

4. ΚΙΝΗΣΗ ΚΑΙ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΗ

4.	ΚΙΝΗΣΗ ΚΑΙ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΗ	97
4.1	Απεικονίσεις και κίνηση	99
4.2	Η κίνηση του απολύτως στερεού σωστού	100
4.2.1.	Ορισμοί	100
4.2.2.	Η γενική κίνηση στερεού σώματος	103
4.2.3.	Ταχύτητα και επιτάχυνση	108
4.3	Η περιγραφή της κινήσεως κατά Lagrange	110
4.4	Το θεώρημα της πολικής αναλύσεως	118
4.5	Τανυστές των τροπών σε περιγραφή κατά Lagrange	126
4.6	Απλή διάτμηση σε περιγραφή κατά Lagrange	128
4.7	Η λογαριθμική τροπή	130
4.8	Ορθογώνιες παραμορφώσεις	132
4.9	Η περιγραφή της παραμορφώσεως στοιχειωδών υλικών επιφανειών	133
4.10	Η περιγραφή της παραμορφώσεως στοιχειωδών υλικών όγκων	136
4.11	Οι τανυστές τροπών σε περιγραφή κατά Euler	138
4.12	Απλή διάτμηση σε περιγραφή κατά Euler	142
4.13	Παράτημα I: Το σύμβολο Landau	146
4.14	Παράτημα II	147

Στο Κεφάλαιο αυτό συνοψίζουμε τις βασικές έννοιες και το μαθηματικό υπόβαθρο που αφορούν στην περιγραφή της κινήσεως ενός σώματος καθώς και στην περιγραφή κατά Lagrange και Euler^{1,2} των πεπερασμένων παραμορφώσεων ενός υλικού σώματος.

¹ Chadwick, P., *Continuum Mechanics: Concise Theory and Problems*, Dover, 1976.

² Spencer, A.J.M., *Continuum Mechanics*, Dover, 1980.

©4. ΘΕΩΡΙΑ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΕΩΝ, 2008

Ιωάννης Γ. Βαρδουλάκης, Dr-Ing., Καθηγητής της Μηχανικής στο Ε.Μ.Πολυτεχνείο
Τ.Θ. 144, Παιανία 190-02, <http://geolab.mechan.ntua.gr/>, I.Vardoulakis@mechan.ntua.gr

4.1 Απεικονίσεις και κίνηση

Γενικώς θα ορίσουμε ως ένα σώμα ένα συμπαγές σύνολο υλικών σημείων (ΥΣ), $B = \{X\}$, τα οποία μπορούν να απεικονισθούν αμφιμονοσήμαντα στα σημεία μιας περιοχής C του Ευκλείδειου σημειοχώρου E . Η περιοχή C καλείται μια *απεικόνιση*³ του σώματος B . Ένα τυχόν σημείο της περιοχής C λέμε πως είναι η θέση που καταλαμβάνει το αντίστοιχο ΥΣ στη δεδομένη απεικόνιση του σώματος B . Κατά την κίνηση ενός σώματος η απεικόνισή του αλλάζει με το χρόνο t . Ο χρόνος t είναι με τη σειρά του μια πραγματική μεταβλητή, ορισμένη σε κάποιο διάστημα T (όχι κατ' ανάγκη φραγμένο), $t \in T$. Για κάθε τιμή του χρόνου στο εν λόγω διάστημα δεχόμεθα ότι υπάρχει μία και μοναδική απεικόνιση $C^{(t)}$ του σώματος B . Η οικογένεια των απεικονίσεων $\{C^{(t)} : t \in T\}$ καλείται *κίνηση*⁴ του B . Μια οποιαδήποτε απεικόνιση του σώματος B μπορεί να επιλεγεί ως *απεικόνιση αναφοράς*⁵, οπότε οι θέσεις των Υ.Σ. στην απεικόνιση αναφοράς ταυτίζονται με τα ΥΣ του σώματος. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας μπορούμε να επιλέξουμε την τιμή $t = 0$ για την απεικόνιση αναφοράς, οπότε αυτή θα συμβολίζεται ως $C^{(0)}$.

Έστω τώρα πως η γεωμετρική περιγραφή των θέσεων των Υ.Σ. ενός σώματος γίνεται ως προς ένα σταθερό στο χώρο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων. Η θέση του τυχόντος ΥΣ X στην απεικόνιση αναφοράς θα περιγραφεί από τις καρτεσιανές συντεταγμένες ξ_i της θέσεώς του στην απεικόνιση αυτή, οπότε

$$X \leftrightarrow \xi_i \quad (i = 1, 2, 3) \quad (4.1)$$

Οι συντεταγμένες ξ_i καλούνται ως εκ τούτου και *υλικές συντεταγμένες*⁶ και αυτές με τη σειρά τους ορίζουν τη θέση του ΥΣ X στην απεικόνιση, που θα συμβολιστεί ως $X(\xi_i)$.

Έστω ότι στην τρέχουσα απεικόνιση $C^{(t)}$ το τυχόν ΥΣ του σώματος κατέχει την θέση με καρτεσιανές συντεταγμένες x_i . Η θέση του ΥΣ X στην τρέχουσα απεικόνιση θα συμβολιστεί ως $X(x_i)$. Στην περίπτωση αυτή η κίνηση $C^{(0)} \mapsto C^{(t)}$ περιγράφεται από μία συνάρτηση της μορφής,

$$x_i = \chi_i(\xi_k, t) \quad (4.2)$$

Επειδή οι απεικονίσεις $C^{(0)}$ και $C^{(t)}$ είναι μοναδικές για δεδομένες τιμές της χρονικής παραμέτρου, η παραπάνω συνάρτηση κινήσεως έχει πάντοτε μία μοναδική αντίστροφη συνάρτηση,

$$\xi_i = \chi_i^{-1}(x_k, t) \quad (4.3)$$

Για να αποκλείσουμε κινήσεις οι οποίες δεν μπορούν να πραγματοποιηθούν από φυσικά σώματα, θα απαιτήσουμε όπως όλες οι απεικονίσεις $C^{(t)}$ ενός σώματος είναι 'όμοιες' μεταξύ τους υπό την εξής έννοια (Εικ. 4-1): Σε κάθε θέση και σε κάθε απεικόνιση θεωρούμε το

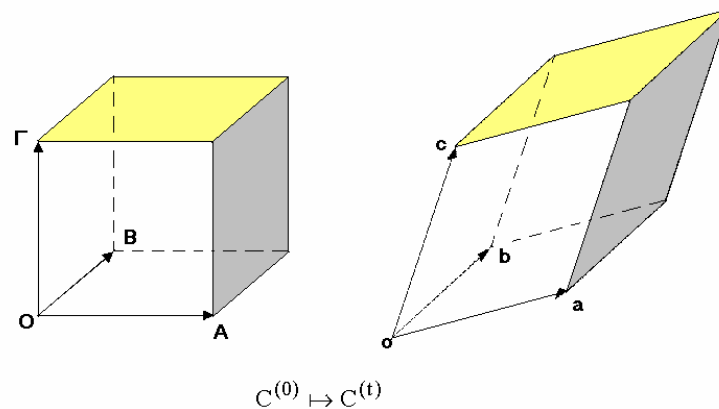
³ Αγγλ. *configuration*

⁴ Αγγλ. *motion*

⁵ Αγγλ. *reference configuration*

⁶ Αγγλ. *material coordinates*

τετράεδρο εκείνο που έχει ως κορυφές τις εκάστοτε θέσεις τεσσάρων 'κοντινών' μεταξύ τους, των ιδίων πάντοτε, υλικών σημείων \mathbf{O} , \mathbf{A} , \mathbf{B} , $\mathbf{\Gamma}$. Δύο απεικονίσεις θα λέγονται 'όμοιες', όταν ο σχετικός προσανατολισμός των διανυσμάτων που συνιστούν τις ακμές του εν λόγω τετράεδρου παραμένει σταθερός, δηλαδή όταν το μεικτό γινόμενο, $(\vec{OA} \times \vec{OB}) \cdot \vec{O\Gamma}$, διατηρεί το πρόσημό του.



Εικ. 4-1: Η σχέση ομοιότητας που περιορίζει το σύνολο των επιτρεπτών απεικονίσεων

Επιπλέον θα απαιτήσουμε από τις συναρτήσεις $\chi_i(\xi_k, t)$ και $\chi_i^{-1}(x_k, t)$ να είναι τουλάχιστον δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμες ως προς τις μεταβλητές θέσεως και χρόνου από τις οποίες αυτές εξαρτώνται. Η συνθήκη αυτή λειοτήτως εξασφαλίζει την απαίτηση όπως καμπύλες, επιφάνειες και χωρικές περιοχές στην απεικόνιση αναφοράς $C^{(0)}$ μεταφέρονται σε αντίστοιχες καμπύλες, επιφάνειες και χωρικές περιοχές στην τρέχουσα απεικόνιση $C^{(t)}$. Με την έννοια αυτή θα αναφερόμαστε σε υλικές καμπύλες, υλικές επιφάνειες και υλικές χωρικές περιοχές.

4.2 Η κίνηση του απολύτως στερεού σωστός

4.2.1. Ορισμοί

Η αφινική⁷ απεικόνιση των σημείων ενός σώματος \mathbf{B}

$$x_i = c_i(t) + R_{ij}(t)\xi_j \quad (4.4)$$

η οποία έχει την ιδιότητα να διατηρεί σταθερή την απόσταση μεταξύ δύο σημείων του σώματος \mathbf{B} για τυχαία επιλογή των σημείων αυτών καλείται κίνηση απολύτως στερεού σώματος.

⁷ Λατ. *affinitas*=γειτονικός

Έστω δύο σημεία $A(\xi_i)$ και $B(\psi_i)$, και

$$\begin{aligned} x_i &= c_i(t) + R_{ij}(t)\xi_j \\ y_i &= c_i(t) + R_{ij}(t)\psi_j \end{aligned} \quad (4.5)$$

Από τον παραπάνω ορισμό παίρνουμε ότι,

$$(x_i - y_i)(x_i - y_i) = (\xi_i - \psi_i)(\xi_i - \psi_i) \quad (4.6)$$

όπου

$$x_i - y_i = R_{ij}(\xi_j - \psi_j) \quad (4.7)$$

Άρα

$$\begin{aligned} R_{ij}R_{ik}(\xi_j - \psi_j)(\xi_k - \psi_k) &= \delta_{jk}(\xi_j - \psi_j)(\xi_k - \psi_k) \Rightarrow \\ R_{ij}R_{ik} &= \delta_{jk} \end{aligned} \quad (4.8)$$

Ορισμός

Ένας τετραγωνικός πίνακας $[R]$ καλείται ορθογώνιος, όταν

$$\det[R] = \pm 1 \quad (4.9)$$

Για ένα ορθογώνιο τετραγωνικό πίνακα ισχύουν οι σχέσεις:

$$[R]^T [R] = [R][R]^T = [I] \quad (4.10)$$

και

$$[R]^T = [R]^{-1} \quad (4.11)$$

ή

$$R_{ik}R_{il} = \delta_{kl} \quad , \quad R_{ki}R_{li} = \delta_{kl} \quad (4.12)$$

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι για να είναι η αφινική απεικόνιση (4.4) μία κίνηση στερεού σώματος, τότε πρέπει ο R_{ij} να είναι ορθογώνιος, εφόσον από την εξ. (4.8) παίρνουμε την συνθήκη (4.9). Η περίπτωση $\det[R_{ij}] = +1$ αντιστοιχεί σε πραγματική κίνηση ενώ η περίπτωση $\det[R_{ij}] = -1$ δεν αντιστοιχεί σε πραγματική κίνηση, αφού η αντίστοιχη απεικόνιση είναι ένας κατοπτρισμός! Στην περίπτωση όπου

$$R_{ij} = \delta_{ij} \quad (4.13)$$

από την εξ. (4.4) παίρνουμε ότι

$$x_i = c_i + \xi_i \quad (4.14)$$

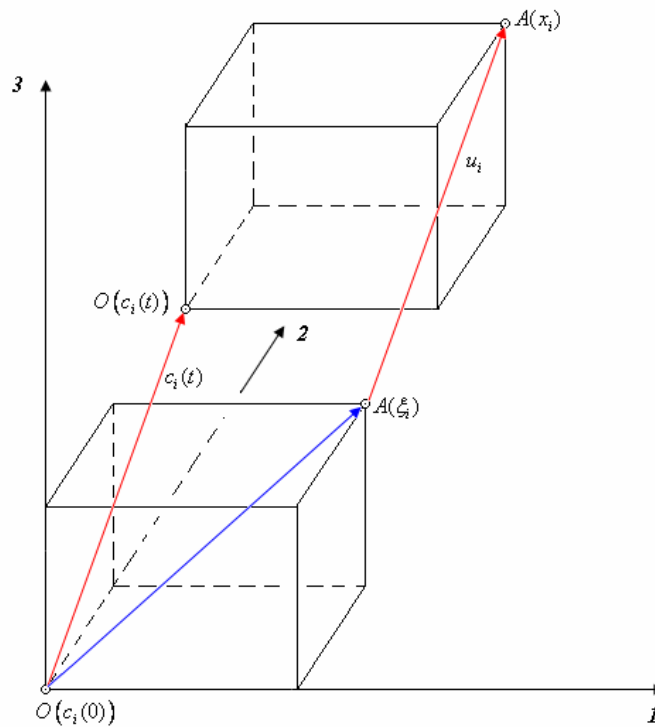
Οπότε συμπεραίνουμε ότι στην περίπτωση αυτή η κίνηση είναι μια παράλληλη μεταφορά στερεού σώματος (Εικ. 4-2). Κατά την παράλληλη μεταφορά το διάνυσμα μετατοπίσεως όλων των ΥΣ του στερεού σώματος είναι μια μοναδική συνάρτηση του χρόνου,

$$u_i = x_i - \xi_i = c_i(t) \quad (4.15)$$

Επειδή

$$t = 0: u_i = 0 \Rightarrow x_i \equiv \xi_i \Rightarrow c_i(0) = 0 \quad (4.16)$$

Άρα, βάσει της εξ. (4.16), το διάνυσμα $c_i(t)$ περιγράφει την κίνηση εκείνου του ΥΣ, το οποίο τη χρονική στιγμή $t = 0$ κατείχε τη θέση της αρχής των αξόνων.



Εικ. 4-2: Παράλληλη μεταφορά στερεού σώματος

4.2.2. Η γενική κίνηση στερεού σώματος

Ένα σημείο ενός σώματος καλείται *σταθερό σημείο*⁸, όταν μετά την εφαρμογή της κινήσεως, εξ. (4.4), απεικονίζεται στον εαυτό του. Βάσει του ορισμού της αφινικής απεικονίσεως και του ορισμού του σταθερού σημείου αποδεικνύονται τα κάτωθι θεωρήματα⁹:

Θεώρημα 1:

Αν μία κίνηση, εξ. (4.4), έχει τέσσερα σταθερά σημεία τα οποία δεν βρίσκονται πάνω σε ένα επίπεδο, τότε η κίνηση αυτή είναι μια ταυτοτική απεικόνιση των σημείων του σώματος στον εαυτό τους,

$$c_i(t) = 0 \quad , \quad R_{ij}(t) = \delta_{ij} \quad (4.17)$$

Θεώρημα 2:

Αν μία κίνηση, εξ. (4.4), έχει ένα σταθερό επίπεδο και η κίνηση αυτή δεν είναι η ταυτοτική απεικόνιση (4.17), τότε η κίνηση αυτή δεν είναι μία πραγματική κίνηση αλλά είναι μία ψευδοκίνηση και μάλιστα ένας κατοπτρισμός ως προς το εν λόγω επίπεδο.

Θεώρημα 3:

Αν μία κίνηση, εξ. (4.4), έχει μία σταθερή ευθεία, τότε η κίνηση είναι μία περιστροφή περί άξονα την εν λόγω σταθερή ευθεία.

Για τον προσδιορισμό των σταθερών σημείων μιας κινήσεως θεωρούμε τις εξισώσεις,

$$\xi_i = c_i + R_{ij}\xi_j \quad \Rightarrow \quad T_{ij}\xi_j + c_i = 0 \quad (4.18)$$

όπου

$$T_{ij} = R_{ij} - \delta_{ij} \quad (4.19)$$

στο οποίο αντιστοιχεί ο πίνακας $[T] = [R] - [I]$. Η ταξινόμηση των λύσεων του προβλήματος (4.18) γίνεται βάσει του βαθμού¹⁰ του πίνακα $[T]$ ως εξής:

1. $\text{rang}[T_{ij}] = 3$: Στην περίπτωση αυτή $\det[T_{ij}] \neq 0$, και τότε υπάρχει ακριβώς ένα σταθερό σημείο,

$$\xi_k = -T_{ki}^{-1} c_i \quad (4.20)$$

Αν τώρα δεχθούμε ότι η απεικόνιση R_{ij} αντιστοιχεί σε πραγματική κίνηση, δηλαδή αν δεχθούμε ότι $\det[R_{ij}] = +1$ τότε έχουμε,

⁸ Αγγλ. *fixed point*

⁹ Οι αποδείξεις των παρακάτω θεωρημάτων μπορούν να αναζητηθούν σε κλασικά συγγράμματα Αναλυτικής Γεωμετρίας. Πρβλ. Grottemeyer, K.P., *Analytische Geometrie*, Göschen, Bd. 65-65a, 1964.

