

## 5. ΧΡΟΝΙΚΕΣ ΥΛΙΚΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ ΚΑΙ ΡΥΘΜΟΙ

5.	ΧΡΟΝΙΚΕΣ ΥΛΙΚΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ ΚΑΙ ΡΥΘΜΟΙ.....	149
5.1	Η ταχύτητα του υλικού σημείου	151
5.2	Η υλική χρονική παράγωγος	153
5.3	Η σχετική βαθμίδα παραμορφώσεως	157
5.4	Παράγωγος στερεού σώματος ή παράγωγος Zaremba-Jaumann	163
5.5	Θεωρία πλαστικής παραμορφώσεως κατά Nadai	167

Η χρονική μεταβολή κάθε ποσότητας που περιγράφει μια ιδιότητα ενός Συνεχούς Μέσου, η οποία αναφέρεται στα υλικά σημεία (ΥΣ) του καλείται *υλική χρονική παράγωγος*<sup>1</sup>. Π.χ. η στιγμιαία αλλαγή της θέσεως ενός ΥΣ καθορίζεται από την ταχύτητά του, ενώ η αλλαγή της ταχύτητάς του δίδεται από την επιτάχυνση αυτού. Όπως θα δούμε παρακάτω η ταχύτητα και η επιτάχυνση είναι υλικές χρονικές παράγωγοι της μετατοπίσεως και της ταχύτητας του ΥΣ αντιστοίχως. Κάνοντας χρήση του ορισμού του αντικειμενικού τανυστή μπορούμε να ορίσουμε επίσης την έννοια της *αντικειμενικής χρονικής παραγωγού*. Στο Κεφάλαιο αυτό συνοψίζουμε τη μαθηματική περιγραφή των υλικών και αντικειμενικών χρονικών παραγωγών και ρυθμών (μεταβολής) τανυστικών μεγεθών.

---

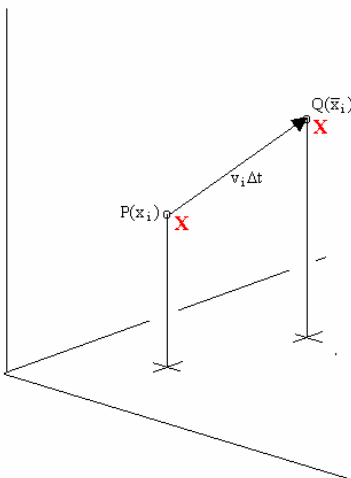
<sup>1</sup> Αγγλ. *material time derivative*

© 5. ΧΡΟΝΙΚΕΣ ΥΛΙΚΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ ΚΑΙ ΡΥΘΜΟΙ, 2008

Ιωάννης Γ. Βαρδουλάκης, Dr-Ing., Καθηγητής της Μηχανικής στο Ε.Μ. Πολυτεχνείο

Τ.Θ. 144, Παιανία 190-02, <http://geolab.mechan.ntua.gr/>, [I.Vardoulakis@mechan.ntua.gr](mailto:I.Vardoulakis@mechan.ntua.gr)

### 5.1 Η ταχύτητα του υλικού σημείου



Εικ. 5-1: Μετατόπιση του ΥΣ στο χώρο σε διάστημα χρόνου  $\Delta t$

Έστω ένα ΥΣ  $X(\xi_k)$ , το οποίο τη χρονική στιγμή  $t_1 = t$  βρίσκεται στη θέση του σημείου  $P(x_i)$  του χώρου. Η ταχύτητα  $v_i$  δίδει τη νέα θέση  $Q(\bar{x}_i)$  του υλικού σημείου  $X(\xi_k)$  τη χρονική στιγμή  $\bar{t} = t + \Delta t$  (Εικ. 5-1),

$$\Delta x_i = \bar{x}_i - x_i = \chi_i(\xi_k, \bar{t}) - \chi_i(\xi_k, t) \approx v_i \Delta t \quad (5.1)$$

όπου

$$v_i = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta x_i}{\Delta t} \right) = \left. \frac{\partial \chi_i(\xi_k, \bar{t})}{\partial \bar{t}} \right|_{\bar{t}=t} \quad (5.2)$$

Επειδή η εκάστοτε θέση του υλικού σημείου  $X(\xi_k)$  μπορεί να δοθεί μέσω του διανύσματος μετατοπίσεως αυτού, η ταχύτητα μπορεί να εκφρασθεί και ως η υλική παράγωγος της μετατοπίσεως,

$$v_i = \frac{\partial \chi_i(\xi_k, \bar{t})}{\partial \bar{t}} = \frac{\partial}{\partial t} [\chi_i(\xi_k, t) - \xi_i] = \frac{\partial}{\partial t} u_i^L(\xi_k, t) \quad (5.3)$$

ή

$$v_i = v_i^L(\xi_k, t) \quad (5.4)$$

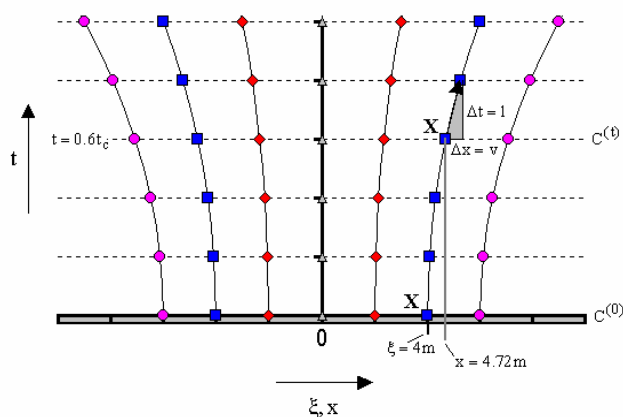
Λαμβάνοντας τώρα υπ' όψιν την περιγραφή της κινήσεως κατά Euler,

$$\xi_i = \chi_i^E(x_k, t) \equiv \chi_i^{-1}(x_k, t) \quad (5.5)$$

παρατηρούμε ότι η ταχύτητα ενός υλικού σημείου τη χρονική στιγμή  $t$  μπορεί να γραφεί ως συνάρτηση των χωρικών συντεταγμένων που κατέχει του εν λόγω υλικό σημείο τη στιγμή  $t$

$$v_i = v_i^L(\xi_k, t) = v_i^L(\chi_k^E(x_l, t), t) = v_i^E(x_k, t) \quad (5.6)$$

### Παράδειγμα



Εικ. 5-2: Διαστολή μονοδιάστατου συνεχούς στο χώρο των γεγονότων

Έστω ότι τα ΥΣ ενός μονοδιάστατου Συνεχούς Μέσου κινούνται βάσει ενός του νόμου (Εικ. 5-2)

$$x = \chi^L(\xi, t) = \xi \left( 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{t}{t_c} \right)^2 \right), \quad t_c = \text{σταθ.}$$

⇔

$$\xi = \chi^E(x, t) = \frac{x}{1 + \frac{1}{2} \left( \frac{t}{t_c} \right)^2}$$

Παρατηρούμε ότι για  $t = 0$ ,  $x = \xi$ , οπότε η αρχική θέση των υλικών σημείων είναι και η θέση αναφοράς της παραπάνω περιγραφής. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα έχουμε επίσης την εξής έκφραση για τη μετατόπιση

$$u^L = u(\xi, t) = \frac{1}{2} \xi \left( \frac{t}{t_c} \right)^2$$

Η κίνηση ενός μονοδιάστατου Συνεχούς παρίσταται καμιά φορά σε ένα χωρο-χρονικό διάγραμμα  $O(x,t)$ . Ο χώρος αυτός καλείται χώρος των *γεγονότων*, αφού κάθε ζεύγος τιμών  $(x,t)$  στο χώρο αυτό θα ονομασθεί *γεγονός*<sup>2</sup>. Η καμπύλη  $x = \chi^L(\xi, t)$  στο χωρόχρονο ονομάζεται *γραμμή ζωής*<sup>3</sup> του εκάστοτε υλικού σημείου  $X(\xi)$ . Άρα από τον άξονα  $t=0$  θα ξεκινήσουν οι γραμμές ζωής των διαφόρων υλικών σημείων, που τη χρονική στιγμή  $t=0$  κατείχαν τη θέση  $x = \xi$  (θέση αναφοράς). Στο συγκεκριμένο παράδειγμα παρατηρούμε ότι οι γραμμές ζωής είναι αποκλίνουσες παραβολές, που σημαίνει ότι συν τω χρόνω οι σχετικές αποστάσεις των υλικών σημείων αυξάνονται. Η κίνηση αυτή χαρακτηρίζεται ως μία *διαστολή*. Με τη κίνηση των υλικών σημείων δεδομένη, μπορούμε κατ' αρχήν εύκολα να υπολογίσουμε την ταχύτητά τους, ως συνάρτηση της θέσεως των υλικών σημείων στην απεικόνιση αναφοράς,

$$v^L = \frac{\partial \chi^L}{\partial t} = \frac{\partial u^L}{\partial t} = \xi \frac{t}{t_c^2}$$

Στο παράδειγμα του σχήματος η απεικόνιση αναφοράς  $C^{(0)}$  συμπίπτει με τον άξονα ( $t=0$ ). Συμφώνως προς τα παραπάνω η ταχύτητα όμως μπορεί να θεωρηθεί και ως συνάρτηση της θέσης του υλικού σημείου στη τρέχουσα απεικόνιση,

$$v^E = \frac{\frac{t}{t_c} x}{1 + \frac{1}{2} \left( \frac{t}{t_c} \right)^2 t_c}$$

Παρατηρούμε τέλος ότι η ταχύτητα συμπίπτει με την αντίστροφη κλίση της γραμμής ζωής που περνάει από το εν λόγω γεγονός.

