3. ΤΑΝΥΣΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΣΕ ΚΑΜΠΥΛΟΓΡΑΜΜΕΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

Στο Κεφάλαιο αυτό συνοψίζουμε έννοιες και αναλυτικές διαδικασίες που θεωρούνται ως βασικές και απολύτως απαραίτητες για τη διατύπωση προβλημάτων της Μηχανικής του Συνεχούς Μέσου σε καμπυλόγραμμα συστήματα συντεταγμένων[1,2,3,4].

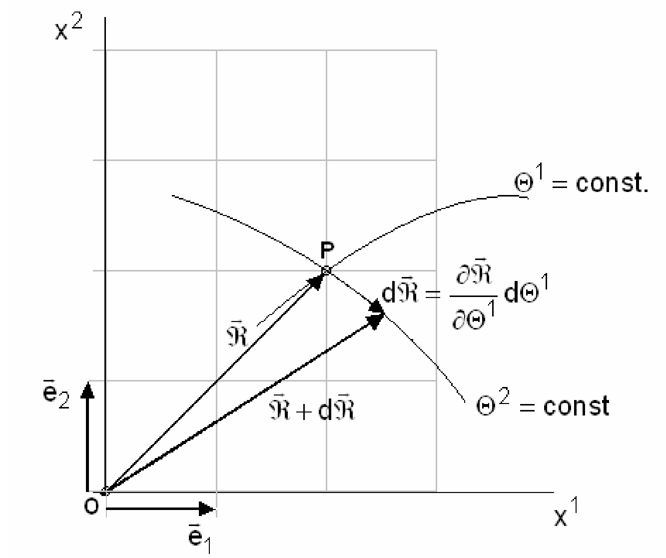
---

[1] Aris, R., Vectors, Tensors and the basic Equations of Fluid Mechanics, Diver, 1962.
[2] Borisenko, A.I. & Tarapov, I.E., *Vector and Tensor Analysis with Applications*, Dover, 1968.
[3] Klinkbeil, E.,*Tensorrechnung für Ingenieure*, BI, Hochschultaschenbücher, Bd. 197, 1966.
[4] Lichnerowicz, A.., *Eléments de Calcul Tensoriel*, Librarie Armand Colin, 1950

Ιωάννης Γ. Βαρδουλάκης, Dr-Ing., Καθηγητής της Μηχανικής στο Ε.Μ. Πολυτεχνείο

Τ.Θ. 144, Παιανία 190-02, http://geolab.mechan.ntua.gr/, I.Vardoulakis@mechan.ntua.gr

3.1 Καμπυλόγραμμες συντεταγμένες



Εικ. 3-1:Καρτεσιανές και καμπυλόγραμμες συντεταγμένες ενός σημείου στο επίπεδο.

Θεωρούμε ένα ορθογώνιο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων $O(x^1,x^2,x^3)$ (Εικ. 3-1). Το διάνυσμα θέσεως ενός σημείου P στο χώρο γράφεται συναρτήσει των συντεταγμένων του σημείου και των διανυσμάτων της ορθοκανονικής καρτεσιανής βάσεως ως εξής,

$$\vec{OP} = \vec{R} = x^i \vec{e}_i \tag{3.1}$$

Στο θεωρούμενο καρτεσιανό σύστημα έχουμε ότι

$$d\vec{R} = dx^i \vec{e}_i \tag{3.2}$$

διότι τα διανύσματα βάσεως δεν αλλάζουν από θέση σε θέση, οπότε

$$d\vec{e}_i = 0 \tag{3.3}$$

Οι καρτεσιανές συντεταγμένες ενός σημείου στο χώρο θεωρούνται τώρα ως συνεχώς παραγωγίσιμες συναρτήσεις τριών νέων μεταβλητών Θ^i,

$$x^1 = \chi^1\left(\Theta^1,\Theta^2,\Theta^3\right),\quad x^2 = \chi^2\left(\Theta^1,\Theta^2,\Theta^3\right),\quad x^3 = \chi^3\left(\Theta^1,\Theta^2,\Theta^3\right) \tag{3.4}$$

Ο παραπάνω μετασχηματισμός , Εξ. (3.4), θεωρείται αντιστρέψιμος,

$$\Theta^1 = \vartheta^1\left(x^1, x^2, x^3\right), \quad \Theta^2 = \vartheta^2\left(x^1, x^2, x^3\right), \quad \Theta^3 = \vartheta^3\left(x^1, x^2, x^3\right) \tag{3.5}$$

όπου $\vartheta^i(\bullet) \equiv \chi^{i-1}(\bullet)$, γεγονός που σημαίνει ότι η Ιακωβιανή του μετασχηματισμού και η αντίστροφή της είναι τοπικά διάφορες του μηδενός,

$$J = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial\chi^1}{\partial\Theta^1} & \frac{\partial\chi^1}{\partial\Theta^2} & \frac{\partial\chi^1}{\partial\Theta^3} \\ \frac{\partial\chi^2}{\partial\Theta^1} & \frac{\partial\chi^2}{\partial\Theta^2} & \frac{\partial\chi^2}{\partial\Theta^3} \\ \frac{\partial\chi^3}{\partial\Theta^1} & \frac{\partial\chi^3}{\partial\Theta^2} & \frac{\partial\chi^3}{\partial\Theta^3} \end{pmatrix} \neq 0 \quad , \quad J^{-1} = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial\vartheta^1}{\partial x^1} & \frac{\partial\vartheta^1}{\partial x^2} & \frac{\partial\vartheta^1}{\partial x^3} \\ \frac{\partial\vartheta^2}{\partial x^1} & \frac{\partial\vartheta^2}{\partial x^2} & \frac{\partial\vartheta^2}{\partial x^3} \\ \frac{\partial\vartheta^3}{\partial x^1} & \frac{\partial\vartheta^3}{\partial x^2} & \frac{\partial\vartheta^3}{\partial x^3} \end{pmatrix} \neq 0 \tag{3.6}$$