¹⁰ Αγγλ. *rank of a matrix*. Συμβ. $\text{rang}[A_{ij}]$

$$R_{ij}^T T_{jk} = R_{ji}(R_{jk} - \delta_{jk}) = \delta_{ik} - R_{ki} = (\delta_{ik} - R_{ki})^T \quad (4.21)$$

οπότε

$$\begin{aligned} \det[R_{ji}(R_{jk} - \delta_{jk})] &= (+1) \det[R_{jk} - \delta_{jk}] = -\det[R_{ik} - \delta_{ik}] \Rightarrow \\ \det[R_{ij} - \delta_{ij}] &= 0 \Rightarrow \text{rng}[T_{ij}] < 3 \end{aligned} \quad (4.22)$$

που είναι σε αντίφαση με την αρχική υπόθεση! Άρα η περίπτωση αυτή είναι αδύνατη.

2. $\text{rng}[T_{ij}] = 2$: Στην περίπτωση αυτή το ομογενές σύστημα εξισώσεων,

$$T_{ij} \xi_j = 0 \quad (4.23)$$

έχει λύση της μορφής

$$\xi_i = \lambda \rho_i \quad (4.24)$$

Οπότε

$$\begin{aligned} T_{ij} \rho_j = 0 &\Rightarrow \rho_j T_{ji} = \rho_j (R_{ji} - \delta_{ji}) = 0 \Rightarrow \\ \rho_j (R_{ji} - \delta_{ji}) R_{ik} = 0 &\Rightarrow \rho_j (R_{jk} - \delta_{jk}) = 0 \end{aligned} \quad (4.25)$$

ή

$$\{\rho_1 \quad \rho_2 \quad \rho_3\} \begin{bmatrix} R_{11}-1 & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22}-1 & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33}-1 \end{bmatrix} = \{0 \quad 0 \quad 0\} \quad (4.26)$$

Δηλαδή το διάνυσμα $\{\rho_i\}$ είναι κάθετο στα διανύσματα-στήλες του πίνακα $[T] = [R - I]$, δύο εκ των οποίων είναι εξ υποθέσεως γραμμικώς ανεξάρτητα.

Από την εξ. (4.18) παίρνουμε ότι

$$\rho_i (R_{ij} - \delta_{ij}) \lambda \rho_j + \rho_i c_i = 0 \Rightarrow \rho_i c_i = 0 \quad (4.27)$$

Άρα το διάνυσμα $\{\rho_i\}$ πρέπει να είναι κάθετο και στο διάνυσμα $\{c_i\}$. Η εξ. (4.27) είναι η αναγκαία συνθήκη για να έχει λύση η εξ. (4.18) στη θεωρούμενη περίπτωση. Άρα ικανή και αναγκαία συνθήκη για να υπάρχει λύση στη θεωρούμενη περίπτωση είναι το διάνυσμα $\{c_i\}$ να είναι γραμμικός συνδυασμός δύο διανυσμάτων-στηλών του πίνακα $[T] = [R - I]$. Στη περίπτωση αυτή η ζητούμενη λύση έχει την εξής μορφή,

$$\xi_i = \mu_i + \lambda \rho_i \quad (4.28)$$

όπου μ_i είναι μια οποιαδήποτε μερική λύση της εξ. (4.18).

Θεωρούμε τώρα το διάνυσμα

$$m_i = \rho_k \rho_k c_i - \rho_k c_k \rho_i \Leftrightarrow \vec{m} = \vec{\rho} \times (\vec{c} \times \vec{\rho}) \quad (4.29)$$

οπότε,

$$\rho_i m_i = \rho_i \rho_k \rho_k c_i - \rho_i \rho_k c_k \rho_i = 0 \quad (4.30)$$

και

$$\begin{aligned} c_i &= \alpha m_i + \beta \rho_i \\ \alpha &= \frac{1}{\rho_i \rho_i}, \quad \beta = \frac{\rho_i c_i}{\rho_i \rho_i} \end{aligned} \quad (4.31)$$

Με τη βοήθεια αυτής της αναλύσεως μπορούμε να αντικαταστήσουμε την κίνηση, εξ. (4.4),

$$x_i = R_{ij} \xi_j + c_i \quad (4.32)$$

με τις εξής δύο διαδοχικές κινήσεις:

$$\bar{x}_i = R_{ij} \xi_j + \alpha m_i \quad (4.33)$$

και

$$x_i = \bar{x}_i + \beta \rho_i \quad (4.34)$$

Βάσει του ως άνω Θεωρήματος 3, η πρώτη συνιστώσα της κινήσεως, που περιγράφεται από την εξ. (4.33), είναι μία περιστροφή περί άξονα που έχει την φορά του διανύσματος $\{m_i\}$, αφού ισχύει η εξ. (4.29) εκ κατασκευής. Η δεύτερη συνιστώσα της κινήσεως, εξ. (4.34), είναι μία παράλληλη μεταφορά στη κατεύθυνση του διανύσματος $\{\rho_i\}$. Μία τέτοια κίνηση ονομάζεται *ελίκωση*. Η Εικ. 4-3 απεικονίζει τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά μίας έλικας

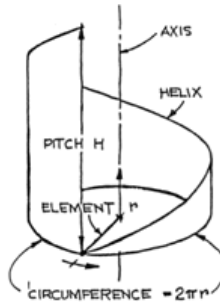


Figure 1. Helix

Εικ. 4-3: Δεξιόστροφη κυκλική έλικά

3. $\underline{rng}[T_{ij}] = 1$: Η περίπτωση αυτή είναι αδύνατη όταν $\det[R_{ij}] = +1$, διότι εν προκειμένω η ύπαρξη σταθερού επιπέδου είναι μόνο συμβατή με κατοπτρισμό.
4. $\underline{rng}[T_{ij}] = 1$: Στην περίπτωση αυτή $R_{ij} = \delta_{ij}$ και η κίνηση είναι μία παράλληλη μεταφορά.

Από την παραπάνω σύντομη μαθηματική κατασκευή προκύπτει το περίφημο,

Θεώρημα του Chasles¹¹:

Η γενική κίνηση στερεού σώματος είναι μία ελίκωση που περιλαμβάνει, μία παράλληλη μετατόπιση και μία στροφή¹²,

$$x_i = c_i(t) + R_{ik}(t)(\xi_k - \alpha_k) \quad (4.35)$$

Στο σημείο αυτό θα παρατηρήσουμε ότι το θεώρημα αυτό, που κατά ορισμένους¹³ αποδίδεται στον Giulio Mozzi¹⁴, αποτελεί τη βάση της μηχανολογικής θεωρίας των κοχλιών¹⁵ (Εικ. 4-4).



Εικ. 4-4: Χειροκίνητος κοχλίας διανοίξεως οπών σε μαλακά αργιλικά εδάφη (auger post hole drill).

¹¹ Chasles, M. (1830). Note sur les propriétés générales du système de deux corps semblables entre eux, Bulletin de Sciences Mathématiques, Astronomiques Physiques et Chimiques, Baron de Ferussac, Paris, 321-326.

¹² Πρβλ. Prbl. P. Chadwick, *Continuum Mechanics*, Chapt.2, Dover, 1976.

¹³ Ceccarelli, M. (2000). Screw axis defined by Giulio Mozzi in 1763 and early studies on helicoidal motion, *Mechanism and Machine Theory*, 35, 761-770.

¹⁴ Mozzi, G. *Discorso matematico sopra il rotamento momentaneo dei corpi*, Stamperia di Donato Campo, Napoli, 1763,

¹⁵ R.S. Ball, *Treatise on the Theory of Screws*, Hodges Dublin 1876, Cambridge University Press 1900, Cambridge Mathematical Library 1998.

Ασκήσεις

1. Να διερευνηθεί και να αποδειχθεί ότι η κίνηση¹⁶,

$$x_i = \xi_i + \left(\sin \theta \varepsilon_{ijk} n_k + (1 - \cos \theta) (n_i n_j - \delta_{ij}) \right) \xi_j \quad (4.36)$$

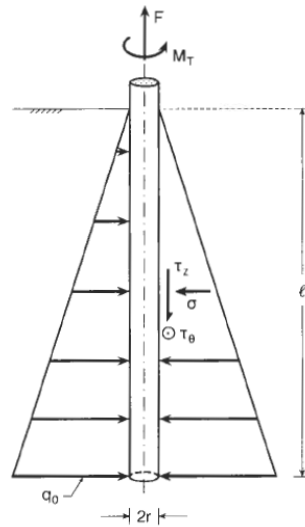
όπου

$$n_i n_i = 1, \quad 0 \leq \theta \leq \pi \quad (4.37)$$

αντιστοιχεί σε στροφή απολύτως στερεού σώματος κατά γωνία θ περί άξονα με μοναδιαίο διάνυσμα \mathbf{n} .

2. Κυλινδρική ράβδος ακτίνας r και μήκους ℓ βρίσκεται εγκιβωτισμένη στο έδαφος. Η πλευρική πίεση του εδάφους πάνω στη ράβδο έχει τριγωνική κατανομή. Ο συντελεστής τριβής ράβδου-εδάφους είναι μ . Κατά την εξόλκευση της ράβδου επιβάλλεται συγχρόνως με την αξονική δύναμη F και στρεπτική ροπή $M_T = \alpha Fr$, ($\alpha < 1$). α) Ποία είναι η επίδραση της M_T στη τιμή της απαιτούμενης δυνάμεως εξόλκευσης F και γιατί; β) Να βρεθεί η F ως συνάρτηση των δεδομένων του προβλήματος,

$$F = F(\ell, r, q_0, \alpha, \mu) \quad (4.38)$$



Εικ. 4-5: Ελικοειδής εξόλκευση πασσάλου¹⁷

¹⁶ Πρβλ. Παράρτημα ΙΙ.

4.2.3. Ταχύτητα και επιτάχυνση

Για τη χρονική παράγωγο χρησιμοποιούμε τον εξής συμβολισμό,

$$\dot{x}_i = \frac{dx_i}{dt} \quad , \quad \dot{c}_i = \frac{dc_i}{dt} \quad \text{κ.λπ.} \quad (4.39)$$

Η ταχύτητα των ΥΣ κατά την κίνηση του απολύτως στερεού σώματος υπολογίζεται ως εξής,

$$v_i = \dot{x}_i = \dot{c}_i + \dot{R}_{ik} (\xi_k - \alpha_k) \quad (4.40)$$

Μπορούμε τώρα στην έκφραση αυτή για την ταχύτητα να αντικαταστήσουμε τις «υλικές» συντεταγμένες των ΥΣ, ξ_i , με τις «χωρικές» τους συντεταγμένες x_i ,

$$v_i = \dot{x}_i = \dot{c}_i + \dot{R}_{ik} R_{jk} (x_j - c_j) \quad (4.41)$$

Ομοίως για την επιτάχυνση παίρνουμε

$$a_i = \ddot{x}_i = \ddot{c}_i + \ddot{R}_{ik} (\xi_k - \alpha_k) \quad (4.42)$$

και αντιστοίχως

$$a_i = \ddot{c}_i + \ddot{R}_{ik} R_{mk} (x_m - c_m) \quad (4.43)$$

Παραγωγίζοντας τώρα ως προς το χρόνο τις συνθήκες ορθογωνιότητας, εξ.(4.12), παίρνουμε

$$\dot{R}_{ik} R_{il} = -R_{ik} \dot{R}_{il} \quad , \quad \dot{R}_{ki} R_{li} = -R_{ki} \dot{R}_{li} \quad (4.44)$$

Επίσης έχουμε ότι,

$$\ddot{R}_{ik} R_{mk} = (\dot{R}_{ik} R_{mk})^\bullet - \dot{R}_{ik} \dot{R}_{mk} \quad (4.45)$$

Παρατηρούμε ότι ο τανυστής

$$\Omega_{kl} = \dot{R}_{ki} R_{li} \quad (4.46)$$

είναι αντισυμμετρικός (γιατί;), οπότε

$$\begin{aligned} \ddot{R}_{ik} R_{mk} &= \dot{\Omega}_{im} - \dot{R}_{in} \delta_{nk} \dot{R}_{mk} = \dot{\Omega}_{im} - \dot{R}_{in} R_{ln} R_{lk} \dot{R}_{mk} \\ &= \dot{\Omega}_{im} - \dot{R}_{in} R_{ln} \dot{R}_{mk} R_{lk} = \dot{\Omega}_{im} - \Omega_{il} \Omega_{ml} \\ &= \dot{\Omega}_{im} + \Omega_{il} \Omega_{lm} \end{aligned} \quad (4.47)$$

και οι σχέσεις για την ταχύτητα και την επιτάχυνση παίρνουν την εξής μορφή,

$$v_i = \dot{c}_i + \Omega_{im} (x_m - c_m) \quad (4.48)$$

$$a_i = \ddot{c}_i + (\dot{\Omega}_{im} + \Omega_{il} \Omega_{lm}) (x_m - c_m) \quad (4.49)$$

¹⁷ Πρβλ. Ι. Βαρδουλάκης, *Τεχνική Μηχανική Ι*, Εκδ. Συμμετρία 2008.

Παρατηρούμε ότι οι καρτεσιανές συντεταγμένες του αντισυμμετρικού τανυστή Ω δίδονται από έναν αντισυμμετρικό πίνακα της μορφής

$$[\Omega] = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.50)$$

ή

$$\Omega_{ij} = -\varepsilon_{ijk} \omega_k \quad (4.51)$$

Παρατηρούμε και πάλι¹⁸ ότι συμφώνως προς την Εξ.(4.51) σε κάθε αντισυμμετρικό τανυστή Ω αντιστοιχεί ένα διάνυσμα ω . Με τη βοήθεια του διανύσματος αυτού οι παραπάνω σχέσεις για την ταχύτητα και την επιτάχυνση παίρνουν τελικά την εξής μορφή σε συμβολική γραφή:

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{c}} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{x} - \mathbf{c}) \quad (4.52)$$

και

$$\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{c}} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times (\mathbf{x} - \mathbf{c}) + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{x} - \mathbf{c})) \quad (4.53)$$

Από τις παραπάνω εκφράσεις εύκολα αναγνωρίζουμε ότι το διάνυσμα $\boldsymbol{\omega}$ περιγράφει την *γωνιακή ταχύτητα* του απολύτως στερεού σώματος.

Θεωρούμε τώρα δύο συστήματα συντεταγμένων, x_i και x'_i : Το σύστημα x_i που χρησιμοποιήσαμε πιο πάνω και που θεωρείται ότι είναι σταθερό στο χώρο και το σύστημα x'_i , το οποίο κινείται ως προς το πρώτο. Θεωρούμε επίσης ότι ο χρόνος είναι ο ίδιος και στα δύο συστήματα, $t' = t$ και ότι τα δύο αυτά συστήματα συμπίπτουν τη χρονική στιγμή $t = t_0$. Ο μετασχηματισμός των συντεταγμένων των ΥΣ του θεωρούμενου στερεού σώματος δίδεται από σχέσεις της μορφής,

$$x'_i = C_{i'k}(t) + Q_{i'k}(t)(x_k - a_k) \quad (4.54)$$

όπου

$$C_{i'}(0) = a_i \quad (4.55)$$

και

$$Q_{i'k} Q_{i'l} = \delta_{kl} \quad , \quad Q_{k'i} Q_{l'i} = \delta_{k'l'} \quad (4.56)$$

$$|Q_{i'k}(t)| = +1 \quad (4.57)$$

Παραγωγίζοντας την Εξ. (4.54) ως προς t , παίρνουμε,

$$\begin{aligned} \dot{x}'_i &= \dot{C}_{i'} + \dot{Q}_{i'k}(x_k - a_k) + Q_{i'k} \dot{x}_k \Rightarrow \\ v_{i'} &= Q_{i'k} v_k + \dot{Q}_{i'k}(x_k - a_k) + \dot{C}_{i'} \end{aligned} \quad (4.58)$$

¹⁸ Πρβλ. Κεφ. 1.3

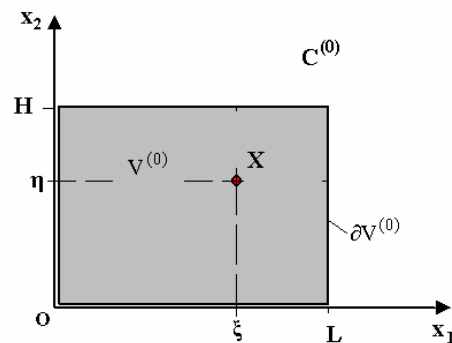
Άρα η ταχύτητα των ΥΣ ενός σώματος δεν μετασχηματίζεται ως αντικειμενικό διάνυσμα¹⁹. Με άλλα λόγια, η ταχύτητα δεν είναι αντικειμενικός τανυστής 1^{ης} τάξεως. Ομοίως μπορούμε να αποδείξουμε ότι και η επιτάχυνση των ΥΣ ενός σώματος δεν είναι αντικειμενικός τανυστής 1^{ης} τάξεως.

Άσκηση

Να αποδειχθεί ότι η επιτάχυνση ενός στερεού σώματος δεν είναι αντικειμενικός τανυστής 1^{ης} τάξεως.