## 5.2 Η υλική χρονική παράγωγος

Θεωρούμε ένα υλικό σώμα, του οποίου το τυχόν ΥΣ  $X$  τη χρονική στιγμή  $t$  καταλαμβάνει τη θέση με τη συντεταγμένη

$$x = \chi^L(\xi, t) \tag{5.7}$$

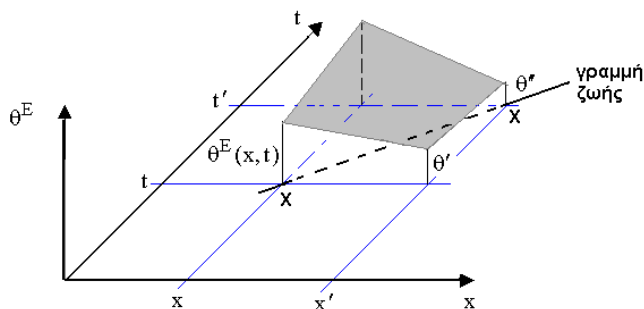
Επίσης, δεχόμεθα ότι το σώμα αυτό θερμαίνεται και ότι τη δεδομένη χρονική στιγμή  $t$  η κατανομή της θερμοκρασίας κατά μήκος του σώματος είναι τέτοια ώστε στη θέση  $x$  παρατηρείται η θερμοκρασία

$$\theta = \Theta^E(x, t) \tag{5.8}$$

<sup>2</sup> Αγγλ. *event*

<sup>3</sup> Αγγλ. *lifeline*

Θέλουμε τώρα να υπολογίσουμε την αλλαγή της θερμοκρασίας τη χρονική στιγμή  $t' = t + \Delta t$ , όπως αυτή παρατηρείται από έναν παρατηρητή που κινείται μαζί με το ΥΣ  $A(\xi)$ , δηλαδή μας ενδιαφέρει η αλλαγή της θερμοκρασίας στο υλικό εν λόγω ΥΣ (Εικ. 5-3).



Εικ. 5-3: Μεταβολή του θερμοκρασιακού πεδίου (στο χωρόχρονο).

Κατ' αρχήν σημειώνουμε ότι το ΥΣ μετατίθεται από τη θέση  $x$  στη θέση

$$x' = \chi^L(\xi, t') = \chi^L(\xi, t + \Delta t) = \chi^L(\xi, t) + \left. \frac{\partial \chi^L}{\partial t} \right|_{\xi} \Delta t \quad (5.9)$$

Με την παρατήρηση ότι

$$\left. \frac{\partial \chi^L}{\partial t} \right|_{\xi} = v^L(\xi, t) = v^E(x, t) \quad (5.10)$$

έχουμε τελικά

$$x' = x + \Delta x \quad , \quad \Delta x = \Delta u = v^E(x, t) \Delta t \quad (5.11)$$

Η θερμοκρασία αντιστοίχως μεταβάλλεται ως εξής: Στη θέση  $x$  τη χρονική στιγμή  $t' = t + \Delta t$  η θερμοκρασία παίρνει την τιμή

$$\theta' = \theta + \Delta \theta \quad (5.12)$$

όπου

$$\Delta \theta = \left. \frac{\partial \Theta^E}{\partial t} \right|_x \Delta t \quad (5.13)$$

Η ποσότητα  $\Delta \theta$  δίνει την αλλαγή της θερμοκρασίας σε ένα συγκεκριμένο σημείο του χώρου  $x$  και συνιστά ως εκ τούτου την τοπική μεταβολή της ποσότητας  $\theta$  (Εικ. 5-3). Στη θέση τώρα

$$x' = x + \Delta u = x + v\Delta t \quad (5.14)$$

τη χρονική στιγμή  $t' = t + \Delta t$  η θερμοκρασία έχει τη τιμή

$$\theta'' = \theta' + \delta\theta \quad (5.15)$$

όπου

$$\delta\theta = \left. \frac{\partial\Theta^E}{\partial x} \right|_t \Delta x = \left. \frac{\partial\Theta^E}{\partial x} \right|_t v^E(x,t)\Delta t \quad (5.16)$$

Η ποσότητα  $\delta\theta$  καλείται *όρος εκ μεταφοράς ή μεταθετικός όρος*, και συνιστά τη μεταβολή που αντιλαμβάνεται ένας παρατηρητής σε ένα μόνιμο πεδίο, όταν αυτός κινείται μέσα στο πεδίο με την ταχύτητα  $v^E$ . Άρα για έναν παρατηρητή που παρακολουθεί την κίνηση του υλικού σημείου  $A(\xi)$  η αλλαγή της θερμοκρασίας είναι

$$D\theta = \theta'' - \theta \quad (5.17)$$

και όπως δείχνει η εξίσωση

$$D\theta = (\theta'' - \theta') + (\theta' - \theta) = \delta\theta + \Delta\theta \quad (5.18)$$

η διαφορά αυτή γενικώς συντίθεται τόσο από ένα όρο που αφορά στη *τοπική* μεταβολή του θεωρούμενου πεδίου όσο και από ένα όρο *εκ μεταφοράς* (του), δηλαδή,

$$D\theta = \left. \frac{\partial\Theta^E}{\partial t} \right|_x \Delta t + \left. \frac{\partial\Theta^E}{\partial x} \right|_t v^E(x,t)\Delta t \quad (5.19)$$

Πράγματι, αν η θερμοκρασιακή βαθμίδα είναι πτωτική προς τα δεξιά (όπως στο παραπάνω παράδειγμα του θερμαινόμενου σώματος, Εικ. 5-3), τότε για τον παρατηρητή που κινείται με το υλικό σημείο προς τα δεξιά η πτώση της θερμοκρασίας,  $(\theta - \theta'')$ , είναι πιο μεγάλη από αυτή που μετράται τοπικά,  $(\theta - \theta')$ . Η ποσότητα

$$\dot{\theta} \equiv \frac{D\theta}{Dt} := \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{D\theta}{\Delta t} \right) \Rightarrow \frac{D\theta}{Dt} = \frac{\partial\Theta^E}{\partial t} + \frac{\partial\Theta^E}{\partial x} v^E \quad (5.20)$$

καλείται *υλική χρονική παραγωγός*<sup>4</sup> του πεδίου  $\Theta^E(x,t)$ .

Ο υπολογισμός της υλικής χρονικής παραγωγού μπορεί να γίνει για οποιοδήποτε φυσικό μέγεθος. Π.χ. η επιτάχυνση των υλικών σημείων μπορεί να υπολογισθεί και κατ' ευθείαν από τη σχέση:

<sup>4</sup> Αγγλ. *material time derivative*

$$a^E = \dot{a}^E = \frac{Dv^E}{Dt} = \frac{\partial v^E}{\partial t} + \frac{\partial v^E}{\partial x} v^E \quad (5.21)$$

### Παράδειγμα

Έστω

$$v^E = \frac{xt}{t_c^2 + \frac{1}{2}t^2}$$

Τότε

$$a^E = \frac{x(t_c^2 + \frac{1}{2}t^2) - xt \cdot t}{\left(t_c^2 + \frac{1}{2}t^2\right)^2} + \frac{x}{t_c^2 + \frac{1}{2}t^2} \frac{t}{t_c^2 + \frac{1}{2}t^2} = \frac{x}{t_c^2 + \frac{1}{2}t^2}$$

Οπότε επαληθεύουμε τον τύπο,

$$a^L = a^E = \frac{Dv^E}{Dt} \quad (5.22)$$

### Άσκηση

Η κίνηση ενός μονοδιάστατου Συνεχούς δίδεται από την εξής περιγραφή κατά Lagrange,

$$x = \chi^L(\xi, t) = \frac{\xi}{1 + \xi t} \quad (\xi > 0)$$

Να υπολογισθούν οι περιγραφές κατά Lagrange της ταχύτητας  $v^L(\xi, t)$  και της επιτάχυνσης  $a^L(\xi, t)$ . Να βρεθεί η περιγραφή της ταχύτητας  $v^E(x, t)$  και της επιτάχυνσης  $a^E(\xi, t)$  κατά

Euler ., Να επαληθευθεί ότι η επιτάχυνση δίδεται από τον τύπο  $a^E = \frac{Dv^E}{Dt}$ .

