μία ομογενή παραμόρφωση, που περιγράφεται από την βαθμίδα παραμορφώσεως  $\mathbf{F}$  ως προς κάποια απεικόνιση αναφοράς,  $\mathbf{C}^{(r)}$ . Στο πλαίσιο μιας γενικής καταστατικής θεωρίας για υλικά που περιγράφονται από μια μηχανική θεωρία για Συνεχή Μέσα τύπου Boltzmann<sup>23</sup>, ο τανυστής των τάσεων θα θεωρηθεί ότι είναι συνάρτηση όλης της προϊστορίας παραμορφώσεως του υλικού. Η μαθηματική έκφραση αυτής της γενικής υποθέσεως έχει ως εξής,

$$\sigma_{ij} = \underset{\tau=-\infty}{\overset{t}{\mathfrak{I}}}_{ij} (F_{ij}) \quad \text{ή} \quad \mathbf{T} = \mathfrak{I}(\mathbf{F}) \quad (6.152)$$

όπου  $\mathfrak{I}_{ij}(\bullet)$  είναι γενικώς ένα μη-γραμμικό, τανυστικό συναρτησιακό, ορισμένο πάνω στο  $t$  σύνολο των ομαλών τετραγωνικών πινάκων,  $[F]_{ij} = F_{ij}$ , οι οποίοι εμπροκειμένω παριστάνουν το σύνολο βαθμίδων παραμορφώσεως, στις οποίες μπορεί να υποβληθεί το εν λόγω υλικό σώμα.

Ένα υλικό καλείται ισότροπο κατά Noll<sup>24</sup>, όταν υπάρχει μια απεικόνιση  $\mathbf{C}^{(*)}$  του σώματος, αυτού ως προς την οποία ισχύει η σχέση,

$$Q_{in}Q_{jm}\sigma_{nm} = \underset{\tau=-\infty}{\overset{t}{\mathfrak{I}}}_{ij} (Q_{kp}Q_{lq}F_{pq}) \quad \text{ή} \quad \mathbf{Q}\sigma\mathbf{Q}^T = \mathfrak{I}(\mathbf{Q}\mathbf{F}\mathbf{Q}^T) \quad (6.153)$$

όπου το μητρώο  $\mathbf{Q}$  παίζει τον ρόλο ενός τελεστή που απεικονίζει ένα διάνυσμα  $\mathbf{a}$  σε ένα άλλο διάνυσμα  $\bar{\mathbf{a}}$ ,

$$\bar{a}_i = Q_{im}a_m \quad \text{ή} \quad \bar{\mathbf{a}} = \mathbf{Q}\mathbf{a} \quad (6.154)$$

και ανήκει εμπροκειμένω στην ομάδα μετασχηματισμών ισοτροπίας του σώματος. Για ισότροπα απλά υλικά η ομάδα ισοτροπίας περιλαμβάνει όλες τις στροφές στερεού σώματος.

Θεωρούμε τώρα το σύνολο των επίπεδων παραμορφώσεων,

$$[\mathbf{F}] = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & 0 \\ F_{21} & F_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.155)$$

και εφαρμόζουμε την Εξ. (6.153) για μια στροφή στο επίπεδο κατά  $180^\circ$

<sup>23</sup> Τα λεγόμενα και απλά υλικά (Αγγλ. *simple materials*)

<sup>24</sup> Truesdell C. and Noll. W. *Non-linear Field Theories in Mechanics*. Handbook of Physics, III/3, Sect.31, Springer, 1965

$$[Q] = \begin{bmatrix} \cos(\pi) & \sin(\pi) & 0 \\ \sin(\pi) & \cos(\pi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.156)$$

Για την επιλογή αυτή έχουμε αφενός μεν ότι

$$[QFQ^T] = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & 0 \\ F_{21} & F_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [F] \quad (6.157)$$

αφετέρου δε ότι,

$$[Q\sigma Q^T] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & -\sigma_{13} \\ F_{21} & F_{22} & -\sigma_{23} \\ -\sigma_{13} & -\sigma_{23} & 1 \end{bmatrix} \quad (6.158)$$

Οπότε

$$Q\sigma Q^T = \mathfrak{I}(QFQ^T) = \mathfrak{I}(F) = \sigma \Rightarrow \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0 \quad (6.159)$$

Άρα σε μία επίπεδη παραμόρφωση ενός ισότροπου υλικού η ορθή τάση που δρα σε επίπεδα παράλληλα προς το επίπεδο παραμορφώσεως είναι κύρια τάση.