4.3 Η περιγραφή της κινήσεως κατά Lagrange

Θεωρούμε τώρα ένα παραμορφώσιμο σώμα \mathbf{B} και υποθέτουμε ότι τη χρονική στιγμή $t = 0$ γνωρίζουμε τη θέση στο χώρο των ΥΣ \mathbf{X} που το συνθέτουν. Με άλλα λόγια θεωρούμε ως γνωστή την αρχική απεικόνισή $C^{(0)}$ του σώματος \mathbf{B} , την οποία θα θεωρήσουμε και ως απεικόνιση αναφοράς της παραμορφώσεως. Για παράδειγμα ας θεωρήσουμε ένα ορθογωνικό σώμα, αρχικών διαστάσεων L και H στο επίπεδο $O(x_1, x_2)$ (Εικ. 4-6). Η τρίτη διάσταση D , καθέτως προς το επίπεδο αυτό, θεωρείται αρκετά μεγάλη σε σύγκριση με τις άλλες δύο διαστάσεις ($D \gg L, H$). Στην περίπτωση αυτή και όταν η φόρτιση δεν αλλάζει με την τρίτη διάσταση, η παραμόρφωση περιορίζεται σε επίπεδα παράλληλα προς $O(x_1, x_2)$ και λέγεται *επίπεδη παραμόρφωση*²⁰.



Εικ. 4-6: Απεικόνιση αναφοράς ενός πεπερασμένου ορθογωνικού σώματος

Στην απεικόνιση αναφοράς $C^{(0)}$ το σώμα \mathbf{B} καταλαμβάνει τον όγκο $V^{(0)}$ και περιβάλλεται από το σύνορο $\partial V^{(0)}$. Η θέση στο χώρο του τυχόντος υλικού σημείου \mathbf{X} του σώματος \mathbf{B} στην απεικόνιση $C^{(0)}$, έχει ως προς το σταθερό στον χώρο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων, $O(x_1, x_2, x_3)$ τις συντεταγμένες,

¹⁹ Πρβλ. Κεφ. 2.2

²⁰ Αγγλ. *plane strain deformation*

$$x_1 = \xi, \quad x_2 = \eta, \quad x_3 = \zeta \quad (4.59)$$

Θεωρούμε ότι το σώμα \mathbf{B} παραμορφώνεται και ότι μετά την παρέλευση χρόνου $t > 0$, καταλαμβάνει μian άλλη θέση στο χώρο, που συνιστά την τρέχουσα απεικόνισή του $\mathbf{C}^{(t)}$. Στη νέα αυτή θέση του σώματος \mathbf{B} το υλικό σημείο \mathbf{X} έχει τις συντεταγμένες

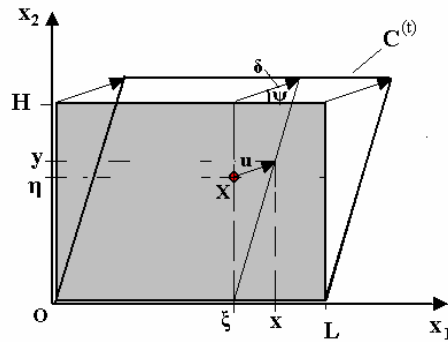
$$x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = z \quad (4.60)$$

που θεωρούνται συνεχείς συναρτήσεις των αρχικών συντεταγμένων το υλικού σημείου \mathbf{X} και του χρόνου t ,

$$x = \chi_1(\xi, \eta, \zeta, t), \quad y = \chi_2(\xi, \eta, \zeta, t), \quad z = \chi_3(\xi, \eta, \zeta, t) \quad (4.61)$$

Η νέα θέση του τυχόντος υλικού σημείου μπορεί να εκφρασθεί και μέσω των συνιστωσών του διανύσματος της μετατοπίσεως του υλικού σημείου

$$u_1 = \chi_1(\xi, \eta, \zeta, t) - \xi, \quad u_2 = \chi_2(\xi, \eta, \zeta, t) - \eta, \quad u_3 = \chi_3(\xi, \eta, \zeta, t) - \zeta \quad (4.62)$$



Εικ. 4-7: Απλή διασταλτική διάτμηση.

Για παράδειγμα θεωρούμε την απλή διάτμηση ενός αρχικά ορθογωνικού φορέα (Εικ. 4-7) οπότε στην ειδική αυτή περίπτωση έχουμε,

$$u_1 = \eta \frac{\delta}{H} \cos \psi, \quad u_2 = \eta \frac{\delta}{H} \sin \psi, \quad u_3 = 0 \quad (4.63)$$

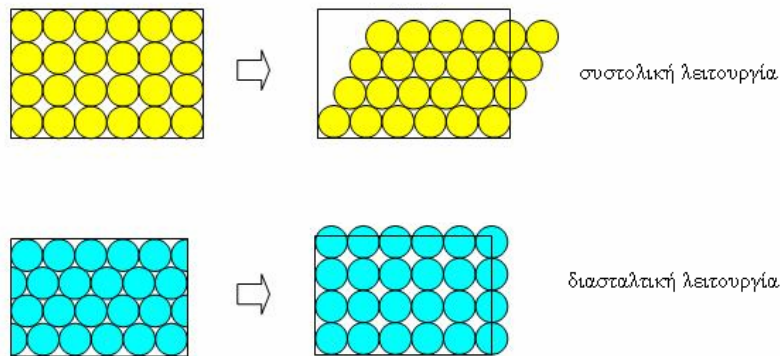
Οι κινηματικές παράμετροι δ και ψ μπορούν να θεωρηθούν ως συναρτήσεις του χρόνου,

$$\delta = HK(t), \quad \psi = \psi(t) \quad (4.64)$$

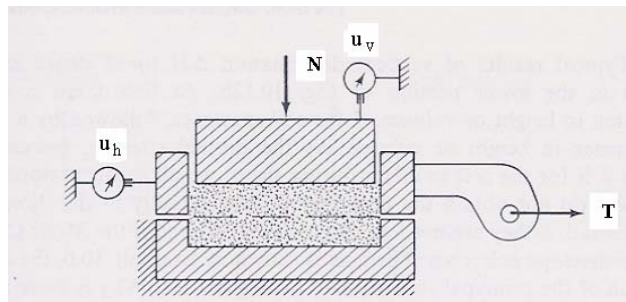
με την αρχική συνθήκη,

$$K(0) = 0 \quad (4.65)$$

μια τέτοια παραμόρφωση καλείται *απλή διασταλτική διάτμηση*²¹. Η συνάρτηση $\psi(t)$ περιγράφει τη *γωνία διασταλτικότητας* του υλικού²². Διασταλτική διάτμηση παρατηρείται π.χ. σε κοκκώδη υλικά²³. Μια τέτοια παραμόρφωση και θα μπορούσε να υλοποιηθεί σε μια συσκευή κατ' ευθείαν διατμήσεως (Εικ. 4-9).



Εικ. 4-8: Σχηματική εικόνα συστολικής/διασταλτικής λειτουργίας που οδηγεί από την κανονική χαλαρή/πυκνή συσκευασία ομοειδών σφαιρών στην αντίστοιχη πυκνή/χαλαρή



Εικ. 4-9: Σχηματική παράσταση της συσκευής Casagrande, κατ' ευθείαν διατμήσεως εδαφικού δοκιμίου

Παρατηρούμε ότι αν $\psi(t) = 0$, τότε έχουμε την περίπτωση της λεγόμενης απλής διατμήσεως. Στην περίπτωση αυτή

$$K = \frac{\delta}{H} = \tan \gamma(t) \quad (4.66)$$

²¹ Αγγλ. *dilatant simple shear*

²² Αγγλ. *dilatancy angle*

²³ Πρβλ. <http://geolab.mechan.ntua.gr/teaching/lectnotes.html#soilmech>, Κεφ.3.

όπου η συνάρτηση $\gamma(t)$ περιγράφει τη γωνία διατμήσεως.

Οι παραπάνω γενικές σχέσεις για την κίνηση του υλικού σημείου, Εξ. (4.61), στο παράδειγμα της διασταλτικής διατμήσεως γράφονται αντιστοίχως ως εξής,

$$\begin{aligned}x_1 &= \xi_1 + \xi_2 K(t) \cos \psi(t) \\x_2 &= \xi_2 + \xi_2 K(t) \sin \psi(t) \\x_3 &= \xi_3\end{aligned}\quad (4.67)$$

Όπως ήδη αναφέραμε και εισαγωγικά η κίνηση των υλικών σημείων ενός σώματος \mathbf{B} θα περιγράφεται γενικώς από μία διανυσματική συνάρτηση της μορφής $x_i = \chi_i(\xi_k, t)$, τη λεγόμενη συνάρτηση κινήσεως. Επειδή επιλέξαμε την αρχική απεικόνιση του σώματος ως απεικόνιση αναφοράς η συνάρτηση κινήσεως πρέπει να ικανοποιεί την αρχική συνθήκη,

$$\chi_i(\xi_k, 0) = \xi_i \quad (4.68)$$

Η μερική παράγωγος της κινήσεως ως προς τις συντεταγμένες των υλικών σημείων στην απεικόνιση αναφοράς καλείται *βαθμίδα της παραμορφώσεως*²⁴ και συμβολίζεται ως εξής

$$F_{ij} = \frac{\partial}{\partial \xi_j} \chi_i(\xi_k, t) = \nabla_j \chi_i \quad (4.69)$$

όπου

$$\nabla_j \equiv \frac{\partial}{\partial \xi_j} \quad (4.70)$$

Στο συγκεκριμένο παράδειγμα της απλής διασταλτικής διατμήσεως έχουμε αντιστοίχως,

$$[F] = \begin{bmatrix} 1 & K(t) \cos \psi(t) & 0 \\ 0 & 1 + K(t) \sin \psi(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.71)$$

Γενικώς δε έχουμε την εξής σχέση μεταξύ της βαθμίδας της παραμορφώσεως και βαθμίδας της μετατοπίσεως

$$F_{ij} = \delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial \xi_j} \quad (4.72)$$

Όπως γνωρίζουμε ήδη από την Τεχνική Μηχανική²⁵ η βαθμίδα της παραμορφώσεως F_{ij} δεν περιγράφει αμιγώς την παραμόρφωση αλλά εμπεριέχει και την πληροφορία για τη στροφή της υλικής περιοχής του υλικού σημείου. Στην εισαγωγική αυτή παράγραφο θα περιορισθούμε στην περιγραφή μικρών παραμορφώσεων. Σε επόμενο κεφάλαιο θα επεκτείνουμε την ανάλυση και για μεγάλες παραμορφώσεις.

Για μικρές παραμορφώσεις ισχύει η προσθετική ανάλυση της βαθμίδας παραμορφώσεως,

²⁴ Αγγλ. *deformation gradient*

²⁵ Πρβλ. Ι.Βαρδουλάκης, *Τεχνική Μηχανική II*, Κεφ. 3, Εκδ. Συμμετρία, 1998.

$$\mathbf{F} = \mathbf{I} + \mathbf{E} + \mathbf{\Omega} \quad (4.73)$$

όπου \mathbf{I} είναι ο μοναδιαίος τανυστής, \mathbf{E} είναι ο απειροστικός τανυστής των τροπών

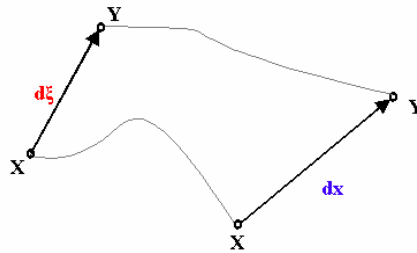
$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) \quad (4.74)$$

και $\mathbf{\Omega}$ είναι ο απειροστικός τανυστής των στροφών

$$\mathbf{\Omega} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} - \nabla \mathbf{u}^T) \quad (4.75)$$

Για την ερμηνεία της παραπάνω αναλύσεως της βαθμίδας παραμορφώσεως, Εξ. (4.73) έως (4.75), παρατηρούμε κατ' αρχήν ότι η βαθμίδα της παραμορφώσεως μπορεί να θεωρηθεί ως ο τελεστής εκείνος, ο οποίος απεικονίζει ένα υλικό γραμμωτό στοιχείο $d\xi$ στην απεικόνιση αναφοράς $C^{(0)}$ στο υλικό γραμμωτό στοιχείο $d\mathbf{x}$ στην τρέχουσα απεικόνιση $C^{(t)}$ (Εικ. 4-10),

$$dx_i = \frac{\partial \chi_i}{\partial \xi_k} d\xi_k = F_{ik} d\xi_k \quad \text{ή} \quad d\mathbf{x} = \mathbf{F}d\xi \quad (4.76)$$

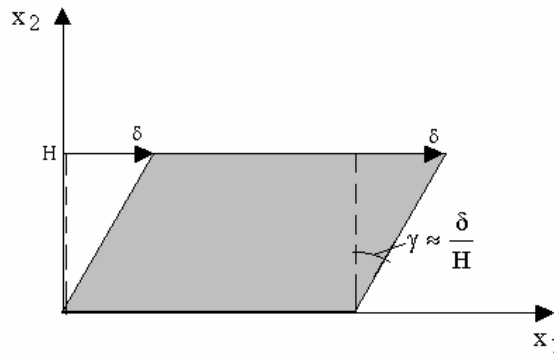


Εικ. 4-10: Κίνηση γραμμωτού στοιχείου

Οπότε ο πρώτος όρος στην Εξ. (4.73) αντιστοιχεί στην απεικόνιση που αφήνει το στοιχείο $d\xi$ αναλλοίωτο

$$\delta_{ik} d\xi_k = d\xi_i \quad \text{ή} \quad \mathbf{I}d\xi = d\xi \quad (4.77)$$

Ο δεύτερος όρος στη Εξ. (4.73) αντιστοιχεί σε καθαρή παραμόρφωση και ο τρίτος σε στροφή στερεού σώματος. Αυτό γίνεται φανερό αν ξαναγυρίσουμε στο παράδειγμα της απλής απειροστικής ισόχωρης διάτμησης (Εικ. 4-11).



Εικ. 4-11: Απλή (ισόχωρη) απειροστική διάτμηση

Πράγματι, χάριν απλότητας θα θεωρήσουμε την ειδική εκείνη περίπτωση απλής διατμήσεως, όπου ο όγκος του υλικού παραμένει σταθερός. Αυτό εξασφαλίζεται με την προϋπόθεση ότι η γωνία διασταλτικότητας είναι μηδέν,

$$\psi = 0 \quad (\text{απλή διάτμηση}) \quad (4.78)$$

Ως εκ τούτου στην περίπτωση της απλής διατμήσεως η βαθμίδα της παραμορφώσεως δίδεται από τον εξής πίνακα,

$$[F] = \begin{bmatrix} 1 & K(t) & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.79)$$

Για μικρές παραμορφώσεις παρατηρούμε ότι η ποσότητα $K(t)$ ταυτίζεται με τη γωνία διατμήσεως. Πράγματι από τη σχέση

$$\gamma = \arctan\left(\frac{\delta}{H}\right) = \arctan(K(t)) \quad (4.80)$$

και την υπόθεση μικρών παραμορφώσεων $0 < \gamma \ll 1$ (απειροστική διάτμηση) έπεται

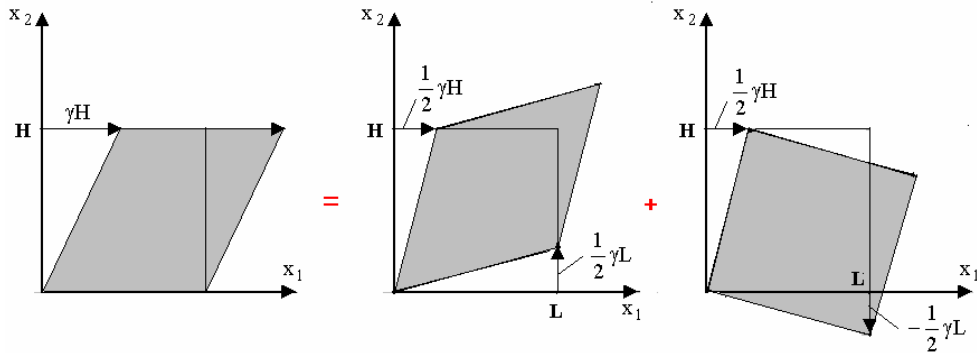
$$\gamma \approx K(t) \quad (4.81)$$

Στην περίπτωση αυτή ισχύει η προσθετική ανάλυση της βαθμίδας παραμορφώσεως

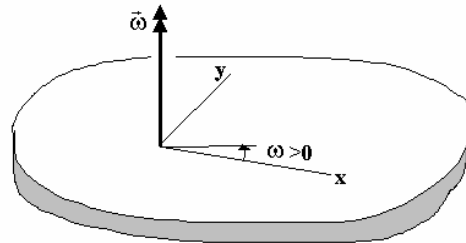
$$[F] = [I] + [E] + [\Omega] \quad (4.82)$$

όπου εμ' προκειμένω,

$$[E] = \begin{bmatrix} 0 & \gamma/2 & 0 \\ \gamma/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [\Omega] = \begin{bmatrix} 0 & \gamma/2 & 0 \\ -\gamma/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.83)$$



Εικ. 4-12: Γραφική ανάλυση της απλής απειροστικής διάτμησης σε καθαρή απειροστική διάτμηση και απειροστική στροφή.