### Σύνοψη

Η υλική χρονική παράγωγος μιας ποσότητας  $\phi = \phi^L(\xi_i, t)$  συμβολίζεται ως

$$\dot{\phi} \equiv \frac{D\phi}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} \phi^L(\xi_i, t) \quad (5.23)$$

Η υλική χρονική παράγωγος αντιδιαστέλλεται από την τοπική χρονική παράγωγο μιας ποσότητας  $\phi = \phi^E(x_i, t)$ ,



$$\frac{\delta\phi}{\delta t} = \frac{\partial}{\partial t} \phi^E(x_i, t) \quad (5.24)$$

Η υλική παράγωγος μπορεί να υπολογισθεί κατ' ευθείαν με δεδομένη την περιγραφή κατά Euler

$$\frac{D\phi}{Dt} = \frac{\partial\phi^E}{\partial t} + v_k^E \frac{\partial\phi^E}{\partial x_k} \quad (5.25)$$

ή συντομογραφικά:

$$\frac{D\phi}{Dt} = \frac{\delta\phi}{\delta t} + v_k \frac{\partial\phi}{\partial x_k} \quad (5.26)$$

$$\dot{\phi} = \partial_t \phi + v_k \partial_k \phi \quad (5.27)$$

$$\dot{\phi} = \partial_t \phi + \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}(\phi) \quad (5.28)$$

Στις παραπάνω εκφράσεις ο πρώτος όρος  $\partial_t \phi^E$  καλείται *τοπικός*, ενώ ο δεύτερος όρος  $v_k \partial_k \phi^E$  καλείται *μεταθετικός* ή όρος εκ μεταφοράς.

Παρατηρούμε τέλος ότι όταν η ταχύτητα των ΥΣ ενός Συνεχούς καθώς και η βαθμίδα ενός μεγέθους στο χώρο είναι απειροστικές ποσότητες, τότε η συμβολή των όρων εκ μεταφοράς μπορεί να παραλειφθεί,

$$\dot{\phi} \approx \frac{\partial\phi^E}{\partial t} \quad (5.29)$$

### 5.3 Η σχετική βαθμίδα παραμορφώσεως

Οι συντεταγμένες  $\bar{x}_i$  ενός ΥΣ  $X(\xi_k)$  στην απεικόνιση  $C^{(\bar{t})}$  ενός σώματος  $\mathbf{B}$  τη χρονική στιγμή  $\bar{t} \geq t$  μπορούν να θεωρηθούν ως συναρτήσεις των συντεταγμένων του  $X(\xi_k)$  στη τρέχουσα απεικόνιση  $C^{(t)}$  τη χρονική στιγμή  $t \geq 0$ ,

$$\bar{x}_i = \chi_i^{(t)}(x_k, \bar{t}) \quad (5.30)$$

έτσι ώστε

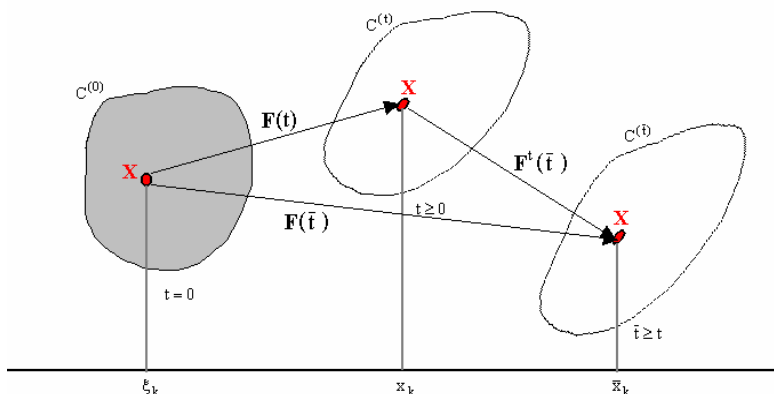
$$\chi_i^{(t)}(x_k, t) = x_i \quad (5.31)$$

Αντιστοίχως ορίζουμε τη σχετική βαθμίδα παραμορφώσεως<sup>5</sup>

<sup>5</sup> Αγγλ. *relative deformation gradient*

$$F'_{ij}(x_k, \bar{t}) = \frac{\partial}{\partial x_j} \chi_i^{(t)}(x_k, \bar{t}) \quad (5.32)$$

που περιγράφει την παραμόρφωση  $C^{(t)} \rightarrow C^{(\bar{t})}$  (Εικ. 5-4).



Εικ. 5-4: Ανάλυση της βαθμίδα παραμορφώσεως με ενδιάμεση στάση τη θέση  $C^{(t)}$

Συνεπώς η βαθμίδα παραμορφώσεως

$$F'_{ij}(\xi_k, \bar{t}) = \frac{\partial}{\partial \xi_j} \chi_i(\xi_k, \bar{t}) \quad (5.33)$$

που περιγράφει την παραμόρφωση  $C^{(0)} \rightarrow C^{(\bar{t})}$  μπορεί να αναλυθεί ως γινόμενο δύο δράσεων ως εξής

$$F'_{ij}(\xi_k, \bar{t}) = \frac{\partial}{\partial \xi_j} \chi_i(\xi_k, \bar{t}) = \frac{\partial}{\partial x_k} \chi_i^{(t)}(x_k, \bar{t}) \frac{\partial}{\partial \xi_j} \chi_k(\xi_k, t) \quad (5.34)$$

ή

$$F'_{ij}(\xi_k, \bar{t}) = F'_{ik}(x_k, \bar{t}) F'_{kj}(\xi_k, t) \rightarrow \mathbf{F}(\bar{t}) = \mathbf{F}^{(t)}(\bar{t}) \mathbf{F}(t) \quad (5.35)$$

Δηλαδή ως επαλληλία των δράσεων, (Εικ. 5-4)

- $C^{(0)} \rightarrow C^{(t)}$ , που περιγράφεται από την  $F'_{ij}(\xi_k, t)$
- $C^{(t)} \rightarrow C^{(\bar{t})}$ , που περιγράφεται από την  $F'_{ij}(x_k, \bar{t})$

Παρατηρούμε τώρα ότι η ταχύτητα ενός ΥΣ  $X(\xi_k)$ , το οποίο τη χρονική στιγμή  $t$  βρίσκεται στη θέση με συντεταγμένες  $x_k$ , δίδεται από τη σχέση

$$v_i = \frac{\partial}{\partial t} \chi_i^{(t)}(x_k, \bar{t}) = v_i^{(t)}(x_k, \bar{t}) \quad (5.36)$$

Θεωρούμε τώρα δύο γειτονικά ΥΣ  $X(\xi_k)$  και  $Y(\xi_k)$ , τα οποία στην τρέχουσα απεικόνιση  $C^{(t)}$  κατέχουν αντιστοίχως θέσεις με συντεταγμένες  $x_k$  και  $y_k$ , ενώ στην απεικόνιση  $C^{(\bar{t})}$  κατέχουν θέσεις με συντεταγμένες  $\bar{x}_k$  και  $\bar{y}_k$  (Εικ. 5-5).