Εικ. 4-13: Το διάνυσμα της στροφής είναι κάθετο στο επίπεδο $O(x, y)$

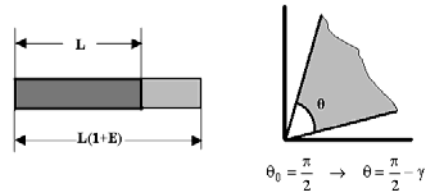
Η παραπάνω ανάλυση, Εξ. (4.82), είναι δυνατόν να παρασταθεί γεωμετρικά σε ένα σχήμα, όπου φαίνεται ξεκάθαρα ότι για μικρές τιμές της γωνίας διατμήσεως η απλή διάτμηση είναι μια υπέρθεση μίας *καθαρής διατμήσεως* και μίας *καθαρής στροφής* (Εικ. 4-12). Παρατηρούμε δε ότι στη στροφή της πλάκας ως απολύτως στερεού σώματος αντιστοιχεί η γωνία στροφής (Εικ. 4-13),

$$\omega = -\frac{1}{2}\gamma \quad (4.84)$$

Το παραπάνω παράδειγμα της απειροστικής απλής διατμήσεως δείχνει πράγματι ότι *τοπικά* (δηλ. στην εγγύς περιοχή ενός υλικού σημείου) η παραμόρφωση ενός σώματος αναλύεται σε

μία στροφή και σε μια καθαρή παραμόρφωση της εγγύς αυτής περιοχής του εν λόγω υλικού σημείου.

Υπενθυμίζουμε ότι η καθαρή παραμόρφωση αφορά στην αλλαγή μηκών και γωνιών (Εικ. 4-14).



Εικ. 4-14: Αλλαγή μήκους και αλλαγή ορθής γωνίας

Άσκηση²⁶

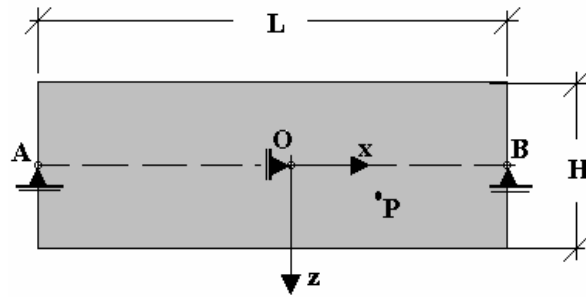
Θεωρούμε μια επίπεδη πλάκα ανοίγματος L , ύψους H και μεγάλου πάχους στην τρίτη διάσταση. Τα ακραία σημεία A και B στον άξονα του σώματος μπορούν να μετατοπισθούν οριζόντια αλλά όχι κατακόρυφα. Το κέντρο O δεν μετακινείται οριζόντια (Εικ. 4-15). Δεχόμεθα ότι το διάνυσμα μετατοπίσεως του τυχαίου σημείου $P(x,z)$ δίδεται από τις εξής σχέσεις:

$$\begin{aligned} u_x &= \varepsilon_0 x + \frac{1}{R} xz \\ u_y &= 0 \\ u_z &= \nu' \left(\varepsilon_0 z - \frac{1}{2R} z^2 \right) - \frac{1}{2R} \left(x^2 - \left(\frac{L}{2} \right)^2 \right) \end{aligned} \quad (4.85)$$

όπου ε_0, R, ν' είναι σταθερές ποσότητες. Να υπολογισθούν οι απειροστικές τροπές και στροφές που αντιστοιχούν στο παραπάνω πεδίο μετατοπίσεων και να χαρακτηριστεί η παραμόρφωση του φορέα²⁷.

²⁶ Πρβλ. C. Truesdell and R. Toupin, *The Classical Field Theories*, Handbuch der Physik, Bd. III/1, Sect. 50, Springer, 1960

²⁷ Το πρόβλημα αυτό αφορά στην παραμόρφωση μιας δοκού κάτω από συνθήκες καθαρής κάμψεως. Πρβλ. Ι. Βαρδουλάκης, *Τεχνική Μηχανική II*, Εκδ. Συμμετρία, 1998.



Εικ. 4-15: Απεικόνιση αναφοράς επίπεδου ορθογώνιου παραλληλόγραμμου σώματος.

4.4 Το θεώρημα της πολικής ανάλυσεως²⁸

Ορισμοί²⁹

Ένας τετραγωνικός πίνακας $[F]$ καλείται *ομαλός ή μη-ιδιόμορφος*, όταν η ορίζουσά του είναι διάφορη του μηδενός,

$$\det(F) \neq 0 \quad (4.86)$$

Ένας συμμετρικός πίνακας

$$[A] = [A]^T \quad (4.87)$$

με στοιχεία A_{ij} λέγεται *θετικά ορισμένος*, όταν,

$$\forall x_i \neq 0: A_{ij}x_i x_j > 0 \quad (4.88)$$

Θεώρημα

Έστω $[F]$ ένας ομαλός τετραγωνικός πίνακας. Το Θεώρημα της *Πολικής Ανάλυσεως*³⁰ επιτάσσει ότι ο πίνακας αυτός μπορεί να αναλυθεί πολλαπλασιαστικά και αμφισήμαντα ως γινόμενο ενός ορθογωνίου πίνακα $[R]$, και ενός συμμετρικού, θετικά ορισμένου πίνακα,

$$[F] = [R][U] = [V][R] \quad (4.89)$$

όπου οι πίνακες $[R]$, $[U]$ και $[V]$ καθορίζονται μονοσήμαντα. Ο πίνακας $[U]$ αντιστοιχεί στη λεγόμενη *δεξιά πολική ανάλυση* του $[F]$, ενώ ο πίνακας $[V]$ αντιστοιχεί στην *αριστερή*

²⁸ Το θεώρημα αυτό αποδίδεται στους J.Finger (1892) και E. & F. Cosserat (1896), πρβλ. J.L. Ericksen, *Tensor Fields*, sect. 43. Appendix: to C.Truesdell and R. Toupin *Classical Field Theories*, Handbuch der Physik, Springer, 1960. Η εδώ παρατιθέμενη απόδειξη βασίζεται στο σχετικό κεφάλαιο από το βιβλίο των M. A. Aklonis and V.V. Goldberg, *An Introduction to Linear Algebra and Tensors*, Dover, sect. 25, 1972.

²⁹ Πρβλ. Κεφ. 1.8 και Κεφ.2.1.

³⁰ Αγγλ. *polar decomposition theorem*, Γερμ. *Polarzerlegungssatz*.

πολική ανάλυση του $[F]$. Όταν ο πίνακας $[F]$ είναι συμμετρικός τότε οι πίνακες $[U]$, και $[V]$ ταυτίζονται,

$$[F] = [F]^T \Leftrightarrow [U] = [V] \quad (4.90)$$

Εδώ θα θεωρήσουμε μόνο τη δεξιά πολική ανάλυση του πίνακα $[F]$:

$$[F] = [R][U] \quad (4.91)$$

Η απόδειξη για την αριστερή πολική ανάλυση είναι πανομοιότυπη.

Απόδειξη:

Έστω \mathbf{F}^T ο ανάστροφος του \mathbf{F} :

$$[F^T] = [F]^T \Leftrightarrow F_{ij}^T = F_{ji} \quad (4.92)$$

Παρατηρούμε ότι ο πίνακας

$$[C] = [F]^T [F] \Leftrightarrow C_{ij} = F_{ki} F_{kj} \quad (4.93)$$

είναι συμμετρικός. Πράγματι,

$$\left([F]^T [F]\right)^T = [F]^T \left([F]^T\right)^T = [F]^T [F] \quad (4.94)$$

Ως εκ τούτου ο $[C]$ έχει στη γενική περίπτωση τρία διακεκριμένα και κάθετα μεταξύ τους ιδιοδιανύσματα, $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$, στα οποία αντιστοιχούν οι πραγματικές ιδιοτιμές c_i , ($i' = 1, 2, 3$),

$$[C]\{\bar{e}_{i'}\} = c_{i'}\{\bar{e}_{i'}\} \quad (4.95)$$

ή ³¹

$$C_{ij} e_j^{(i')} = F_{ki} F_{kj} e_j^{(i')} = c_{i'} e_i^{(i')} \quad (4.96)$$

Επίσης παρατηρούμε ότι ιδιοτιμές c_i , ($i' = 1, 2, 3$) είναι θετικοί αριθμοί. Πράγματι, π.χ. για $\bar{e}^{(1)} \neq \bar{0}$, έχουμε

$$c_1 = c_1 e_i^{(1)} e_i^{(1)} = F_{ki} F_{kj} e_j^{(1)} e_i^{(1)} = (F_{kj} e_j^{(1)}) (F_{ki} e_i^{(1)}) > 0 \quad (4.97)$$

ή

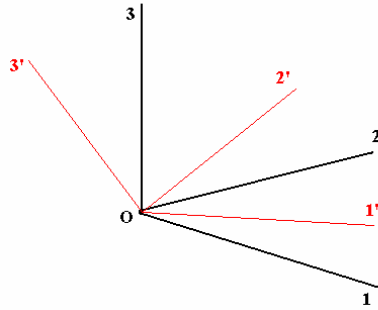
$$c_1 = (\mathbf{F} \mathbf{e}^{(1)}) \cdot (\mathbf{F} \mathbf{e}^{(1)}) > 0$$

Αν υποθέσουμε ότι $\mathbf{F} \mathbf{e}^{(1)} = \mathbf{0}$ για $\mathbf{e}^{(1)} \neq \mathbf{0}$, τότε προκύπτει αντίφαση με την αρχική υπόθεση ότι $\det[F] \neq 0$. Άρα,

³¹ Υπενθυμίζουμε ότι όταν τοποθετείται ένας δείκτης σε παρένθεση, τότε δεν πραγματοποιείται η άθροιση πάνω σ' αυτόν το δείκτη.

$$C_{ij}e_i^{(k')}e_j^{(k')} > 0 \quad (4.98)$$

γεγονός που σημαίνει ότι ο $[C]$ είναι θετικώς ορισμένος.



Εικ. 4-16: Το σύστημα $O(x_1, x_2, x_3)$ των κυρίων αξόνων του πίνακα $[C]$

Θεωρούμε το καρτεσιανό σύστημα αξόνων $O(x_1, x_2, x_3)$, του οποίου τα διανύσματα βάσεως ταυτίζονται με τα μοναδιαία ιδιοδιανύσματα, $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$, του $[C]$. (Εικ. 4-16). Στο σύστημα αυτό των κυρίων αξόνων του $[C]$ ορίζουμε ένα διαγώνιο, θετικά ορισμένο πίνακα $[U']$ έτσι ώστε,

$$[U'] = [C]^{1/2} = \begin{bmatrix} \sqrt{c_1} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{c_2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{c_3} \end{bmatrix} \quad (4.99)$$

Θεωρούμε τον ορθογώνιο μετασχηματισμό από το αρχικό καρτεσιανό σύστημα $O(x_1, x_2, x_3)$ στο σύστημα των κυρίων αξόνων του $[C]$, $O(x_1', x_2', x_3')$. Με

$$\bar{R} = x_i \bar{e}_i = x_i' \bar{e}_i' \Rightarrow x_i' = \bar{R} \cdot \bar{e}_i' = (\bar{e}_i' \cdot \bar{e}_k) x_k \quad (4.100)$$

έχουμε

$$x_i' = Q_{i'k} x_k \quad (4.101)$$

όπου

$$Q_{i'k} = \bar{e}_i' \cdot \bar{e}_k \quad (4.102)$$

είναι τα συνημίτονα κατευθύνσεως των ιδιοδιανυσμάτων του $[C]$.

Παρατηρούμε ότι ο πίνακας των συνημίτονων κατευθύνσεως $[Q]$ είναι ορθογώνιος,

$$\begin{aligned}
Q_{i'k} Q_{i'l} &= \delta_{kl} \Rightarrow \\
Q_{j'k} Q_{i'k} Q_{i'l} &= Q_{j'k} \delta_{kl} = Q_{j'l} \Rightarrow \\
Q_{i'k} Q_{j'k} &= \delta_{i'j'}
\end{aligned} \tag{4.103}$$

Άρα

$$\begin{aligned}
([U'])_{ij} &= U_{i'j'} \bar{e}_{i'} \otimes \bar{e}_{j'} = U_{i'j'} Q_{i'k} \bar{e}_k \otimes Q_{j'l} \bar{e}_l \\
&= U_{i'j'} Q_{i'k} Q_{j'l} \bar{e}_k \otimes \bar{e}_l = U_{kl} \bar{e}_k \otimes \bar{e}_l \Rightarrow U_{kl} = U_{i'j'} Q_{i'k} Q_{j'l}
\end{aligned} \tag{4.104}$$

και

$$\begin{aligned}
U_{kl} Q_{p'k} Q_{q'l} &= U_{i'j'} Q_{i'k} Q_{j'l} Q_{p'k} Q_{q'l} \\
&= U_{i'j'} \delta_{i'p'} \delta_{j'q'} = U_{p'q'} \Rightarrow U_{p'q'} = U_{kl} Q_{p'k} Q_{q'l}
\end{aligned} \tag{4.105}$$

Επειδή ο διαγώνιος πίνακας $[U']$ είναι και τετριμμένα συμμετρικός, τότε ο πίνακας $[U]$, που προκύπτει από αυτόν, αν πραγματοποιήσουμε τον παραπάνω μετασχηματισμό, είναι επίσης συμμετρικός,

$$U_{kl} = U_{i'j'} Q_{i'k} Q_{j'l} = U_{j'i'} Q_{i'k} Q_{j'l} = U_{j'i'} Q_{j'l} Q_{i'k} = U_{lk} \tag{4.106}$$

Επίσης παρατηρούμε ότι ο πίνακας

$$[U]^2 = [U]^T [U] \tag{4.107}$$

στο σύστημα $O(x_1, x_2, x_3)$ είναι επίσης διαγώνιος,

$$[U']^2 = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 \end{bmatrix} = [C'] \tag{4.108}$$

Άρα

$$\begin{aligned}
([U']^2)_{ij} &= U_{ki} U_{kj} = U_{m'n'} Q_{km'} Q_{in'} U_{r's'} Q_{kr'} Q_{js'} \\
&= U_{m'n'} U_{r's'} \delta_{m'r'} Q_{in'} Q_{js'} = U_{r'n'} U_{r's'} Q_{in'} Q_{js'} \Rightarrow
\end{aligned} \tag{4.109}$$

$$[Q]^T [C'] [Q] = [C] \tag{4.110}$$

και

$$U_{ki} U_{kj} = C_{ij} = F_{ki} F_{kj} \Rightarrow [C] = [U]^2 = [F]^T [F] \tag{4.111}$$

Παρατηρούμε ότι για την αριστερή πολική ανάλυση του $[F]$ θα είχαμε αντιστοίχως

$$[B] = [V]^2 = [F] [F]^T \tag{4.112}$$

Επιστρέφοντας τώρα πάλι στη δεξιά πολική ανάλυση του $[F]$ έχουμε ότι,

$$[F] = \left([F^T] \right)^{-1} [U]^2 = \left([F^T]^{-1} [U]^T \right) [U] \quad (4.113)$$

Το θεώρημα θα έχει αποδειχθεί, αν καταδείξουμε ότι ο πίνακας,

$$[R] = [F^T]^{-1} [U]^T \quad (4.114)$$

είναι ορθογώνιος. Πράγματι,

$$\begin{aligned} [R]^T &= \left([F^T]^{-1} [\bar{U}]^T \right)^T = [U] \left([F^T]^{-1} \right)^T [\bar{U}] [\bar{F}]^{-1} \Rightarrow \\ [R][R]^T &= [F^T]^{-1} [U]^T [U] [F]^{-1} = [F^T]^{-1} [U]^2 [F]^{-1} \\ &= [F^T]^{-1} [F]^T [F] [F]^{-1} = [I][I] = [I] \end{aligned} \quad (4.115)$$

ο.ε.δ.

Παρατήρηση

Το παραπάνω θεώρημα πολικής ανάλυσεως ομαλού τετραγωνικού πίνακα, $[F]=[R][U]$ περιορίζει τον πίνακα $[R]$ στο να είναι απλώς ορθογώνιος, δηλαδή $\det[R]=\pm 1$. Όπως αναφέραμε ήδη, το θετικό πρόσημο αντιστοιχεί σε στροφή, ενώ το αρνητικό πρόσημο αντιστοιχεί σε κατοπτρισμό. Το πρόσημο του πίνακα $[R]$ εξαρτάται από το πρόσημο της ορίζουσας του πίνακα $[F]$, αφού

$$\det[F] = \det([R][U]) = \det[R] \det[U] \quad (4.116)$$

και ο πίνακας $[U]$ είναι θετικά ορισμένος, $\det[U] > 0$.