Έστω,

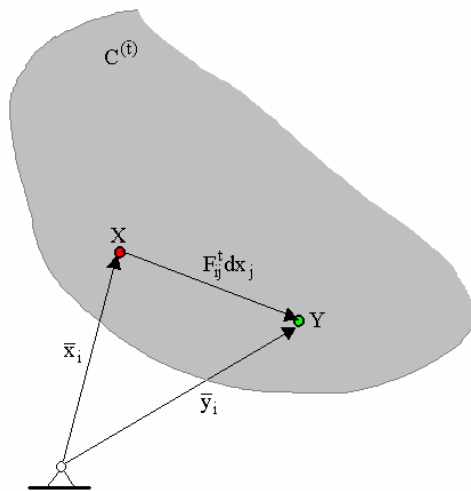
$$y_i = x_i + dx_i \quad (5.37)$$

οπότε με

$$\bar{x}_i = \chi_i^{(t)}(x_k, \bar{t}) \quad (5.38)$$

παίρνουμε ότι (Εικ. 5-5),

$$\begin{aligned} \bar{y}_i &= \chi_i^{(t)}(y_k, \bar{t}) = \chi_i^{(t)}(x_k + dx_k, \bar{t}) \\ &= \chi_i^{(t)}(x_k, \bar{t}) + \frac{\partial}{\partial x_j} \chi_i^{(t)}(x_k, \bar{t}) dx_j \\ &= \bar{x}_i + F_{ij}' dx_j \Rightarrow \bar{y}_i - \bar{x}_i = F_{ij}' dx_j \end{aligned} \quad (5.39)$$



Εικ. 5-5: Η σχετική βαθμίδα παραμορφώσεως

Ο ρυθμός με τον οποίο αλλάζει η απόσταση των γειτονικών αυτών ΥΣ εκφράζει τη σχετική ταχύτητα με την οποία κινούνται αυτά. Αυτό καθορίζεται από το ρυθμό μεταβολής της σχετικής βαθμίδας παραμορφώσεως,

$$\left. \frac{\partial}{\partial \bar{t}} (F_{ij}^t(x_k, \bar{t}) dx_j) \right|_{\bar{t}=t} \equiv \dot{F}_{ij}^t(x_k, t) dx_j \quad (5.40)$$

Ο ρυθμός μεταβολής της σχετικής βαθμίδας παραμορφώσεως στην περιοχή ενός ΥΣ Χ στην τρέχουσα απεικόνιση του θεωρούμενου σώματος συμπίπτει με τη *βαθμίδα της ταχύτητας*<sup>6</sup> στην απεικόνιση αυτή

$$\begin{aligned} \dot{F}_{ij}^t(x_k, t) &= \left. \frac{\partial}{\partial \bar{t}} \frac{\partial}{\partial x_j} \chi_i^{(t)}(x_k, \bar{t}) \right|_{\bar{t}=t} = \left. \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial \bar{t}} \chi_i^{(t)}(x_k, \bar{t}) \right|_{\bar{t}=t} \\ &= \left. \frac{\partial}{\partial x_j} v_i^{(t)}(x_k, \bar{t}) \right|_{\bar{t}=t} = \frac{\partial}{\partial x_j} v_i^E(x_k, t) \end{aligned} \quad (5.41)$$

Εν συντομία η βαθμίδα της ταχύτητας στην τρέχουσα απεικόνιση  $C^{(t)}$  συμβολίζεται ως,

$$L_{ij} = \dot{F}_{ij}^t(x_k, t) = \frac{\partial}{\partial x_j} v_i^E(x_k, t) \quad (5.42)$$

Θεωρούμε τώρα τη δεξιά πολική ανάλυση της σχετικής βαθμίδας παραμορφώσεως σε σχετική στροφή και σχετικό δεξιό τανυστή παραμορφώσεως,

$$F_{ij}^t(\bar{t}) = R_{ik}^t(\bar{t}) U_{kj}^t(\bar{t}) \quad (5.43)$$

όπου ο μεν  $[R^t]$  είναι ορθογώνιος και αντιστοιχεί σε στροφή,

$$[R^t]^T [R^t] = [R^t] [R^t]^T = [I], \det[R^t] = +1 \quad (5.44)$$

ο δε  $[U^t]$  είναι συμμετρικός, θετικώς ορισμένος και αντιστοιχεί σε καθαρή παραμόρφωση

$$[U^t]^T = [U^t] = [I], \det[U^t] > 0 \quad (5.45)$$

Οι ρυθμοί μεταβολής των τανυστών αυτών ορίζονται ως εξής (ιδέ ανωτέρω)

$$\begin{aligned} \dot{F}_{ij}^t(x_k, t) &= \left. \frac{\partial}{\partial \bar{t}} (F_{ij}^t(x_k, \bar{t})) \right|_{\bar{t}=t} \\ \dot{R}_{ij}^t(x_k, t) &= \left. \frac{\partial}{\partial \bar{t}} (R_{ij}^t(x_k, \bar{t})) \right|_{\bar{t}=t} \\ \dot{U}_{ij}^t(x_k, t) &= \left. \frac{\partial}{\partial \bar{t}} (U_{ij}^t(x_k, \bar{t})) \right|_{\bar{t}=t} \end{aligned} \quad (5.46)$$

Οπότε παίρνουμε την εξής έκφραση για τη βαθμίδα της ταχύτητας στην τρέχουσα απεικόνιση

<sup>6</sup> Αγγλ. *velocity gradient*

$$\begin{aligned}
L_{ij} &= \dot{R}_{ik}^t(\bar{t}) \Big|_{\bar{t}=t} U_{kj}^t(t) + R_{ik}^t(t) \dot{U}_{kj}^t(\bar{t}) \Big|_{\bar{t}=t} \\
&= \dot{R}_{ik}^t(t) \delta_{kj} + \delta_{ik} \dot{U}_{kj}^t(t) \Rightarrow L_{ij} = \dot{R}_{ij}^t(t) + \dot{U}_{ij}^t(t)
\end{aligned}
\tag{5.47}$$

Επειδή τώρα για κάθε  $\bar{t} \geq t$  ισχύει ότι,

$$[R^t]^T [R^t] = [I] \Rightarrow
\tag{5.48}$$

$$[\dot{R}^t]^T [R^t] + [R^t]^T [\dot{R}^t] = [0]$$

Από την Εξ.(5.48) έπεται ότι ο  $[\dot{R}^t(t)]$  είναι αντισυμμετρικός. Πράγματι με την παρατήρηση ότι,

$$[R^t(t)] = [R^t(t)]^T = [I]
\tag{5.49}$$

από την Εξ. (5.48) έπεται ότι

$$[\dot{R}^t(t)] = -[\dot{R}^t(t)]^T \rightarrow \dot{R}_{ij}^t(t) = -\dot{R}_{ji}^t(t)
\tag{5.50}$$

Τέλος παρατηρούμε ότι επειδή ο  $[U^t]$  είναι συμμετρικός τότε και ο ρυθμός του  $[\dot{U}^t]$  είναι επίσης συμμετρικός,

$$[\dot{U}^t(t)] = [\dot{U}^t(t)]^T \rightarrow \dot{U}_{ij}^t(t) = \dot{U}_{ji}^t(t)
\tag{5.51}$$

Από τις παραπάνω Εξ. (5.50) και (5.51) προκύπτει η προσθετική ανάλυση της βαθμίδας της ταχύτητας σε συμμετρικό και αντισυμμετρικό μέρος

$$L_{ij} = D_{ij} + W_{ij}
\tag{5.52}$$

Το συμμετρικό μέρος της βαθμίδας της ταχύτητας καλείται *ρυθμός παραμορφώσεως*<sup>7</sup>,

$$D_{ij} = \dot{U}_{ij}^t(t) = \frac{1}{2}(L_{ij} + L_{ji}) = \frac{1}{2}(\partial_i v_j + \partial_j v_i)
\tag{5.53}$$

Το αντισυμμετρικό της μέρος βαθμίδας της ταχύτητας καλείται *στροβιλισμός*<sup>8</sup>,

$$W_{ij} = \dot{R}_{ij}^t(t) = \frac{1}{2}(L_{ij} - L_{ji}) = \frac{1}{2}(\partial_i v_j - \partial_j v_i)
\tag{5.54}$$

<sup>7</sup> Αγγλ. *rate of deformation*

<sup>8</sup> Αγγλ. *spin*

### Σημείωση

Καμία φορά ο ρυθμός παραμορφώσεως  $\mathbf{D}$  συγγέεται με την υλική χρονική παράγωγο του απειροστικού τανυστή των τροπών  $\dot{\mathbf{E}}$ . Αυτό βεβαίως γενικώς δεν είναι ορθό. Για να το αιτιολογήσουμε, παρατηρούμε ότι,

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i^L}{\partial \xi_j} + \frac{\partial u_j^L}{\partial \xi_i} \right) \quad (5.55)$$

και

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_i^L}{\partial \xi_j} &= \frac{\partial}{\partial \xi_j} \frac{\partial}{\partial t} \chi_i(\xi_k, t) = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \xi_j} (\xi_i + u_i^L(\xi_k, t)) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left( \delta_{ij} + \frac{\partial}{\partial \xi_j} u_i^L(\xi_k, t) \right) = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \xi_j} u_i^L(\xi_k, t) \end{aligned} \quad (5.56)$$

Άρα,

$$\begin{aligned} \dot{E}_{ij} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i^L}{\partial \xi_j} + \frac{\partial v_j^L}{\partial \xi_i} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i^E}{\partial x_k} \frac{\partial \chi_k^{-1}}{\partial \xi_j} + \frac{\partial v_j^E}{\partial x_k} \frac{\partial \chi_k^{-1}}{\partial \xi_i} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i^E}{\partial x_k} \left( \delta_{kj} + \frac{\partial u_k^E}{\partial \xi_j} \right) + \frac{\partial v_j^E}{\partial x_k} \left( \delta_{kj} + \frac{\partial u_k^E}{\partial \xi_i} \right) \right) \end{aligned} \quad (5.57)$$

ή

$$\dot{E}_{ij} = D_{ij} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i^E}{\partial x_k} \frac{\partial u_k^E}{\partial \xi_j} + \frac{\partial v_j^E}{\partial x_k} \frac{\partial u_k^E}{\partial \xi_i} \right) \quad (5.58)$$

Προφανώς όταν οι ποσότητες που εμφανίζονται στην Εξ. (5.58) σε παρένθεση είναι απειροστικές, τότε

$$\dot{E}_{ij} \approx D_{ij} \quad (5.59)$$

### Ασκήσεις

1. Δίδεται η περιγραφή κατά Lagrange μιας επίπεδης παραμορφώσεως,

$$x_1 = (\xi_1 + at\xi_2) \quad , \quad x_2 = \xi_2 \quad , \quad x_3 = \xi_3$$

Να υπολογισθούν: α) Το πεδίο ταχυτήτων σε υλικές συντεταγμένες,  $v_i = v_i^L(\xi_k, t)$  και χωρικές συντεταγμένες,  $v_i = v_i^E(x_k, t)$ . β) Οι τανυστές  $\dot{E}_{ij}$ ,  $D_{ij}$  και  $W_{ij}$ .

2. Δίδεται το πεδίο ταχυτήτων σε καρτεσιανή κατά Euler περιγραφή,

$$v_1 = cx_1, \quad v_2 = -cx_2, \quad v_3 = 0$$

Να υπολογισθούν: α) Η συνάρτηση κινήσεως  $x_i = \chi_i(\xi_k, t)$  με την αρχική συνθήκη,

$$\xi_i = \chi_i(\xi_k, 0). \quad \beta) \text{ Η βαθμίδα παραμορφώσεως, } F_{ij} = \frac{\partial}{\partial \xi_j} \chi_i(\xi_k, t).$$

## 5.4 Παράγωγος στερεού σώματος ή παράγωγος Zaremba-Jaumann

Μία μεγάλη κλάση καταστατικών εξισώσεων στην Μηχανική των Συνεχών Μέσων γράφονται με μορφή εξελικτικών εξισώσεων σε μία κατά Euler περιγραφή. Π.χ. για την τάση  $\sigma$  έχουμε εξισώσεις της μορφής

$$\dot{\sigma} = T(\sigma, D, \dots) \quad (5.60)$$

Όπου η ταυυστική συνάρτηση  $T(\cdot, \cdot)$  θα μπορούσε να είναι μία ισότροπη συνάρτηση δύο ή και περισσοτέρων αντικειμενικών ταυυστών<sup>9</sup>. Ως εκ τούτου στην Εξ. (5.60) με  $\dot{\sigma}$  συμβολίζουμε μία *αντικειμενική χρονική παράγωγο* της τάσεως  $\sigma$  την οποία και ορίζουμε παρακάτω και την οποία αντιδιαστέλλουμε από την υλική χρονική παράγωγο. Ειδικότερα θεωρούμε εδώ μία ειδική περίπτωση αντικειμενικής χρονικής παραγωγού, η οποία προκύπτει από μία κατά Euler περιγραφή σε σχέση με ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων  $O(x_i)$  το οποίο περιστρέφεται στον χώρο κατά τέτοιο τρόπο ώστε να παρακολουθεί την στροφή στερεού σώματος της περιοχής ενός ΥΣ. Ένα τέτοιο σύστημα συντεταγμένων καλείται *κινηματικώς προτιμητέο*<sup>10,11</sup>.

Έστω η πολική ανάλυση της σχετικής βαθμίδας παραμορφώσεως,

$$F_{ij}^t(\bar{t}) = R_{ik}^t(\bar{t}) U_{kj}^t(\bar{t}) \quad (5.61)$$

Οι συντεταγμένες ενός σημείου στο χώρο ως προς το σταθερό στο χώρο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων  $O(x_i)$  και ως προς το κινηματικώς προτιμητέο σύστημα συντεταγμένων  $O(x_{i'})$  συνδέονται με τις παρακάτω σχέσεις

$$x_{i'} = Q_{i'k}(\bar{t}) x_k \quad (5.62)$$

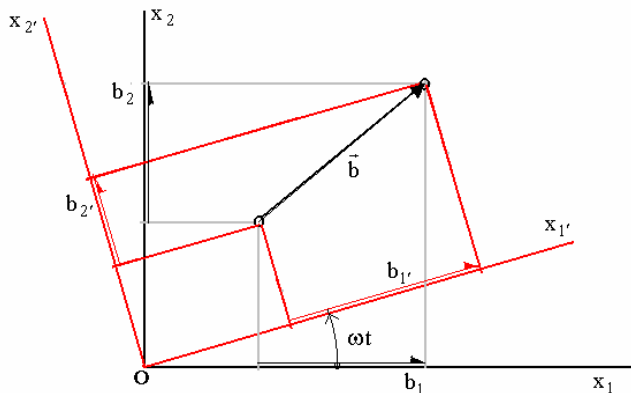
όπου ο ορθογώνιος μετασχηματισμός που περιγράφει τη στροφή του  $O(x_{i'})$  ως προς το  $O(x_i)$  συμπίπτει ανά πάσα στιγμή με το αντίστροφο (ανάστροφο) του ταυυστή στροφής της σχετικής παραμορφώσεως. Δηλαδή δεχόμαστε ότι

<sup>9</sup> A.J.M. Spencer, Theory of invariants, in: C. Eringen (Ed.), Part III of Continuum Physics, Academic Press, New York and London, 1971.

<sup>10</sup> Αγγλ. *kinematically preferred*

<sup>11</sup> T.Y. Thomas, *Plastic Flow and Fracture in Solids*, Academic Press, 1961

$$Q_{ij}(\bar{t}) = R'_{ji}(\bar{t}) \quad (5.63)$$



Εικ. 5-6: Οι συνιστώσες του διανύσματος  $\mathbf{b}$  στα δύο συστήματα αναφοράς

Θεωρούμε τώρα ένα αντικειμενικό διάνυσμα  $\mathbf{b}(t)$ , το οποίο στα συστήματα  $O(x_i)$  και  $O(x'_i)$  έχει αντιστοίχως τις συντεταγμένες  $b_i$  και  $b'_i$ , όπου (Εικ. 5-6)

$$b'_i = Q_{i'k} b_k \quad (5.64)$$

Χάριν απλότητας θεωρούμε ένα διδιάστατο πρόβλημα. Έστω η απειροστική μετάβαση  $\bar{t} = t + \Delta t$ ,  $\Delta t \rightarrow 0$ , οπότε,

$$\begin{aligned} Q_{ij}(\bar{t}) &= R'_{ji}(\bar{t}) = R'_{ji}(t + \Delta t) \\ &= R'_{ji}(t) + \dot{R}'_{ji}(t)\Delta t \\ &= \delta_{ij} + W_{ji}\Delta t \end{aligned} \quad (5.65)$$

όπου

$$[W] = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\omega} \\ \dot{\omega} & 0 \end{bmatrix} \quad (5.66)$$

Από τις εξ. (5.64) ως (5.66) παίρνουμε,

$$b'_1 \approx b_1 + \dot{\omega} b_2 \Delta t \quad , \quad b'_2 \approx -\dot{\omega} b_1 \Delta t + b_2 \quad (5.67)$$

Παρατηρούμε τώρα ότι υλική χρονική παράγωγος του διανύσματος  $\mathbf{b}$  στο σύστημα  $O(x'_i)$  μπορεί να υπολογισθεί από την παραπάνω Εξ. (5.64) για τις συντεταγμένες του  $\mathbf{b}$  στο