Θα δούμε παρακάτω ότι στην περίπτωση όπου ο $[F]$ είναι ο πίνακας της βαθμίδας παραμορφώσεως ενός πραγματικού σώματος, τότε έχουμε

$$\det[F] = \frac{dV}{dV^{(0)}} > 0 \quad (4.117)$$

όπου $dV^{(0)}$ και dV είναι οι όγκοι ενός απειροστικού υλικού στοιχείου στην απεικόνιση αναφοράς $C^{(0)}$ και στην τρέχουσα απεικόνιση $C^{(t)}$ αντιστοίχως. Οπότε διαπιστώνουμε ότι γενικώς μία παραμόρφωση θα περιλαμβάνει μια στροφή στερεού σώματος, που δίδεται από τον πίνακα $[R]$ και από τη δράση του $[U]$, που όπως θα δούμε παρακάτω είναι μία καθαρή παραμόρφωση. Αυτό σημαίνει τέλος ότι για μεγάλες παραμορφώσεις δεν ισχύει η αθροιστική ανάλυση της παραμορφώσεως σε στροφή και καθαρή παραμόρφωση, που παρουσιάσαμε στο Κεφ. 4.3, αλλά η πολική (πολλαπλασιαστική) ανάλυση. Πράγματι, μπορεί κανείς να αποδείξει ότι για μικρές παραμορφώσεις και στροφές η πολική ανάλυση προσεγγίζεται ικανοποιητικά από την αθροιστική ανάλυση.

Αριθμητικό Παράδειγμα

Έστω ο πίνακας

$$[F] = \begin{bmatrix} -\frac{36}{25} & \frac{2}{25} \\ \frac{23}{25} & \frac{36}{25} \end{bmatrix} \quad (4.118)$$

δεδομένος σε κάποια ορθοκανονική καρτεσιανή βάση \bar{e}_1, \bar{e}_2 . Για την πολική ανάλυση του $[F]$ υπολογίζουμε πρώτα τον πίνακα,

$$[C] = [F^T][F] = \begin{bmatrix} -\frac{36}{25} & -\frac{23}{25} \\ \frac{2}{25} & \frac{36}{25} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{36}{25} & \frac{2}{25} \\ \frac{23}{25} & \frac{36}{25} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{73}{25} & -\frac{36}{25} \\ -\frac{36}{25} & \frac{52}{25} \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας αυτός έχει την εξής χαρακτηριστική εξίσωση

$$\begin{vmatrix} \frac{73}{25} - c & -\frac{36}{25} \\ -\frac{36}{25} & \frac{52}{25} - c \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow c^2 - 5c + 4 = 0$$

Άρα οι ιδιοτιμές του πίνακα $[C]$ είναι οι ρίζες του παραπάνω τριώνυμου,

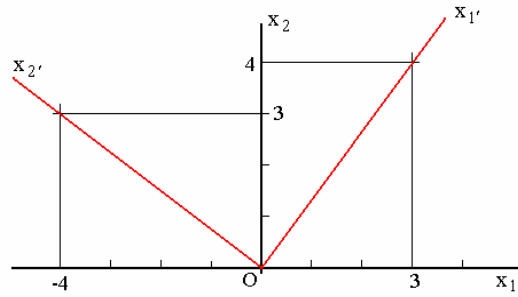
$$c_1 = 1, \quad c_2 = 4$$

Το ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $c_1 = 1$ υπολογίζεται ως εξής,

$$\begin{aligned} \left(\frac{73}{25} - c_1 \right) e_1^{(1)} - \frac{36}{25} e_2^{(1)} &= 0 \\ \Rightarrow \{ \bar{e}_1 \} &= \left\{ \begin{array}{c} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{array} \right\} \\ (e_1^{(1)})^2 + (e_2^{(1)})^2 &= 1 \end{aligned}$$

Ομοίως για $c = c_2$, έχουμε,

$$\{ \bar{e}_2 \} = \left\{ \begin{array}{c} -\frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \end{array} \right\}$$



Εικ. 4-17: Το σύστημα κυρίων αξόνων του πίνακα του παραδείγματος, Εξ. (4.118)

Παρατηρούμε τώρα στο σύστημα $O(x_1', x_2')$ των κ.α. του πίνακα $[C]$ ο πίνακας $[U]$ παίρνει τη μορφή,

$$[U'] = \begin{bmatrix} \sqrt{c_{1'}} & 0 \\ 0 & \sqrt{c_{2'}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Ο μετασχηματισμός από το σύστημα $O(x_1, x_2)$ στο σύστημα $O(x_1', x_2')$ δίδεται από τον ορθογώνιο πίνακα $[\bar{Q}]$ που υπολογίζεται ως εξής,

$$\begin{Bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{1'1} & Q_{1'2} \\ Q_{2'1} & Q_{2'2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}$$

όπου

$$Q_{1'1} = \bar{e}_1' \cdot \bar{e}_1, \quad Q_{1'2} = \bar{e}_1' \cdot \bar{e}_2$$

$$Q_{2'1} = \bar{e}_2' \cdot \bar{e}_1, \quad Q_{2'2} = \bar{e}_2' \cdot \bar{e}_2$$

Αντιστοίχως ο μετασχηματισμός ενός πίνακα $[U']$ στο σύστημα $O(x_1, x_2)$ σε ένα πίνακα $[U]$ στο σύστημα $O(x_1, x_2)$ δίδεται από το τύπο

$$[U] = [Q]^T [U'] [Q]$$

Στο συγκεκριμένο παράδειγμα έχουμε,

$$[Q] = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

οπότε,

$$[U] = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{41}{25} & -\frac{12}{25} \\ -\frac{12}{25} & \frac{34}{25} \end{bmatrix}$$

Τέλος κατασκευάζουμε τον ορθογώνιο πίνακα,

$$[R] = [F^T]^{-1} [U]^T$$

Παρατηρώντας ότι,

$$[F^T] = \begin{bmatrix} -\frac{36}{25} & -\frac{23}{25} \\ \frac{2}{5} & \frac{36}{25} \\ \frac{1}{5} & \frac{25}{25} \end{bmatrix}, \quad [F^T]^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{18}{25} & -\frac{23}{50} \\ \frac{1}{25} & \frac{18}{25} \\ \frac{1}{25} & \frac{25}{25} \end{bmatrix}$$

οπότε,

$$[R] = \begin{bmatrix} -\frac{18}{25} & -\frac{23}{50} \\ \frac{1}{25} & \frac{18}{25} \\ \frac{1}{25} & \frac{25}{25} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{41}{25} & -\frac{12}{25} \\ -\frac{12}{25} & \frac{34}{25} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{24}{25} & -\frac{7}{25} \\ \frac{7}{25} & \frac{24}{25} \\ -\frac{7}{25} & \frac{24}{25} \end{bmatrix}.$$

Άσκηση

Να πραγματοποιηθεί η πολική ανάλυση του πίνακα

$$[F] = \begin{bmatrix} \frac{16}{9} & \frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{14}{9} & -\frac{14}{9} & \frac{2}{9} \\ -\frac{5}{9} & \frac{14}{9} & \frac{16}{9} \end{bmatrix}$$

Να συνταχθεί ένα πρόγραμμα H/Y, που να επιτρέπει την πραγματοποίηση της πολικής αναλύσεως ενός ομαλού τετραγωνικού πίνακα.

Βιβλιογραφία

Gander, W. (1990). Algorithms for the polar decomposition. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, **11**, 1102–1115.

Higham, N. (1986). Computing the polar decomposition—with applications, *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, **7**, 1160–1174.

Higham, N. and Schreiber, R. (1990). Fast polar decomposition of an arbitrary matrix, *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, **11**, 648–655.

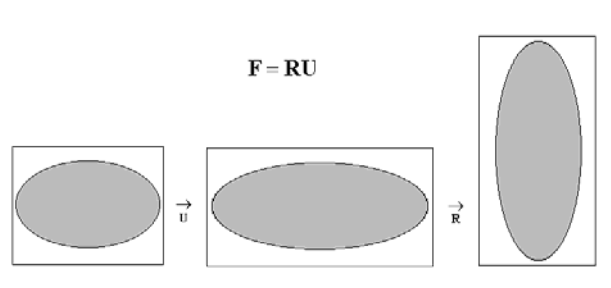
4.5 Τανυστές των τροπών σε περιγραφή κατά Lagrange

Για τον ορισμό των τανυστών των τροπών για μεγάλες παραμορφώσεις ξεκινάμε από την πολική ανάλυση της βαθμίδας παραμορφώσεως

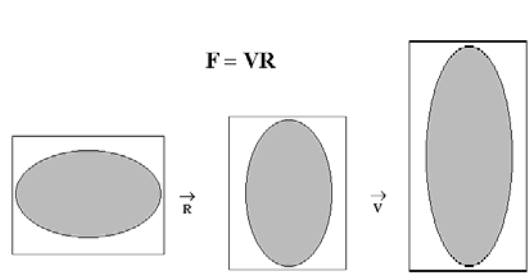
$$F = RU = VR \quad (4.119)$$

Υπενθυμίζουμε ότι ο \mathbf{R} είναι ένας κανονικός ορθογώνιος τανυστής και οι \mathbf{U} και \mathbf{V} (συμμετρικοί) θετικώς ορισμένοι. Εν προκειμένω ο \mathbf{R} καλείται *τανυστής των στροφών*³², ο \mathbf{U} *δεξιός τανυστής των τροπών*³³, και ο \mathbf{V} *αριστερός τανυστής των τροπών*³⁴.

Η δεξιά πολική ανάλυση αντιστοιχεί σε μία κατ' αρχήν τάνυση του σώματος που περιγράφεται από τον τανυστή \mathbf{U} , και σε μια επακόλουθη στροφή του σώματος που περιγράφεται από τον τανυστή \mathbf{R} (Εικ. 4-18). Αντίθετα η αριστερή πολική ανάλυση αντιστοιχεί σε μία κατ' αρχήν στροφή του σώματος που περιγράφεται από τον τανυστή \mathbf{R} και σε μια επακόλουθη τάνυση του σώματος που περιγράφεται από τον τανυστή \mathbf{V} (Εικ. 4-19).



Εικ. 4-18: Δεξιά πολική ανάλυση ως διαδοχική εφαρμογή της τάνυσεως \mathbf{U} , και της στροφής \mathbf{R} .



Εικ. 4-19: Αριστερή πολική ανάλυση ως διαδοχική εφαρμογή της στροφής \mathbf{R} και της τάνυσεως \mathbf{V} .

³² Αγγλ. *rotation tensor*

³³ Αγγλ. *right stretch tensor*

³⁴ Αγγλ. *left stretch tensor*

Η βαθμίδα παραμορφώσεως συνδέει το απειροστικό υλικό γραμμωτό στοιχείο $d\xi$ στην απεικόνιση αναφοράς $C^{(0)}$ με το αντίστοιχο στοιχείο dx στην τρέχουσα απεικόνιση $C^{(t)}$. Κάνοντας χρήση του συμβολισμού με δείκτες έχουμε,

$$x_i = \chi_i(\xi_k, t) \Rightarrow dx_i = \frac{\partial \chi_i}{\partial \xi_k} d\xi_k \quad (4.120)$$

ή

$$dx_i = F_{ik} d\xi_k, \quad F_{ik} = \frac{\partial \chi_i}{\partial \xi_k} \quad (4.121)$$

Τα μήκη των απειροστικών υλικών γραμμωτών στοιχείων στις δυο απεικονίσεις είναι αντιστοίχως

$$d\ell^{(0)} = \sqrt{d\xi_i d\xi_i}, \quad d\ell = \sqrt{dx_i dx_i} \quad (4.122)$$

οπότε,

$$\begin{aligned} d\ell^2 &= F_{ij} d\xi_j F_{ik} d\xi_k = (R_{il} U_{lj}) d\xi_j (R_{im} U_{mk}) d\xi_k = \delta_{lm} U_{lj} U_{mk} d\xi_j d\xi_k \\ &= U_{mj} U_{mk} d\xi_j d\xi_k \end{aligned} \quad (4.123)$$

Ορίζουμε τώρα τον τανυστή

$$C_{ij} = U_{mi} U_{mj} \rightarrow \mathbf{C} = \mathbf{U}^2 \quad (4.124)$$

ως τον τανυστή *Cauchy-Green* των τροπών και παρατηρούμε ότι:

$$C_{ij} = F_{ki} F_{kj} \rightarrow \mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} \quad (4.125)$$

και ότι

$$d\ell^2 = C_{ij} d\xi_i d\xi_j \quad (4.126)$$

Ο τανυστής

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{2} (C_{ij} - \delta_{ij}) \rightarrow \boldsymbol{\gamma} = \frac{1}{2} (\mathbf{C} - \mathbf{I}) \quad (4.127)$$

καλείται *Green* των τροπών, ο οποίος δίδει τη μεταβολή του μήκους του απειροστικού υλικού γραμμωτού στοιχείου,

$$\Delta d\ell^2 = d\ell^2 - d\ell^{(0)2} = 2\gamma_{ij} d\xi_i d\xi_j \quad (4.128)$$

Με την παρατήρηση ότι η βαθμίδα παραμορφώσεως μπορεί να εκφρασθεί συναρτήσει της βαθμίδας μετατοπίσεως,

$$F_{ij} = \delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial \xi_j} \quad (4.129)$$

παίρνουμε την εξής έκφραση για τις συνιστώσες του τανυστή τροπών Green,

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial \xi_j} + \frac{\partial u_j}{\partial \xi_i} + \frac{\partial u_k}{\partial \xi_i} \frac{\partial u_k}{\partial \xi_j} \right) \rightarrow \mathbf{U} = \sqrt{2\boldsymbol{\gamma} + \mathbf{I}} \quad (4.130)$$

Λαμβάνοντας τώρα υπόψη τον ορισμό του απειροστικού τανυστή των τροπών κατά Lagrange,

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial \xi_j} + \frac{\partial u_j}{\partial \xi_i} \right) \quad (4.131)$$

έπεται ότι³⁵

$$\gamma_{ij} = E_{ij} + \frac{1}{2} \frac{\partial u_k}{\partial \xi_i} \frac{\partial u_k}{\partial \xi_j} \rightarrow \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{E} + \mathbf{O}(|\nabla \mathbf{u}|^2) \quad (4.132)$$

Άρα, όταν η βαθμίδα των μετατοπίσεων είναι μικρή, τότε ο τανυστής των τροπών Green προσεγγίζεται από τον απειροστικό τανυστή των τροπών κατά Lagrange.

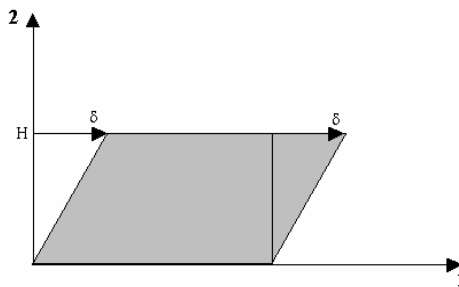
Άσκηση

Δίδεται ο τανυστής τροπών κατά Green,

$$[\bar{\boldsymbol{\gamma}}] = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Να υπολογισθεί ο αντίστοιχος δεξιός τανυστής των τροπών³⁶.

4.6 Απλή διάτμηση σε περιγραφή κατά Lagrange³⁷



Εικ. 4-20: Απλή διάτμηση σε περιγραφή κατά Lagrange

³⁵ Στην Εξ. (4.132) γίνεται χρήση του συμβόλου O-Landau (βλ. Παράρτημα Ι)

³⁶ Πρβλ. Κεφ. 2.2

³⁷ C. Truesdell and R. Toupin, *The Classical Field Theories*, Sect. 45., Handbuch der Physik, Springer, 1960

Στην περίπτωση απλής διατμήσεως έχουμε (Εικ. 4-20),

$$[F] = \begin{bmatrix} 1 & K & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, K > 0 \quad (4.133)$$

όπου

$$K = \frac{\delta}{H} \quad (4.134)$$

Οι τανυστές τροπών Cauchy-Green και Green για την παραμόρφωση αυτή έχουν ως εξής,

$$[C] = [F]^T [F] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ K & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & K & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & K & 0 \\ K & 1+K^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.135)$$

$$[\gamma] = \frac{1}{2}([C] - [I]) = \begin{bmatrix} 0 & K/2 & 0 \\ K/2 & K^2/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.136)$$

Η παραπάνω έκφραση, Εξ. (4.136), σημαίνει ότι η απλή διάτμηση είναι μία επίπεδη παραμόρφωση. Επίσης παρατηρούμε ότι η ορθή τροπή $\gamma_{22} = K^2/2$ δεν είναι αμελητέα ακόμα και αν η διάτμηση $|K| \ll 1$. Αυτό σημαίνει ότι μη-γραμμικοί όροι δεν είναι κατ' ανάγκη αμελητέοι απλώς και μόνον επειδή είναι μικροί αριθμοί.