σύστημα αυτό συναρτήσει του πίνακα στροφής και των συντεταγμένων του στο σταθερό σύστημα  $O(x_i)$ :

$$\dot{b}'_i = \dot{Q}'_{i'k} b_k + Q'_{i'k} \dot{b}_k \quad (5.68)$$

που αντιστοιχεί στο διάνυσμα

$$\vec{b}' = \dot{b}'_1 \vec{e}'_1 + \dot{b}'_2 \vec{e}'_2 \quad (5.69)$$

Με δεδομένες από τον παραπάνω τύπο τις συντεταγμένες της υλικής χρονικής παραγώγου του  $\mathbf{b}$  στο σύστημα  $O(x_i)$ , μπορούμε να υπολογίσουμε τις συντεταγμένες της παραγώγου αυτής στο σύστημα  $O(x_i)$ :

$$\begin{aligned} Q'_{i'k} \dot{b}'_i &= Q'_{i'k} \dot{Q}'_{i'l} b_l + Q'_{i'k} Q'_{i'l} \dot{b}_l \\ &= - Q'_{i'k} Q'_{i'l} \dot{b}_l + \dot{b}_k \end{aligned} \quad (5.70)$$

εφ' όσον,

$$\begin{aligned} Q'_{i'k}(\bar{t}) \quad Q'_{i'm}(\bar{t}) &= \delta_{im} \Rightarrow \\ Q'_{i'k}(\bar{t}) \quad \dot{Q}'_{i'm}(\bar{t}) &= - \dot{Q}'_{i'k}(\bar{t}) \quad Q'_{i'm}(\bar{t}) \end{aligned} \quad (5.71)$$

### Ορισμός

Η παράγωγος στερεού σώματος<sup>12</sup> ή παράγωγος κατά Zaremba-Jaumann του διανύσματος  $\mathbf{b}$ , ορίζεται από τη σχέση,

$$\overset{\circ}{b}_i = \frac{d_I}{dt} b_i = \lim_{\bar{t} \rightarrow t} \{ Q'_{i'k} \dot{b}'_i \} \quad (5.72)$$

και παριστάνει την υλική χρονική παράγωγο του διανύσματος  $\mathbf{b}$ , όπως αυτή μετράται από ένα παρατηρητή που περιστρέφεται μαζί με το κινηματικώς προτιμητέο σύστημα  $O(x_i)$ .

Από τον ορισμό Εξ. (5.72) και την Εξ. (5.70) παίρνουμε

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{b}_k &= \dot{b}_k - \dot{Q}'_{i'k} \delta_{i'l} b_l \\ &= \dot{b}_k - \dot{Q}'_{lk} b_l \end{aligned} \quad (5.73)$$

Επειδή ισχύει,

$$\dot{Q}'_{ij}(t) = \dot{R}^t_{ji}(t) = W_{ji} = -W_{ij} \quad (5.74)$$

<sup>12</sup> Αγγλ. *rigid-body derivative*

παίρνουμε τελικά,

$$\overset{\circ}{b}_k = \dot{b}_k + W_{lk}b_l = \dot{b}_k - W_{kl}b_l \quad (5.75)$$

Για να γενικεύσουμε το παραπάνω αποτέλεσμα ας θεωρήσουμε τώρα ένα αντικειμενικό τανυστή 2<sup>ος</sup> τάξεως, που ως γνωστόν μετασχηματίζεται ως εξής

$$\mathbf{T}' = \mathbf{Q}\mathbf{T}\mathbf{Q}^T, \quad \mathbf{T} = \mathbf{Q}^T\mathbf{T}\mathbf{Q} \quad (5.76)$$

ή

$$T'_{i'k'} = Q_{ij}T_{jl}Q_{k'l} \quad (5.77)$$

Χρονική παραγωγή της Εξ. (5.76), δίδει

$$\dot{\mathbf{T}}' = \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{T}\mathbf{Q}^T + \mathbf{Q}\dot{\mathbf{T}}\mathbf{Q}^T + \mathbf{Q}\mathbf{T}\dot{\mathbf{Q}}^T \quad (5.78)$$

Οπότε,

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}^T\dot{\mathbf{T}}'\mathbf{Q} &= \mathbf{Q}^T\dot{\mathbf{Q}}\mathbf{T}\mathbf{Q}^T + \mathbf{Q}^T\mathbf{Q}\dot{\mathbf{T}}\mathbf{Q}^T + \mathbf{Q}^T\mathbf{Q}\mathbf{T}\dot{\mathbf{Q}}^T \\ &= \dot{\mathbf{T}}\mathbf{Q}^T + \mathbf{T}\dot{\mathbf{Q}}^T - \dot{\mathbf{Q}}^T\mathbf{Q}\mathbf{T}\mathbf{Q}^T \end{aligned} \quad (5.79)$$

Αν υπολογίσουμε δε την παραπάνω έκφραση στο όριο  $\bar{\mathbf{t}} \rightarrow \mathbf{t}$ , τότε

$$\mathbf{Q}^T\dot{\mathbf{T}}'\mathbf{Q} \rightarrow \dot{\mathbf{T}} \quad (5.80)$$

και

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{Q}} &\rightarrow \mathbf{W}^T, \quad \mathbf{Q}^T \rightarrow \mathbf{I} \\ \mathbf{T}' = \mathbf{Q}\mathbf{T}\mathbf{Q}^T &\rightarrow \mathbf{T} \end{aligned} \quad (5.81)$$

οπότε,

$$\dot{\mathbf{T}} = \dot{\mathbf{T}} + \mathbf{T}\mathbf{W} - \mathbf{W}\mathbf{T} \quad (5.82)$$

ή

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{T}_{ij} &= \frac{dJ}{dt}T_{ij} = \dot{T}_{ij} + W_{kj}T_{ik} + W_{ki}T_{kj} \\ &= \dot{T}_{ij} + T_{ik}W_{kj} - W_{ik}T_{kj} \end{aligned} \quad (5.83)$$

Όπως αναφέραμε στην αρχή του κεφαλαίου αυτού, η αντικειμενική χρονική παράγωγος κατά Jaumann της τάσεως μπορεί να χρησιμοποιηθεί στη διατύπωση καταστατικών σχέσεων «εξελικτικού τύπου», οπότε παρατηρούμε ότι στον υπολογισμό της υλικής χρονικής

παραγώγου υπεισέρχονται: α) καταστατικοί όροι που εξαρτώνται π.χ. μη-γραμμικά από τη τάση και τον ρυθμό παραμορφώσεως και β) γεωμετρικοί όροι που εξαρτώνται γραμμικά από τη τάση και τον στροβιλισμό,

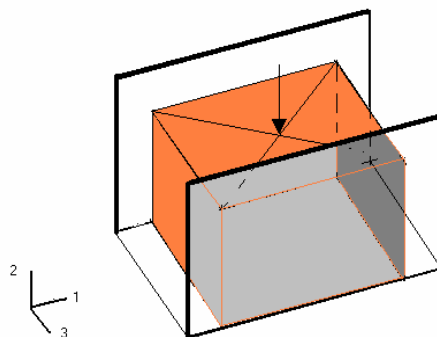
$$\dot{\sigma}_{ij} = \overset{\circ}{\sigma}_{ij} + W_{ik} \sigma_{kj} - \sigma_{ik} W_{kj} \quad (5.84)$$

Σε πολλές εφαρμογές οι γεωμετρικοί όροι θεωρούνται αμελητέοι. Υπάρχει όμως και μία κλάση προβλημάτων, όπως προβλήματα λυγισμού και γενικότερα διακλαδώσεως της ισορροπίας, όπου οι παρουσία των παραπάνω γεωμετρικών όρων είναι καθοριστική<sup>13,14</sup>.

### Ασκήσεις

1. Να εξεταστεί αν η υλική χρονική παράγωγος και η παράγωγος Jaumann ενός αντικειμενικού διανύσματος είναι αντικειμενικά διανύσματα.
2. Να υπολογισθεί η κατά Jaumann παράγωγος της τάσεως, στην περίπτωση επίπεδης εντάσεως και σε σύστημα κυρίων αξόνων συναρτήσει της υλικής της παραγώγου και του στροβιλισμού,  $\dot{\omega} = (\partial_2 v_1 - \partial_1 v_2) / 2$ .