Οι ιδιοτιμές του τανυστή $[C]$ δίδονται από τη χαρακτηριστική εξίσωση,

$$\alpha^3 - I_C \alpha^2 + II_C \alpha - III_C = 0 \quad (4.137)$$

όπου

$$\begin{aligned} I_C &= II_C = 3 + K^2 \\ III_C &= 1 \end{aligned} \quad (4.138)$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση δίδει,

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \lambda_1^2 = 1 + \frac{1}{2}K^2 + K\sqrt{1 + \frac{1}{4}K^2} \\ \alpha_2 &= \lambda_2^2 = 1/\lambda_1^2 = 1 + \frac{1}{2}K^2 - K\sqrt{1 + \frac{1}{4}K^2} \\ \alpha_3 &= \lambda_3^2 = 1 \end{aligned} \quad (4.139)$$

Τα αντίστοιχα μοναδιαία ιδιοδιανύσματα είναι αντιστοίχως

$$\vec{N}_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{2 + \frac{1}{2}K^2 \mp K\sqrt{1 + \frac{1}{4}K^2}}} \left(\vec{e}_1 + \left(\frac{1}{2}K \mp \sqrt{1 + \frac{1}{4}K^2} \right) \vec{e}_2 \right) \quad (4.140)$$

$$\vec{N}_3 = \vec{e}_3$$

Αντιστοίχως οι ιδιοτιμές του τανυστή Green είναι

$$\gamma_i = \alpha_i - 1 \quad (i=1,2,3) \quad (4.141)$$

ενώ οι ιδιοκατευθύνσεις αυτού ταυτίζονται με εκείνες του τανυστή Cauchy-Green (γιατί).

Τέλος παρατηρούμε ότι ο τανυστής της στροφής δίδεται από τον εξής πίνακα,

$$[R] = \begin{bmatrix} \cos \vartheta & \sin \vartheta & 0 \\ -\sin \vartheta & \cos \vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \cos \vartheta = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{4}K^2}} \quad (4.142)$$

Η στροφή στερεού σώματος γίνεται περί άξονα κάθετο στο επίπεδο της παραμορφώσεως.

Άσκηση

Η επίπεδη παραμόρφωση ενός Συνεχούς Μέσου δίδεται από το εξής πεδίο μετατοπίσεων

$$u_1 = u_2 = a(\xi_2 - \xi_1), \quad u_3 = 0$$

Να υπολογισθούν: α) Η βαθμίδα παραμορφώσεως $[F]$. β) Ο αριστερός και ο δεξιός τανυστής τροπών, $[V]$, $[U]$ και ο τανυστής στροφής $[R]$ στην περίπτωση όπου $|a| \ll 1$. γ) Ο τανυστής τροπών Green $[\bar{\gamma}]$.

4.7 Η λογαριθμική τροπή

Ένας άλλος χρήσιμος τανυστής τροπών είναι ο λεγόμενος *λογαριθμικός τανυστής τροπών Hencky*, που συμβολίζεται ως $[\lambda^r]$ ή λ_{ij}^r . Ο (δεξιός) τανυστής Hencky κατασκευάζεται ως εξής: Κατ' αρχήν υπολογίζουμε τις ιδιοτιμές και ιδιοκατευθύνσεις του δεξιού Cauchy-Green τανυστή των τροπών. Σε σύστημα κυρίων αξόνων έστω,

$$C_{ij'} = \delta_{ij'} c_{(j')} \quad (4.143)$$

Κατόπιν κατασκευάζουμε τον πίνακα,

$$\lambda^{r'} = \ln U' \Rightarrow [\lambda^r] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \ln c_1' & 0 & 0 \\ 0 & \ln c_2' & 0 \\ 0 & 0 & \ln c_3' \end{bmatrix} \quad (4.144)$$

Υπενθυμίζουμε ότι ο \mathbf{C} είναι ένας συμμετρικός, θετικώς ορισμένος πίνακας ($c_{i'j'} > 0$) και ότι $\mathbf{U} = \sqrt{\mathbf{C}}$.

Έστω $[\mathbf{Q}]$ ο ορθογώνιος πίνακας του μετασχηματισμού, από το τυχόν σύστημα αξόνων στο σύστημα των κ.α. του $[\mathbf{C}]$,

$$x_{i'} = Q_{i'j} x_j \quad (4.145)$$

Ο πίνακας των λογαριθμικών τροπών στο σύστημα αξόνων $O(x_i)$ ορίζεται ως εξής,

$$\lambda_{ij}^r = Q_{k'i} Q_{l'j} \lambda_{k'l}^{r'} \quad (4.146)$$

ή

$$[\lambda^r] = [\mathbf{Q}]^T [\bar{\lambda}^r] [\mathbf{Q}] \quad (4.147)$$

Η χρησιμότητα του λογαριθμικού τανυστή φαίνεται από το παρακάτω παράδειγμα: Ας θεωρήσουμε τη γνωστή από την Τεχνική Μηχανική, τεχνική τροπή³⁸,

$$\varepsilon = \frac{\Delta \ell}{\ell^{(0)}} \quad (4.148)$$

και ας θεωρήσουμε δύο διαδοχικές διαδικασίες, όπου η αλλαγή ενός γραμμωτού στοιχείου με αρχικό μήκος ℓ_0 είναι αντιστοίχως, $\Delta \ell_1$ και $\Delta \ell_2$. Στα πλαίσια της θεωρία πεπερασμένων παραμορφώσεων η επαλληλία αυτών των διαδικασιών δίδει,

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \frac{\Delta \ell_1}{\ell_0} + \frac{\Delta \ell_2}{\ell_0 + \Delta \ell_1} = \frac{\ell_0 \Delta \ell_1 + \ell_0 \Delta \ell_2 + (\Delta \ell_1)^2}{\ell_0 (\ell_0 + \Delta \ell_1)} \quad (4.149)$$

Η συνολική πεπερασμένη τροπή είναι όμως,

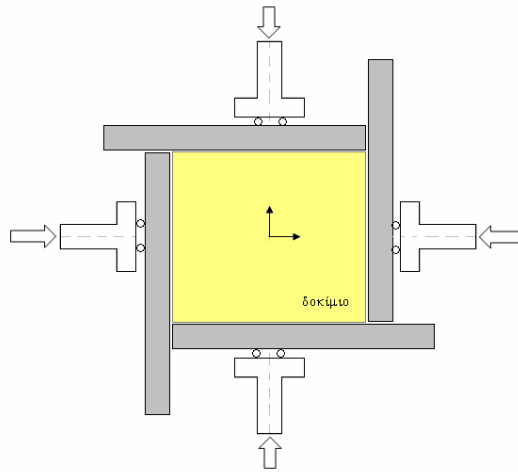
$$\varepsilon_{1+2} = \frac{\Delta \ell_1 + \Delta \ell_2}{\ell_0} = \frac{\ell_0 \Delta \ell_1 + \ell_0 \Delta \ell_2 + \Delta \ell_1 \Delta \ell_2}{\ell_0 (\ell_0 + \Delta \ell_1)} \neq \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \quad (4.150)$$

Άρα αν χρησιμοποιήσουμε το μέτρο Green, τότε δεν ισχύει η επαλληλία. Αντιθέτως, αν χρησιμοποιήσουμε το μέτρο Hencky, τότε βλέπουμε ότι η επαλληλία ισχύει,

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 &= \ln \left(1 + \frac{\Delta \ell_1}{\ell_0} \right) + \ln \left(1 + \frac{\Delta \ell_2}{\ell_0 + \Delta \ell_1} \right) = \ln \left(\frac{\ell_0 + \Delta \ell_1}{\ell_0} \frac{\ell_0 + \Delta \ell_1 + \Delta \ell_2}{\ell_0 + \Delta \ell_1} \right) \\ &= \ln \left(\frac{\ell_0 + \Delta \ell_1 + \Delta \ell_2}{\ell_0} \right) = \lambda_{1+2} \end{aligned} \quad (4.151)$$

³⁸ Αγγλ. *engineering strain*

4.8 Ορθογώνιες παραμορφώσεις³⁹



Εικ. 4-21: Συσκευή Hambly⁴⁰, επίπεδης ορθογωνικής παραμορφώσεως. Οι πλάκες επαφής είναι στιβαρές και λείες

Σε μία ορθογωνική παραμόρφωση ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο παραμένει ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο. Παραδείγματα ορθογωνίων παραμορφώσεων είναι τα ιδανικά πειράματα μονοαξονικού εφελκυσμού, μονοαξονικής ή τριαξονικής θλίψεως ή εφελκυσμού και ελεγχόμενης επίπεδης ή τρισδιάστατης ορθογωνικής παραμορφώσεως (Εικ. 4-21).

Σε μία ορθογώνια παραμόρφωση οι κύριοι άξονες του τανυστή των τροπών είναι σταθεροί στο χώρο και δεν υπάρχει στροφή. Στη περίπτωση αυτή η παραμόρφωση δίδεται από τις σχέσεις,

$$\begin{aligned} x_i &= \xi_i + a_{(i)}\xi_i \quad (i=1,2,3) \Rightarrow \\ u_i &= x_i - \xi_i = a_{(i)}\xi_i \end{aligned} \quad (4.152)$$

Στο σύστημα των κυρίων της αξόνων η βαθμίδα της ορθογωνίας παραμορφώσεως δίδεται από τον εξής πίνακα

$$[F] = \begin{bmatrix} 1+a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+a_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1+a_3 \end{bmatrix} \quad (4.153)$$

Από την παραπάνω έκφραση για τη βαθμίδα της παραμορφώσεως μπορούμε να υπολογίσουμε τις τροπή κατά Cauchy-Green

³⁹ Αγγλ. *rectilinear extension*

⁴⁰ Hambly, E.C. (1972). Plane strain behavior of remolded, normally consolidated kaolin. *Géotechnique*, 22, 301-317

$$[C] = [F]^T [F] = \begin{bmatrix} (1+a_1)^2 & 0 & 0 \\ 0 & (1+a_2)^2 & 0 \\ 0 & 0 & (1+a_3)^2 \end{bmatrix} \quad (4.154)$$

και τη λογαριθμική τροπή

$$[\lambda^r] = \begin{bmatrix} \ln(1+a_1) & 0 & 0 \\ 0 & \ln(1+a_2) & 0 \\ 0 & 0 & \ln(1+a_3) \end{bmatrix} \quad (4.155)$$

Η αντίστοιχη απειροστική τροπή κατά Lagrange είναι,

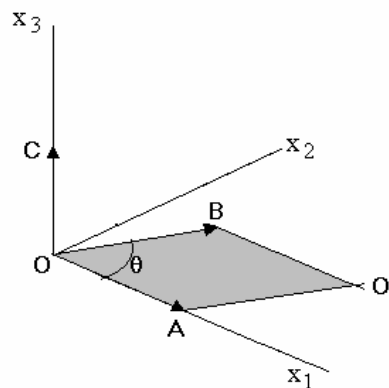
$$[E] = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{bmatrix} \quad (4.156)$$

Για μικρές παραμορφώσεις ($|a_i| \ll 1$) παρατηρούμε ότι η λογαριθμική τροπή και η απειροστική τροπή συμπίπτουν, π.χ.

$$\lambda_{11}^r = \ln(1+a_1) \approx a_1 = E_{11} \quad (4.157)$$

Έστω τώρα μία μαθηματική έκφραση όπου εμφανίζεται η απειροστική τροπή, $y = f(\dots, \mathbf{E})$. Αν θέλουμε να γενικεύσουμε την έκφραση αυτή ώστε να ισχύει και για μεγάλες παραμορφώσεις, τότε συνήθως θα δοκιμάσουμε να αντικαταστήσουμε την απειροστική με τη λογαριθμική τροπή $y = f(\dots, \boldsymbol{\lambda})$.

4.9 Η περιγραφή της παραμορφώσεως στοιχειωδών υλικών επιφανειών



Εικ. 4-22: Στοιχειώδης επιφάνεια που αναπτύσσεται από δύο διανύσματα

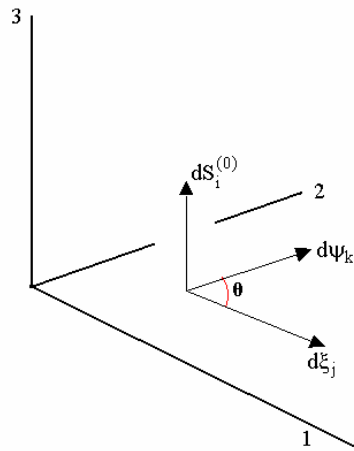
Στην απεικόνιση αναφοράς $C^{(0)}$ θεωρούμε δύο στοιχειώδη διανύσματα $\vec{OA} = d\vec{\xi}$ και $\vec{OB} = d\vec{\psi}$ (Εικ. 4-22). Επιλέγουμε τους άξονες του καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων έτσι ώστε τα διανύσματα αυτά να άπτονται της αρχής των αξόνων, το διάνυσμα $\vec{OA} = d\vec{\xi}$ να κείται επί του άξονα x_1 και το επίπεδο (x_1, x_2) να ταυτίζεται με το επίπεδο των εν λόγω διανυσμάτων. Έστω ότι το διάνυσμα $\vec{OB} = d\vec{\psi}$ σχηματίζει κατά τη θετική φορά γωνία θ με τον άξονα x_1 . Παρατηρούμε ότι το εμβαδόν του παραλληλογράμμου (OAO'B) που αναπτύσσεται από τα διανύσματα αυτά είναι,

$$(OAO'B) = (OA)(OB) \sin \theta \quad (4.158)$$

ή

$$dS^{(0)} = |d\vec{\xi}| |d\vec{\psi}| \sin \theta \quad (4.159)$$

Επίσης παρατηρούμε ότι μπορούμε να ορίσουμε ένα διάνυσμα \vec{OC} , κάθετο στο επίπεδο που αναπτύσσουν τα διανύσματα \vec{OA} και \vec{OB} , έτσι ώστε το μέτρο του να ισούται με το εμβαδόν του παραλληλογράμμου (OAO'B) και η φορά του να ταυτίζεται με τον θετικό άξονα x_3 . Με άλλα λόγια τα διανύσματα \vec{OA} , \vec{OB} και \vec{OC} συνθέτουν ένα δεξιόστροφο σύστημα.



Εικ. 4-23: Γεωμετρική απεικόνιση του εξωτερικού γινομένου δύο διανυσμάτων που αναπτύσσουν μια στοιχειώδη επιφάνεια

Έστω

$$\vec{OC} = d\vec{S}^{(0)}, \quad (OC) = dS^{(0)} \quad (4.160)$$

τότε το διάνυσμα αυτό ορίζεται από το εξωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων \vec{OA} , \vec{OB} (Εικ. 4-23),

$$\vec{OC} = \vec{OA} \times \vec{OB} \Leftrightarrow d\vec{S}^{(0)} = d\vec{\xi} \times d\vec{\psi} = \begin{vmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ d\xi_1 & d\xi_2 & d\xi_3 \\ d\psi_1 & d\psi_2 & d\psi_3 \end{vmatrix} \quad (4.161)$$

Πράγματι με δεδομένα τα στοιχειώδη διανύσματα,

$$\{d\vec{\xi}\}^T = \begin{Bmatrix} (OA) \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \{d\vec{\psi}\}^T = \begin{Bmatrix} (OB) \cos \theta \\ (OB) \sin \theta \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.162)$$

παίρνουμε

$$dS_i^{(0)} = \varepsilon_{ijk} d\xi_j d\psi_k = \varepsilon_{i1k} d\xi_1 d\psi_k = \varepsilon_{i12} (OA)(OB) \sin \theta \quad (4.163)$$

ή

$$\{d\vec{S}^{(0)}\}^T = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ (OC) \end{Bmatrix} \quad (4.164)$$

Άρα το διάνυσμα $d\vec{S}^{(0)}$ είναι κάθετο στο επίπεδο των διανυσμάτων $d\vec{\xi}$ και $d\vec{\psi}$ και έχει μέτρο το εμβαδόν του στοιχειώδους υλικού παραλληλογράμμου που αναπτύσσουν τα διανύσματα αυτά,

$$dS^{(0)} = \sqrt{dS_i^{(0)} dS_i^{(0)}} = |d\vec{\xi}| |d\vec{\psi}| \sin \theta \quad (4.165)$$

Τα στοιχεία $d\xi_j$ και $d\psi_k$, παραμορφώνονται στα στοιχεία dx_j και dy_k , αντιστοίχως, ενώ το στοιχείο $dS_i^{(0)}$ γίνεται,

$$dS_i = \varepsilon_{ijk} dx_j dy_k \rightarrow d\vec{S} = d\vec{x} \times d\vec{y} \quad (4.166)$$

Από τη σχέση,

$$dx_i = F_{ij} d\xi_j \Rightarrow d\xi_j = F_{jm}^{-1} dx_m \quad (4.167)$$

και⁴¹

⁴¹ Πρβλ. Κεφ. 1.5

$$dS_i^{(0)} = \varepsilon_{ijk} d\xi_j d\psi_k = \varepsilon_{ijk} \left(F_{jm}^{-1} dx_m \right) \left(F_{kn}^{-1} dy_n \right) \Rightarrow \quad (4.168)$$

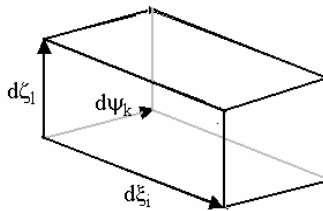
$$\begin{aligned} F_{ip}^{-1} dS_i^{(0)} &= \varepsilon_{ijk} F_{ip}^{-1} F_{jm}^{-1} F_{kn}^{-1} dx_m dy_n = \varepsilon_{pmn} \det[F^{-1}] dx_m dy_n \\ &= \det[F^{-1}] dS_p \Rightarrow \end{aligned} \quad (4.169)$$

$$dS_i = ad(\bar{F})_{ki} dS_k^{(0)} \quad (4.170)$$

Άρα το στοιχείο dS_i δίδεται μέσω του συμπληρωματικού⁴² πίνακα της βαθμίδας παραμορφώσεως,

$$\begin{aligned} F_{ij}^{-1} &= \frac{1}{\det[F]} ad(F)_{ij} \\ [ad(F)] &= \begin{bmatrix} F_{22}F_{33} - F_{23}F_{32} & F_{32}F_{13} - F_{33}F_{12} & F_{12}F_{23} - F_{13}F_{22} \\ F_{23}F_{31} - F_{21}F_{33} & F_{33}F_{11} - F_{31}F_{13} & F_{13}F_{21} - F_{11}F_{23} \\ F_{21}F_{32} - F_{22}F_{31} & F_{31}F_{12} - F_{32}F_{11} & F_{11}F_{22} - F_{12}F_{21} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.171)$$

4.10 Η περιγραφή της παραμορφώσεως στοιχειωδών υλικών όγκων



Εικ. 4-24: Στοιχειώδης όγκος που αναπτύσσεται από τρία διανύσματα στην απεικόνιση αναφοράς

Έστω $dV^{(0)}$ και dV δύο στοιχειώδεις όγκοι στις απεικονίσεις $C^{(0)}$ και $C^{(t)}$, αντιστοίχως (Εικ. 4-24),

$$dV^{(0)} = (d\bar{\xi} \times d\bar{\psi}) \cdot d\bar{\zeta} = \begin{vmatrix} d\xi_1 & d\xi_2 & d\xi_3 \\ d\psi_1 & d\psi_2 & d\psi_3 \\ d\zeta_1 & d\zeta_2 & d\zeta_3 \end{vmatrix} \leftrightarrow dV^{(0)} = \varepsilon_{ijk} d\xi_i d\psi_j d\zeta_k \quad (4.172)$$

⁴² Αγγλ. *adjoint*

$$dV = \varepsilon_{ijk} dx_i dy_j dz_k \quad (4.173)$$

Η παραμόρφωση του $dV^{(0)}$ υπολογίζεται από τη σχέση,

$$dV^{(0)} = \varepsilon_{ijk} F_{ip}^{-1} F_{jm}^{-1} F_{kn}^{-1} dx_p dy_m dz_n = \varepsilon_{pmn} \det([F^{-1}]) dx_p dy_m dz_n \quad (4.174)$$

ή

$$dV^{(0)} = \det[F^{-1}] dV \quad (4.175)$$

Συμβολίζοντας την *Ιακωβιανή* της παραμορφώσεως με

$$J = \det[F] = \begin{vmatrix} \frac{\partial \chi_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial \chi_1}{\partial \xi_2} & \frac{\partial \chi_1}{\partial \xi_3} \\ \frac{\partial \chi_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial \chi_2}{\partial \xi_2} & \frac{\partial \chi_2}{\partial \xi_3} \\ \frac{\partial \chi_3}{\partial \xi_1} & \frac{\partial \chi_3}{\partial \xi_2} & \frac{\partial \chi_3}{\partial \xi_3} \end{vmatrix} \quad (4.176)$$

έχουμε ότι,

$$dV = J dV^{(0)} \quad (4.177)$$

Η παραπάνω σχέση σημαίνει ότι για μεγάλες παραμορφώσεις ο λόγος όγκων στις δύο απεικονίσεις δίδεται από την ορίζουσα του πίνακα $[F]$

$$\frac{dV}{dV^{(0)}} = J = \det[F] \quad (4.178)$$

Η ογκομετρική τροπή ορίζεται ως εξής

$$\varepsilon_V^L = \frac{dV - dV_0}{dV_0} \quad (4.179)$$

Άρα

$$\varepsilon_V^L = \det[F] - 1 \quad (4.180)$$

Παρατηρούμε ότι από τη σχέση,

$$F_{ij} = \delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial \xi_j} \quad (4.181)$$

έπεται ότι,

$$J = 1 + \frac{\partial u_k}{\partial \xi_k} + O\left(\left|\frac{\partial u_i}{\partial \xi_k}\right|^2\right) \quad (4.182)$$

Δηλαδή για μικρές παραμορφώσεις έχουμε ότι,

$$\frac{dV}{dV^{(0)}} \approx 1 + E_{kk} \quad (4.183)$$

και

$$\varepsilon_V^L \approx E_{kk} \quad (4.184)$$

Δηλαδή ξαναβρίσκουμε το γνωστό από την Τεχνική Μηχανική αποτέλεσμα, ότι η ανηγμένη αλλαγή όγκου δίδεται κατά προσέγγιση από το *ίχνος* του απειροστικού τανυστή των τροπών, που ταυτίζεται με τη I^n αναλλοίωτό του,

$$\Theta = sp[E] = E_{kk} = I_E \quad (4.185)$$

Άσκηση

Να αποδειχθεί η παρακάτω σχέση για την ογκομετρική τροπή συναρτήσει των βασικών αναλλοίωτων του τανυστή Green:

$$\varepsilon_V^L = \sqrt{1 + 2I_G + 4\Pi_G + 8\Pi\Pi_G} - 1 \quad (\text{μέτρο Green}) \quad (4.186)$$

Λύση:

Από την Εξ. (4.180) παίρνουμε

$$\varepsilon_V^L = \det[F] - 1 = \sqrt{\det([F]^T[F])} - 1 = \sqrt{\det(2[G] + [I])} - 1$$

Έστω ο τανυστής Green σε σύστημα κυρίων αξόνων,

$$\mathbf{G} = \lambda_1 \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \lambda_2 \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \lambda_3 \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3$$

Οπότε

$$\begin{aligned} \det(2[G] + [I]) &= (1 + 2\lambda_1)(1 + 2\lambda_2)(1 + 2\lambda_3) \\ &= 1 + 2(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) + 4(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1) + 8\lambda_1\lambda_2\lambda_3 \end{aligned}$$

ο.ε.δ

4.11 Οι τανυστές τροπών σε περιγραφή κατά Euler

Κατά την περιγραφή της κινήσεως κατά Euler όλα τα μεγέθη θεωρούνται ότι είναι συναρτήσεις των χωρικών συντεταγμένων x_i του υλικού σημείου \mathbf{X} την χρονική στιγμή t , στη τρέχουσα απεικόνιση $C^{(t)}$ του σώματος \mathbf{B} . Έτσι, οι συντεταγμένες του υλικού σημείου στην απεικόνιση αναφοράς $C^{(0)}$ δίδονται από την αντίστροφη συνάρτηση της κινήσεως

$$\xi_i = \chi_i^{-1}(x_k, t) \quad (4.187)$$

Η σχέση αυτή οδηγεί στην αντίστροφη βαθμίδα της παραμορφώσεως

$$F_{ij}^{-1} = \frac{\partial}{\partial x_j} \chi_i^{-1}(x_k, t) = \partial_j \chi_i^{-1} \quad (4.188)$$

όπου

$$\partial_i \equiv \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (4.189)$$

Παρατηρούμε ότι Η ύπαρξη της F^{-1} εξασφαλίζεται από την υπόθεση ότι $\det[F] \neq 0$. Επίσης υπενθυμίζουμε την ιδιότητα του αντίστροφου,

$$F_{ik} F_{kj}^{-1} = \delta_{ij}, \quad F_{ik}^{-1} F_{kj} = \delta_{ij} \quad (4.190)$$

Παρατηρούμε ότι το διάνυσμα μετατοπίσεως μπορεί να γραφεί επίσης ως συνάρτηση των χωρικών συντεταγμένων (περιγραφή κατά Euler),

$$u_i = u_i^L(\xi_k, t) = u_i^L(\chi_k^{-1}(x_l, t), t) = u_i^E(x_k, t) \quad (4.191)$$

Οπότε,

$$x_i = \xi_i + u_i \Rightarrow \chi_i^{-1}(x_k, t) = x_i - u_i^E(x_k, t) \quad (4.192)$$

και

$$\frac{\partial \chi_i^{-1}(x_k, t)}{\partial x_j} = \frac{\partial x_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_i^E}{\partial x_j} \quad (4.193)$$

ή

$$F_{ij}^{-1} = \delta_{ij} - \partial_j u_i \quad (4.194)$$

Με την παρατήρηση ότι,

$$d\xi_i = F_{ij}^{-1} dx_j \quad (4.195)$$

έχουμε τις εξής σχέσεις όσον αφορά την μετρική των μηκών στις απεικονίσεις $C^{(t)}$ και $C^{(0)}$, αντιστοίχως,

$$\begin{aligned} d\ell &= \sqrt{dx_i dx_i} \\ d\ell^{(0)} &= \sqrt{d\xi_i d\xi_i} = \sqrt{F_{im}^{-1} F_{in}^{-1} dx_m dx_n} \end{aligned} \quad (4.196)$$

Παράλληλα, η αριστερή πολική ανάλυση της βαθμίδας της παραμορφώσεως δίδει

$$[F] = [V][R] \Rightarrow [F]^{-1} = [R]^{-1}[V]^{-1} = [R]^T [V^{-1}] \quad (4.197)$$

ή

$$F_{ij} = V_{ik} R_{kj} \Rightarrow F_{ij}^{-1} = R_{ki} V_{kj}^{-1} \quad (4.198)$$

Υπενθυμίζουμε ότι ο $[R]$ είναι ο κανονικός ορθογώνιος τανυστής στροφής και ότι ο $[V]$ είναι ο συμμετρικός, θετικώς ορισμένος, *αριστερός τανυστής τροπής* (πρβλ. Κεφ.4.5). Οπότε,

$$\begin{aligned} d\ell^{(0)} &= \sqrt{R_{ki} V_{km}^{-1} dx_m R_{li} V_{ln}^{-1} dx_n} = \sqrt{\delta_{kl} V_{km}^{-1} V_{ln}^{-1} dx_m dx_n} \\ &= \sqrt{V_{km}^{-1} V_{kn}^{-1} dx_m dx_n} = \sqrt{B_{mn}^{-1} dx_m dx_n} \end{aligned} \quad (4.199)$$

Ο τανυστής

$$B_{ij} = F_{ik} F_{jk} = V_{im} R_{mk} V_{jn} R_{nk} = V_{im} V_{jm} \rightarrow [B] = [F] [F]^T = [V]^2 \quad (4.200)$$

λέγεται *αριστερός τανυστής Cauchy-Green* των τροπών.

Εναλλακτικά μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε για την περιγραφή της παραμορφώσεως κατά Euler το λεγόμενο τανυστή τροπών *Almansi*,

$$\alpha_{ij} = \frac{1}{2} (\delta_{ij} - B_{ij}^{-1}) = \frac{1}{2} (\delta_{ij} - F_{ki}^{-1} F_{kj}^{-1}) \rightarrow [\alpha] = \frac{1}{2} ([I] - [F]^{-T} [F]^{-1}) \quad (4.201)$$

Κάνοντας χρήση της παραπάνω σχέσεως,

$$F_{ij}^{-1} = \delta_{ij} - \partial_j u_i \quad (4.202)$$

παίρνουμε τελικά την εξάρτηση του τανυστή Almansi από την χωρική βαθμίδα μετατοπίσεως

$$\alpha_{ij} = \frac{1}{2} (\partial_j u_i + \partial_i u_j - \partial_i u_k \partial_j u_k) \quad (4.203)$$

Τέλος αν παραλείψουμε τετραγωνικούς όρους ως προς τη χωρική βαθμίδα της μετατοπίσεως, τότε παίρνουμε ότι ο τανυστής Almansi εκφυλίζεται στον απειροστικό τανυστή των τροπών κατά Euler,

$$\alpha_{ij} \approx \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\partial_j u_i + \partial_i u_j) \quad (4.204)$$

Επίσης παρατηρούμε ότι σ' αυτή την περίπτωση οι απειροστικοί τανυστές τροπών κατά Euler και Lagrange δεν διαφέρουν,

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i^E}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^E}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i^L}{\partial \xi_k} F_{kj}^{-1} + \frac{\partial u_j^L}{\partial \xi_l} F_{li}^{-1} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i^L}{\partial \xi_k} \left(\delta_{kj} - \frac{\partial u_i^E}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial u_j^L}{\partial \xi_l} \left(\delta_{li} - \frac{\partial u_j^E}{\partial x_i} \right) \right) \\
&\approx \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i^L}{\partial \xi_j} + \frac{\partial u_j^L}{\partial \xi_i} \right) = E_{ij}
\end{aligned} \tag{4.205}$$

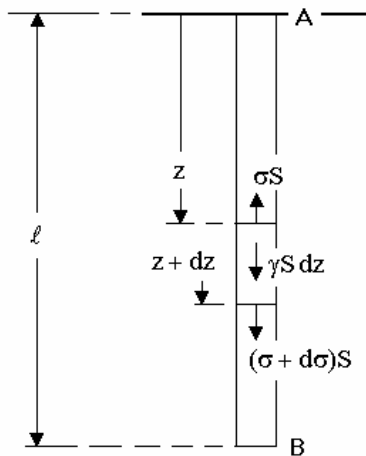
Ασκήσεις

1. Να αποδειχθεί η παρακάτω σχέση για την ογκομετρική τροπή συναρτήσει των βασικών αναλλοίωτων του ταυστή Almansi:

$$\varepsilon_V^E = \frac{dV - dV_0}{dV} = 1 - \sqrt{1 - 2I_A + 4II_A - 8III_A} \quad (\text{μέτρο Almansi}) \tag{4.206}$$

2. Δίδεται ράβδος αρχικού μήκους ℓ_0 , διατομής S και ειδικού βάρους γ . Η ράβδος αυτή αναρτάται από το ένα της άκρο A και αφήνεται να μηκυνθεί κάτω από την επίδραση του ίδιου αυτής βάρους (Εικ. 4-25). Δεχόμαστε ότι το υλικό είναι ελαστικό και ότι η αξονική τάση δίδεται από την καταστατική σχέση, $\sigma_{33} = E\alpha_{33}$ (α_{ij} : μέτρο Almansi).

Να υπολογισθεί ακριβώς η μήκυνση της ράβδου και να συγκριθεί η λύση με εκείνη της απειροστικής θεωρίας, όπου η τάση δίδεται από την σχέση, $\sigma_{33} = E\varepsilon_{33}$.



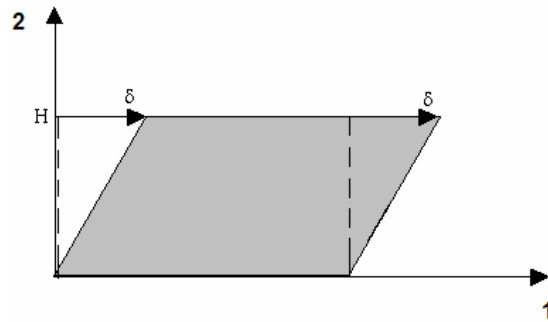
Εικ. 4-25: Μήκυνση βαρείας ράβδου

Υποδεικνύουμε ότι η απειροστική θεωρία προβλέπει εμ προκειμένω παραβολική κατανομή της μετατοπίσεως ($x_3 = z$),

$$u_3 = \frac{\gamma \ell^2}{E} \left(\frac{z}{\ell} - \frac{1}{2} \left(\frac{z}{\ell} \right)^2 \right) \quad (4.207)$$

(γιατί;).

4.12 Απλή διάτμηση σε περιγραφή κατά Euler



Εικ. 4-26: Απλή διάτμηση σε περιγραφή κατά Euler

Στην περίπτωση της απλής διατμήσεως η κίνηση δίδεται από τις παρακάτω εξισώσεις (Εικ. 4-26)

$$\begin{aligned} x &= \xi + \eta K(t) \\ y &= \eta \\ z &= \zeta \end{aligned} \quad (4.208)$$

Ή αντιστρόφως

$$\begin{aligned} \xi &= x - yK(t) \\ \eta &= y \\ \zeta &= z \end{aligned} \quad (4.209)$$

Οπότε έχουμε,

$$[F] = \begin{bmatrix} 1 & K(t) & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [F^{-1}] = \begin{bmatrix} 1 & -K(t) & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.210)$$

Ο αριστερός τανυστής *Cauchy-Green* των τροπών $[B] = [F] [F]^T$ δίδεται από τον πίνακα

$$[B] = \begin{bmatrix} 1 & K & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ K & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+K^2 & K & 0 \\ K & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.211)$$

και

$$[B]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -K & 0 \\ -K & 1+K^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.212)$$

Όπως θα δούμε σε επόμενο κεφάλαιο, μέσα στα πλαίσια μιας γενικής θεωρίας της ελαστικότητας για ισότροπα υλικά αποδεικνύεται ότι ο τανυστής των τάσεων στην τρέχουσα απεικόνιση $C^{(t)}$ είναι μια ισότροπη τανυστική συνάρτηση του αριστερού τανυστή *Cauchy-Green* των τροπών \mathbf{B} , $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{f}(\mathbf{B})$. Συμφώνως δε προς το βασικό θεώρημα αναπαραστάσεως ισότροπων τανυστικών συναρτήσεων που αποδείξαμε στο Κεφ. 2.7 η γενική μορφή της καταστατικής εξίσωσης για ελαστικά υλικά είναι η εξής,

$$\boldsymbol{\sigma} = A_0 \mathbf{I} + A_1 \mathbf{B} + A_2 \mathbf{B}^2 \quad (4.213)$$

Στη σχετική βιβλιογραφία βρίσκουμε μια ισοδύναμη έκφραση, που αποδίδεται ως ο καταστατικός νόμος των **Reiner**⁴³ – **Rivlin**⁴⁴ για μη-γραμμικά ελαστικά υλικά,

$$\sigma_{ij} = \kappa_0 \delta_{ij} + \kappa_1 B_{ij} + \kappa_{-1} B_{ij}^{-1} \quad (4.214)$$

Συμφώνως προς το σχετικό θεώρημα αναπαραστάσεως οι συντελεστές κ_ν προκύπτουν ως συναρτήσεις των *βασικών αναλλοίωτων* του αριστερού τανυστή *Cauchy-Green* των τροπών \mathbf{B} ,

$$\kappa_\nu = \hat{\kappa}_\nu(I_B, \Pi_B, \text{III}_B) \quad (\nu = -1, 0, 1) \quad (4.215)$$

Στο παράδειγμα της απλής διατμήσεως έχουμε ειδικά ότι,

$$I_B = \Pi_B = 3 + K^2, \quad \text{III}_B = 1 \quad (4.216)$$

οπότε οι καταστατικοί συντελεστές στην αντίστοιχη σχέση τάσεων-τροπών, Εξ.(4.214), είναι συναρτήσεις μόνον του K^2 ,

⁴³ Reiner, M. (1948). Relations between stress and strain in complicated systems. *Proc. Int. Congr. Rheology*, IV-44-IV-63.