## 5.5 Θεωρία πλαστικής παραμορφώσεως κατά Nadai



Εικ. 5-7: Δοκίμιο υλικού σχήματος ορθογώνιου παραλληλεπίπεδου τοποθετημένο σε διάταξη επίπεδης παραμορφώσεως

Θεωρούμε μια κλάση από επίπεδες παραμορφώσεις, που συνίστανται αρχικά από μία μονότονη ορθογώνια παραμόρφωση  $C^{(0)} \rightarrow C^{(t)}$  (Εικ. 5-7). Στο σύστημα κυρίων αξόνων της ορθογώνιας παραμορφώσεως η κατά Euler περιγραφή της κινήσεως δίδεται από τις παρακάτω σχέσεις,

<sup>13</sup> M.A. Biot, *Mechanics of Incremental Deformations*, Wiley, 1965.

<sup>14</sup> I. Vardoulakis and J. Sulem, *Bifurcation Analysis in Geomechanics*. Chapman & Hall, 1995

$$\xi_i = \frac{x_i}{1+a_{(i)}(t)} \quad (i=1,2) \quad , \quad \xi_3 = x_3 \quad (a_3 = 0)$$

$$\Rightarrow u_i = x_i - \xi_i = \frac{a_{(i)}(t)}{1+a_{(i)}(t)} x_i$$
(5.85)

Στο θεωρούμενο σύστημα η βαθμίδα παραμορφώσεως δίδεται από τον εξής διαγώνιο πίνακα,

$$[F] = \begin{bmatrix} 1+a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+a_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
(5.86)

Η μονοτονία της παραμορφώσεως εξασφαλίζεται από την παραδοχή ότι οι ποσότητες  $a_i(t)$  είναι μονοτόνως αύξουσες συναρτήσεις του χρόνου.

Παρατηρούμε ότι γενικώς σε ορθογώνιες παραμορφώσεις ο αριστερός λογαριθμικός τανυστής των τροπών κατά Hencky ταυτίζεται με τον δεξιό λογαριθμικό τανυστή των τροπών

$$\lambda^\ell = \ln V \quad , \quad V^2 = FF^T \Rightarrow$$
(5.87)

ή

$$[\bar{\lambda}^\ell] = \begin{bmatrix} \ln(1+a_1) & 0 & 0 \\ 0 & \ln(1+a_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = [\bar{\lambda}^r]$$
(5.88)

Παρατηρούμε τώρα ότι επειδή,

$$[V]^2 = [F] [F]^T \quad , \quad [\lambda^\ell] = [\ln V]$$
(5.89)

$$J = \det[F] = \frac{dV}{dV^{(0)}} = (1+a_1)(1+a_2)(1+a_3)$$

$$\Rightarrow \ln(J) = \sum_{i=1}^3 \ln(1+a_i) = \lambda_{kk}^\ell$$
(5.90)

Για την απλούστευση των υπολογισμών, στο συγκεκριμένο παράδειγμα δεχόμεθα ότι το υλικό είναι ασυμπίεστο, οπότε

$$J = \det[\bar{F}] = \frac{dV}{dV^{(0)}} = 1$$

$$\Rightarrow \lambda_{kk}^\ell = \ln(1) = 0$$
(5.91)

Στην περίπτωση αυτή ο λογαριθμικός τανυστής ταυτίζεται με τον αποκλίνοντα του,

$$\lambda_{ij}^{\ell} = \frac{1}{3} \lambda_{kk}^{\ell} \delta_{ij} + \ell_{ij} \Rightarrow \lambda_{ij}^{\ell} = \ell_{ij} \quad (\ell_{kk} = 0) \quad (5.92)$$

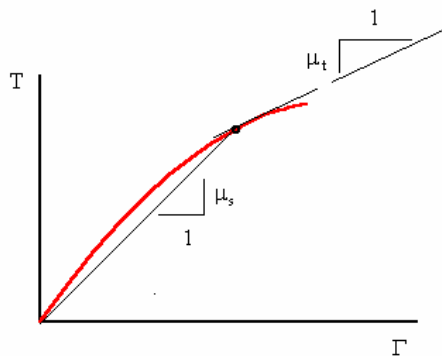
Αναλύουμε τώρα και την τάση σε ισότροπο και αποκλίνοντα τανυστή,

$$\sigma_{ij} = \sigma \delta_{ij} + s_{ij}, \quad \sigma = \frac{1}{3} \sigma_{kk} \quad (5.93)$$

Παρατηρούμε ότι σε ασυμπίεστα υλικά η μέση τάση  $\sigma$  είναι *κινηματικά αόριστη*, που σημαίνει ότι δεν προσδιορίζεται από κάποια καταστατική σχέση που συνδέει τις τάσεις με τις τροπές. Στην περίπτωση αυτή ισχύει ο *κινηματικός περιορισμός* που περιορίζει την κλάση των παραμορφώσεων σε εκείνες που διατηρούν τον όγκο του σώματος σταθερό, ενώ η μέση τάση  $\sigma$  προσδιορίζεται στην περίπτωση αυτή μόνο από τις συνοριακές συνθήκες.

Η απλούστερη καταστατική υπόθεση που συνήθως γίνεται για την περιγραφή της συμπεριφοράς ενός ασυμπίεστου, μη-γραμμικού υλικού σε μονότονες ή περίπου μονότονες παραμορφώσεις συνιστά τη λεγόμενη θεωρία «πλαστικής» παραμόρφωσης κατά *Nadai*<sup>15</sup>. Συμφώνως προς την θεωρία αυτή κάνουμε την παραδοχή ότι για μονότονες παραμορφώσεις οι συνιστώσες του αποκλίνοντα τανυστή των τάσεων είναι ανάλογες εκείνων του λογαριθμικού τανυστή των τροπών,

$$s_{ij} = \Lambda \ell_{ij} \quad (5.94)$$



Εικ. 5-8: Χαρακτηριστική καμπύλη «τάσεων-τροπών» και η γραφική παράσταση του χορδικού και εφαπτομενικού μέτρου διατμήσεως.

Ο συντελεστής  $\Lambda$  είναι με την σειρά του ανάλογος του *χορδικού μέτρου διάτμησης*, και αναφέρεται στην αντίστοιχη καμπύλη *ισοδύναμων τάσεων-τροπών*. Πράγματι αν ορίσουμε τα παρακάτω μέτρα ως τις εντάσεις *διατμητικής τάσης και τροπής*, αντίστοιχως,

<sup>15</sup> Αγγλ. *deformation theory of plasticity*. Πρβλ. L. M. Kachanov, *Fundamentals of the Theory of Plasticity*, MIR Publishers, 1974

$$T = \sqrt{\frac{1}{2} s_{ij} s_{ji}} \ , \ \Gamma = \sqrt{2 \ell_{ij} \ell_{ji}} \quad (5.95)$$

παίρνουμε

$$T^2 = \frac{1}{2} s_{ij} s_{ji} = \frac{1}{2} \Lambda \ell_{ij} \Lambda \ell_{ji} = \frac{1}{4} \Lambda^2 \Gamma^2 \Rightarrow \Lambda = 2 \frac{T}{\Gamma} = 2\mu_s \quad (5.96)$$

Οπότε, αν υποθέσουμε ότι υπάρχει μία μοναδική χαρακτηριστική για το θεωρούμενο υλικό καμπύλη τάσεων τροπών (Εικ. 5-8),

$$\begin{aligned} T &= \hat{T}(\Gamma) \\ \mu_s &= \frac{\hat{T}(\Gamma)}{\Gamma} \end{aligned} \quad (5.97)$$

τότε

$$\ell_{ij} = \frac{1}{2\mu_s} s_{ij} \quad (5.98)$$

Παρατηρούμε ότι η συνθήκη για επίπεδη παραμόρφωση μαζί με τη συνθήκη για ισόχωρη παραμόρφωση, δίδει

$$\ell_{33} = 0 \Rightarrow s_{33} = 0 \Rightarrow \sigma_3 = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) \quad (5.99)$$

Για μια συνέχιση της ορθογώνιας παραμόρφωσης παρατηρούμε ότι η παραπάνω καταστατική σχέση δίνει την εξής εξίσωση μεταξύ των ρυθμών μεταβολής τάσεων και τροπών

$$\dot{s}_{ij} = \dot{\Lambda} \ell_{ij} + \Lambda \dot{\ell}_{ij} \quad (5.100)$$

Κατ' αρχήν παρατηρούμε ότι για την θεωρούμενη συνέχιση της ορθογώνιας παραμορφώσεως η ταχύτητα και ο ρυθμός παραμορφώσεως στη τρέχουσα απεικόνιση του παραμορφούμενου σώματος υπολογίζονται ως εξής,

$$v_i = \frac{\partial u_i^E}{\partial t} + \frac{\partial u_i^E}{\partial x_k} v_k \Rightarrow \quad (5.101)$$

$$v_1 = \frac{\dot{a}_1}{1+a_1} x_1 \ , \ v_2 = \frac{\dot{a}_2}{1+a_2} x_2 \ , \ v_3 = 0 \quad (5.102)$$

και

$$[D] = \begin{bmatrix} \frac{\dot{a}_1}{1+a_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\dot{a}_2}{1+a_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.103)$$

Άρα εν προκειμένω ο ρυθμός μεταβολής του λογαριθμικού τανυστή των τροπών ταυτίζεται με το ρυθμό παραμορφώσεως

$$\dot{\lambda}_{11}^\ell = D_{11}, \quad \dot{\lambda}_{22}^\ell = D_{22}, \quad \dot{\lambda}_{33}^\ell = 0 \quad (5.104)$$

Με την παρατήρηση αυτή και λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι,

$$\frac{\dot{\Lambda}}{\Lambda} = \left(1 - \frac{\mu_s}{\mu_t}\right) \frac{\dot{T}}{T}, \quad \frac{\dot{T}}{T} = \frac{s_{ij} \dot{s}_{ji}}{2T^2} \quad (5.105)$$

οι παραπάνω εξισώσεις της θεωρίας πλαστικής παραμορφώσεως, Εξ. (5.100), παίρνουν τη μορφή

$$\dot{s}_{ij} = C_{ijkl} D_{kl} \quad (5.106)$$

όπου ο τανυστής στιβαρότητας δίδεται από τις εξής σχέσεις,

$$C_{ijkl} = \mu_s (\delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ik} \delta_{jl}) - (\mu_s - \mu_t) \frac{s_{ij} s_{kl}}{T^2} \quad (5.107)$$

όπου  $\mu_t$  είναι το αντίστοιχο εφαπτομενικό μέτρο διάτμησης (Εικ. 5-8)

$$\mu_t = \frac{d\hat{T}}{d\Gamma} \quad (5.108)$$

Για τη θεωρούμενη ορθογώνια παραμόρφωση και την συνέχισή της πάνω στους ίδιους κύριους άξονες οι καταστατικές εξισώσεις για τους ρυθμούς εκφράζονται συναρτήσει της υλικής χρονικής παραγώγου της τάσεως, διότι, απουσία στροβιλισμού, αυτή συμπίπτει με την αντικειμενική παράγωγο της τάσεως κατά Jaumann,

$$W_{ij} = 0 \Rightarrow \dot{\sigma}_{ij} = \overset{\circ}{\sigma}_{ij} \quad (5.109)$$

Στην θεωρούμενη περίπτωση επίπεδων παραμορφώσεων ενός ασυμπιέστου υλικού που υπακούει στον παραπάνω καταστατικό νόμο της θεωρίας πλαστικής παραμορφώσεως και στο σύστημα κυρίων αξόνων του τανυστή των τάσεων στην τρέχουσα απεικόνιση  $C^{(t)}$  οι καταστατικές εξισώσεις για τους αντικειμενικούς ρυθμούς των τάσεων παίρνουν τελικά την εξής μορφή

$$\begin{aligned}
 \dot{\sigma}_{11} &= \dot{\sigma} + 2\mu_t D_{11} \\
 \dot{\sigma}_{22} &= \dot{\sigma} + 2\mu_t D_{22} \\
 D_{11} + D_{22} &= 0
 \end{aligned}
 \tag{5.110}$$

Στην θεωρία πλαστικής παραμορφώσεως κάνουμε στο σημείο αυτό την υπόθεση ότι οι παραπάνω Εξ. (5.106) και (5.107) για τους ρυθμούς δεν ισχύουν μόνο για ορθογώνιες παραμορφώσεις αλλά ισχύουν γενικώς για την αντικειμενική χρονική παράγωγο του τανυστή των τάσεων, αρκεί η απόκλιση από την μονότονη συνέχιση της βασικής ορθογώνιας παραμορφώσεως να μην είναι «πολύ μεγάλη». Στην περίπτωση αυτή οι παραπάνω εξισώσεις συμπληρώνονται με την εξίσωση για τον ρυθμό διατμήσεως σε άξονες στραμμένους κατά  $45^\circ$  ως προς τους άξονες της προεντάσεως

$$\dot{\sigma}_{12} = 2\mu_s D_{12}
 \tag{5.111}$$

Στο θεωρούμενο σύστημα αξόνων, ο τανυστής της τάσεως παρίσταται από το μητρώο,

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) \end{bmatrix}
 \tag{5.112}$$

Λαμβάνοντας υπόψη την γεωμετρική διόρθωση για τον υπολογισμό της υλικής παραγώγου του τανυστή των τάσεων με δεδομένη την κατά Jaumann παράγωγο του, παίρνουμε τελικά τις εξής σχέσεις για την χρονική μεταβολή των συνιστουσών του τανυστή της τάσης στο επίπεδο της παραμόρφωσης,

$$\begin{aligned}
 \dot{\sigma}_{11} &= \dot{\sigma} + 2\mu_t D_{11} \\
 \dot{\sigma}_{22} &= \dot{\sigma} + 2\mu_t D_{22} \\
 \dot{\sigma}_{12} &= 2\mu_s D_{12} + (\sigma_1 - \sigma_2) W_{21}
 \end{aligned}
 \tag{5.113}$$

που συμπληρώνονται από τον περιορισμό

$$D_{11} + D_{22} = 0
 \tag{5.114}$$

που εξασφαλίζει ισόχωρες παραμορφώσεις.

Εναλλακτικά οι παραπάνω σχέσεις μεταξύ των ρυθμών των τάσεων και τροπών μπορούν να γραφτούν ως εξής,



$$\begin{aligned}
\dot{\sigma}_{11} &= \dot{\sigma} + 2\mu_t \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \\
\dot{\sigma}_{22} &= \dot{\sigma} + 2\mu_t \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \\
\dot{\sigma}_{12} &= \mu_s \left( 1 - \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2\mu_s} \right) \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \mu_s \left( 1 + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2\mu_s} \right) \frac{\partial v_2}{\partial x_1}
\end{aligned} \tag{5.115}$$

Άρα εν προκειμένω η γεωμετρική διόρθωση της υλικής παραγώγου της τάσεως λόγω στροβιλισμού είναι μηδενική μόνον όταν η προένταση στο επίπεδο παραμορφώσεως είναι ισότροπη ( $\sigma_1 = \sigma_2$ ), δηλαδή μόνο στην αρχική απεικόνιση  $C^{(0)}$  του θεωρούμενου σώματος.

Είναι τέλος φανερό από τις παραπάνω σχέσεις ότι

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2} |\sigma_1 - \sigma_2|, \quad \Gamma = 2 |\lambda_{11}^\ell| \\
\mu_s &= \frac{|\sigma_1 - \sigma_2|}{4 |\lambda_{11}^\ell|} \Rightarrow \frac{|\sigma_1 - \sigma_2|}{2\mu_s} = 2 |\lambda_{11}^\ell|
\end{aligned} \tag{5.116}$$

Άρα για μικρές σχετικά τροπές,  $|\lambda_{11}^\ell| \ll 1$ , οι παραπάνω σχέσεις για το ρυθμό μεταβολής της τάσεως απλουστεύονται, αφού η γεωμετρική διόρθωση μπορεί να θεωρηθεί ως αμελητέα,

$$\begin{aligned}
\dot{\sigma}_{11} &= \dot{\sigma} + 2\mu_t D_{11} \\
\dot{\sigma}_{22} &= \dot{\sigma} + 2\mu_t D_{22} \\
\dot{\sigma}_{12} &= 2\mu_s D_{12}
\end{aligned} \tag{5.117}$$

Αυτό σημαίνει ότι η γεωμετρική διόρθωση λόγω στροβιλισμού στην παραπάνω έκφραση για τη διατμητική τάση θα είναι σημαντική μόνο στην περιοχή μεγάλων σχετικά παραμορφώσεων και θα αφορά ένα όλκιμο (εύπλαστο) υλικό. Μεγάλες παραμορφώσεις, δηλ. παραμορφώσεις συγκρίσιμες με τη μονάδα, παρατηρούνται κυρίως σε όλκιμα μέταλλα και πολυμερικά υλικά και σε λιγότερο βαθμό σε εδαφικά υλικά.