⁴⁴ Rivlin, R.S. (1951). Mechanics of large elastic deformations with special reference to rubber. *Nature*, Lond., 167, 590-595

$$\kappa_\nu = \hat{\kappa}_\nu(K^2) \quad (4.217)$$

Στην απλούστερη περίπτωση οι συντελεστές αυτοί είναι σταθερές του υλικού,

$$\kappa_\nu = \text{σταθ.} \quad (4.218)$$

Έτσι, στην περίπτωση απλής διατμήσεως οι σχέσεις τάσεων-τροπών, Εξ.(4.214), παίρνουν την εξής μορφή,

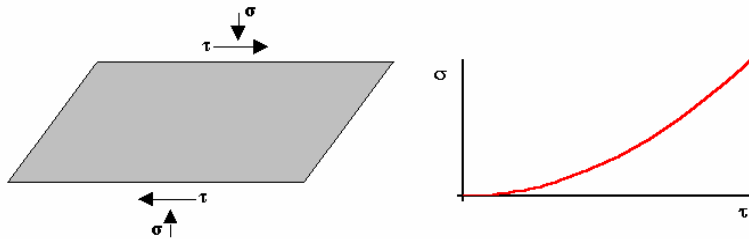
$$[\sigma] = \kappa_0 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \kappa_1 \begin{bmatrix} 1+K^2 & K & 0 \\ K & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \kappa_{-1} \begin{bmatrix} 1 & -K & 0 \\ -K & 1+K^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.219)$$

ή

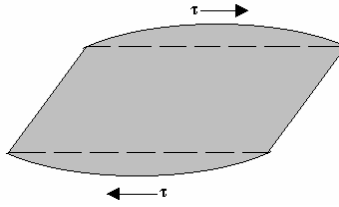
$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \hat{\sigma}(K^2) + \hat{\kappa}_1(K^2)K^2 \\ \sigma_{12} = \sigma_{21} &= (\kappa_1 - \kappa_{-1})K = \hat{\mu}(K^2)K \\ \sigma_{22} &= \hat{\sigma}(K^2) + \hat{\kappa}_{-1}(K^2)K^2 \\ \sigma_{33} &= \kappa_0 + \kappa_1 + \kappa_{-1} = \hat{\sigma}(K^2) \\ \sigma_{13} = \sigma_{23} &= 0 \end{aligned} \quad (4.220)$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι στην περίπτωση του νόμου του Hooke, για ισότροπα γραμμικά ελαστικά υλικά, για απλή διάτμηση έχουμε μία γραμμική σχέση διατμητικής τάσεως και διατμητικής τροπής, ενώ όλες οι άλλες τάσεις είναι μηδενικές

$$\sigma_{12} = \sigma_{21} = \mu K \quad , \quad \sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0 \quad (4.221)$$



Εικ. 4-27: Φαινόμενο Poynoting



Εικ. 4-28: Μονόπλευρη ανεμπόδιστη διάτμηση και ύβωση της «γομολάστιχας»

Το παράδειγμα που αναπτύξαμε πιο πάνω δείχνει ότι με τη βοήθεια μιας μη-γραμμικής θεωρήσεως, μπορούμε να προσομοιάσουμε το λεγόμενο φαινόμενο *Poynting*, που αφορά στην εμφάνιση ορθών τάσεων κατά την απλή διάτμηση διαφόρων υπερελαστικών υλικών, γεγονός που προφανώς δεν μπορεί να περιγράψει η γραμμική θεωρία (Εικ. 4-27). Ελαστικά πολυμερή (π.χ. ελαστικό κόμμι) κάτω από την ανεμπόδιστη άσκηση διατμητικών τάσεων εμφανίζουν το φαινόμενο *Poynting*, που εκδηλώνεται εμπροκειμένω ως ύβωση του διατεμνόμενου στοιχείου (Εικ. 4-28). Παρατηρούμε τέλος ότι, επειδή στη μη-γραμμική θεωρία οι αναπτυσσόμενες ορθές τάσεις είναι ανάλογες του τετραγώνου της διατμήσεως,

$$\sigma_{22} = \lambda K^2 \quad (4.222)$$

το φαινόμενο *Poynting* θα είναι αισθητό μόνο για σχετικά μεγάλες παραμορφώσεις.

4.13 Παράτημα Ι: Το σύμβολο Landau^{45 46}

Με το συμβολισμό,

$$f(\varepsilon) = O(g(\varepsilon)) \text{ για } \varepsilon \rightarrow 0$$

εννοούμε ότι υπάρχει ένας αριθμός $\lambda > 0$, ανεξάρτητος του ε και ένα $\varepsilon_0 > 0$ έτσι ώστε,

$$|f(\varepsilon)| \leq \lambda |g(\varepsilon)| \quad \forall |\varepsilon| \leq \varepsilon_0$$

Η παραπάνω συνθήκη μπορεί να αντικατασταθεί από την ισοδύναμή της

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left| \frac{f(\varepsilon)}{g(\varepsilon)} \right| < \infty$$

Το σύμβολο $O(\varepsilon)$ λέγεται *σύμβολο Landau*.

Π.χ. για μικρές τιμές της μεταβλητής x θα γράψουμε,

$$\sin x = x + O(x^3).$$

⁴⁵ Πρβλ. A. Nayfeh. *Perturbation Methods*. Pure & Applied Mathematics, Wiley, 1973.

⁴⁶ E. Landau (1877-1938).

4.14 Παράτημα ΙΙ

134

NOTES AND DISCUSSION

speed of the circuit is adequate. Another channel can be added by connecting another diode and 10-k Ω resistor between point A and ground.

The complete circuit in Fig. 1 is a convenient form of the coincidence system for plugging directly into the GM tube input of a scaler. All of the components including the power source (a TR-115R mercury battery), are contained in a box of dimensions $2\frac{1}{4} \times 2\frac{1}{4} \times 1\frac{1}{8}$ in. The uhf connector which connects the coincidence circuit to the scaler is rigidly fastened to this box so that the whole circuit is adjacent to and supported by the input connector of the scaler. Switches are included to control the power and to disable either channel so that the counts appearing in either channel as well as the coincident counts can be measured. Closing only S_1 allows those pulses from GM 1 to be counted. Closing only S_2 allows those pulses from GM 2 to be counted, and closing both S_1 and S_2 allows coincidences to be counted.

A larger pulse from the GM tube is required to operate this circuit than to trigger the scaler directly, so the GM tube must be operated at a somewhat higher voltage than is required for ordinary counting. The circuit has been used with GM tubes ranging from the small RCL model 10317 to the large RCL model 10904 and the system has performed satisfactorily with each tube. With the RCL model 10303, using the two source method,^{1,2} the measured resolving time was 2 μ sec.

¹J. B. Brown, *The Taylor Manual of Advanced Laboratory Experiments in Physics* (Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Massachusetts, 1959).

²E. Bleuler and G. Goldsmith, *Experimental Nucleonics* (Rinehart and Company, Inc., New York, 1952).

³D. Halliday, *Introductory Nuclear Physics* (John Wiley & Sons, Inc., New York, 1955).

⁴J. S. Levinger, *Am. J. Phys.* 20, 71 (1952).

⁵W. C. Elmore and M. Sands, *Electronics* (McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1949).

Demonstration of the Zeros of a Fourier Transform

HARLAN W. LEFÈVRE
University of Oregon, Eugene, Oregon

THE Fourier series expansion of an infinite series of square pulses of width τ and the Fourier integral transform of a single square pulse of width τ each have zeros at frequencies $f = n/\tau$, where n is an integer. This means, of course, that each square pulse of width τ , or a wave form composed of any superposition of such pulses, has no energy in the Fourier component of frequency f . This may be demonstrated by showing that no energy can be deposited in a resonant high Q circuit tuned to the frequency f . The demonstration may be performed most easily by using a single resonant circuit tuned to a fixed frequency, and driving it, ballistically, with a pulse of variable width.

In the circuit of Fig. 1 the tube is normally conducting so an easily calculated amount of energy is stored in the magnetic field of the coil. If the current is suddenly switched off, energy will be transferred from the magnetic field of the coil to the electric field of the capacitor and back. If a single cycle of the circuit is traced through, it

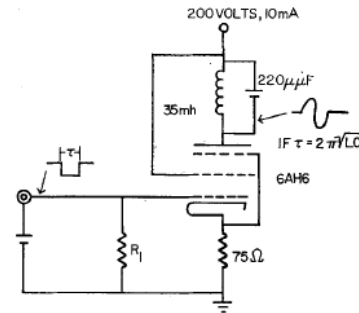


FIG. 1. Diagram for ballistic excitation of a high Q resonant circuit. Peak output voltage for an input step function which turns the tube off is $V_{\text{peak}} = (L/C)^{1/2} I_{\text{quiescent}}$ and for this circuit is about 40 V. R_1 should be chosen to match the impedance of the pulse generator—typically 50 Ω .

will be seen that when the voltage across the capacitor has returned to zero, the current through the inductor has returned to its original value. If, at this instant, the tube is turned back on, the oscillation will instantly stop and the final energy in the tuned circuit will be equal to the original energy. The voltage waveform as seen with an oscilloscope will show a single perfect cycle of a sine wave. If the pulse width is not exactly $\tau = n/f$, the circuit will continue to ring after the tube is switched back on. The same demonstration, of course, may be performed with a simple pendulum.

In practice, the Q of the tank circuit should be at least 100. A pentode should be used to minimize capacitive coupling between the resonant circuit and the grid signal. A high impedance probe may be used to obtain a signal for an oscilloscope—the probe capacitance then acting as part of the tank circuit capacitance. A Beckman-Berkeley model 903 double pulse generator allows much flexibility in the demonstration. Energy may be deposited in the coil by the first pulse and removed at a much later time by a second pulse. An interesting fringe sequence is, then, obtained as the spacing between pulses is changed.

Vector Representation of Rigid Body Rotation

MILLARD F. BEATTY
The Johns Hopkins University, Baltimore 18, Maryland

RECENTLY it has been shown¹ that the final orientation of a rigid body which undergoes a finite rotation about an axis fixed in space may be obtained by solving a simple vector differential equation. The same results have been obtained by others²⁻⁴ by geometrical arguments which usually require much visualization. In this note we attempt to construct a simple geometric proof in which the amount of visualization is reduced by making greater use of elementary vector analysis.

Consider a particle moving in a circular arc through a finite angle θ in a righthand sense about a fixed axis OA with unit vector e_s whose positive direction is from O to A , it

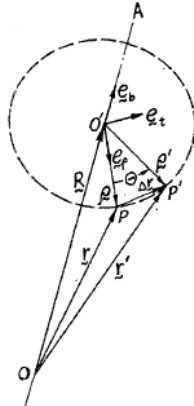


FIG. 1. Finite rotation about a fixed axis.

as shown in Fig. 1. The line OA passes through the center of the circle and is perpendicular to the plane of the circle. We call OA the axis of rotation. If r denotes the initial position vector from any point O on the axis of rotation to any point P of the body, then it is clear that $R = (r \cdot e_b)e_b$, where R is the vector from O to the center of the circle at O'. Let $\rho = r - (r \cdot e_b)e_b$ denote the initial radius vector from O' to P, then, using the fact that $e_b \cdot e_b = 1$, we may write

$$\rho = e_b \times (r \times e_b). \tag{1}$$

Letting e_p denote the unit vector directed from O' to P, we may define the unit vector $e_t = e_b \times e_p$, as shown in Fig. 1. Then, we may put

$$\rho = \rho e_p = e_b \times (-\rho e_t), \quad \rho = |\rho|. \tag{2}$$

Comparing (1) and (2), observing that $\rho e_t - e_b \times r$ is not parallel to e_b , we see immediately that

$$\rho e_t = e_b \times r \tag{3}$$

and, of course,

$$\rho e_p = e_b \times (r \times e_b). \tag{4}$$

If the vector r' is the final position of P, and if ρ' denotes the radius vector to the final position of P, then we may write $\Delta r = r' - r = \rho' - \rho$. Since $|\rho'| = |\rho| = \rho$ (constant), we obtain easily from the geometry

$$\rho' = \rho(\cos\theta e_p + \sin\theta e_t).$$

Thus

$$r' = r + \rho \sin\theta e_t - \rho(1 - \cos\theta)e_p.$$

Upon substitution of (3) and (4) we get

$$r' = r + \sin\theta e_b \times r + (1 - \cos\theta)e_b \times (e_b \times r) \tag{5}$$

for the final orientation in terms of the constant vectors e_b and r .

Furthermore, if i_1, i_2, i_3 are the unit vectors directed along the axes of a rectangular cartesian coordinate system centered at O, and if we write⁶ $r' = x'_i i_i$, $r = x_i i_i$, $e_b = i_3$, then the cartesian components of r' are, by (5),

$$x'_i = x_i + \sin\theta \epsilon_{ij3} x_j + (1 - \cos\theta)(i_3^i i_3^j - \delta_{ij})x_j$$

in which the subscripts range from 1 to 3. Here we have $\delta_{ij} = 1$, or 0, according as $i = j$, or $i \neq j$, respectively; and $\epsilon_{ijk} = +1$, or -1 , according as ijk is an even or an odd permutation of 123, respectively, and $\epsilon_{ijk} = 0$ if any two subscripts are identical.

This work was supported by a grant from the National Science Foundation.

¹ C. Grubin, *Am. J. Phys.* 30, 416 (1962).
² H. Jeffreys, *Cartesian Tensors* (Cambridge University Press, New York, 1962), p. 21. (This author used tensorial notation in his development.)
³ J. Ames and F. Murnaghan, *Theoretical Mechanics* (Dover Publications, Inc., New York, 1951), pp. 77-78.
⁴ C. Easthope, *Three Dimensional Dynamics* (Academic Press Inc., New York, 1958), p. 59.
⁵ R. Long, *Engineering Science Mechanics* (Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1963). (This author used tensorial notation in his development.)
⁶ As usual, a repeated subscript implies summation from 1 to 3.

Electrostatic Demonstrations with Charged Inflated Balloons

M. D. DAYBELL AND R. J. LIEFELD
 New Mexico State University, University Park, New Mexico

WITH today's large elementary physics classes, the need for simple large pieces of demonstration equipment is quite evident. One such piece of apparatus that has found some use in the past for the introduction of the idea of electric charge is the balloon electroscope.¹⁻⁴ This device consists of two or more helium-filled toy balloons suspended near each other by long insulating threads. The balloons may be suspended from the ceiling¹⁻³ or from the floor or lecture desk,⁴ depending on whether it is chosen to make them slightly heavier than air or slightly lighter than air. These electroscopes are fairly sensitive, and may be used to detect charges of the order of fractions of a microcoulomb. They may be used to do all of the demonstrations usually done with pith balls, and are visible even in large classrooms.

In the past, these electroscopes have been charged either by rubbing them with a piece of fur that had been rubbed on a rubber rod, or by using some form of electrophorus. A more convenient (and dramatic!) source of charge is one of the small commercial lecture table van de Graaff generators. The use of one of these generators to charge an ordinary balloon is usually unsatisfactory, however, since sparks jumping from the dome of the generator to the balloon may puncture the balloon.⁵ This problem may be avoided by first coating the balloons with a conducting aluminum paint of the "spray on" variety. This conducting coating also makes it easier to charge two or more balloons to the same potential.

It is possible to charge a single balloon either by touching it to the van de Graaff dome or by placing it close enough to the dome to draw a spark. This charge is, of course, of the same sign as the charge present on the generator. It is also possible to produce a charge of the opposite sign on the balloon simply by holding it by its anchor line just outside the spark zone of the van de Graaff, grounding it momentarily with a finger or otherwise, and then moving it away from the generator.

Three precautions are necessary when preparing the balloons: (a) Overfill the balloons slightly to allow for the