Το διάνυσμα θέσεως θα θεωρηθεί επίσης συνάρτηση των νέων αυτών μεταβλητών,

$$\vec{R} = \vec{\Re}(\Theta^i) \tag{3.7}$$

οπότε,

$$d\vec{R} = \frac{\partial\vec{\Re}}{\partial\Theta^i} d\Theta^i \tag{3.8}$$

Ενίοτε, για λόγους συντομογραφίας, θα συμβολίσουμε τη μερική παράγωγο μίας συναρτήσεως ως προς τις καμπυλόγραμμες συντεταγμένες Θ^i με ένα υπογεγραμμένο κόμμα, ως

$$\frac{\partial}{\partial\Theta^i} = (\bullet)_{,i} \tag{3.9}$$

οπότε

$$d\vec{R} = \vec{\Re}_{,i} d\Theta^i \tag{3.10}$$

Τη μερική παράγωγο του διανύσματος θέσεως ως προς τις καμπυλόγραμμες συντεταγμένες θα τη συμβολίζουμε ως,

$$\vec{g}_i = \vec{\Re}_{,i} \tag{3.11}$$

Τα διανύσματα $\vec{g}_i$ είναι τα διανύσματα της τοπικής (εφαπτομενικής) βάσεως στο σημείο P, σε σχέση με το καμπυλόγραμμο σύστημα συντεταγμένων Θ^i. Π.χ. το διάνυσμα βάσεως που είναι εφαπτομενικό στην καμπύλη Θ^1 ($\Theta^2 = const.$, Εικ. 3-1) είναι το $\vec{g}_1 = \vec{\Re}_{,1}$. Οι σχέσεις μεταξύ των τοπικών διανυσμάτων βάσεως του καμπυλόγραμμου συστήματος και της ορθοκανονικής βάσεως του καρτεσιανού συστήματος προκύπτουν ως εξής,

$$d\vec{R} = \vec{\Re}_{,i} d\Theta^i = dx^k \vec{e}_k = \frac{\partial \chi^k}{\partial \Theta^i} d\Theta^i \vec{e}_k \quad \Rightarrow \quad \vec{g}_i = \frac{\partial \chi^k}{\partial \Theta^i} \vec{e}_k$$
$$d\vec{R} = dx^k \vec{e}_k = \vec{\Re}_{,i} d\Theta^i = \vec{g}_i \frac{\partial \vartheta^i}{\partial x^k} dx^k \quad \Rightarrow \quad \vec{e}_k = \frac{\partial \vartheta^i}{\partial x^k} \vec{g}_i \tag{3.12}$$

Η τοπική διανυσματική βάση $\vec{g}_i$ καλείται *συναλλοίωτη βάση*[5]. Παρατηρούμε ότι τα διανύσματα της συναλλοίωτης βάσεως $\vec{g}_i$ δείχνουν προς την κατεύθυνση όπου η αντίστοιχη παράμετρος Θ^i αυξάνει. Το μοναδιαίο εφαπτομενικό διάνυσμα στην καμπύλη Θ^1 είναι,

$$\vec{g}_1^0 = \frac{\dfrac{\partial \vec{\Re}}{\partial \Theta^1}}{\left| \dfrac{\partial \vec{\Re}}{\partial \Theta^1} \right|} = \frac{1}{h_1} \vec{g}_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \vec{\Re}}{\partial \Theta^1} = h_1 \vec{g}_1^0 \tag{3.13}$$

έτσι ώστε

$$h_1 = \left| \frac{\partial \vec{\Re}}{\partial \Theta^1} \right| \tag{3.14}$$

Ομοίως ορίζουμε και τα μοναδιαία διανύσματα βάσεως που είναι εφαπτομενικά πάνω στις καμπύλες Θ^2 και Θ^3 στο θεωρούμενο σημείο P,

$$\vec{g}_2^0 = \frac{1}{h_2} \vec{g}_2 \quad , \quad \vec{g}_3^0 = \frac{1}{h_2} \vec{g}_3 \tag{3.15}$$

όπου

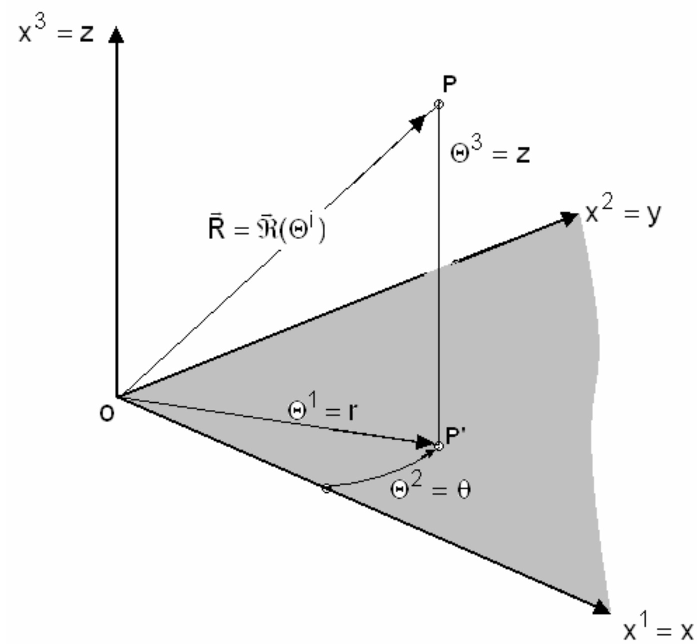
$$h_2 = \left| \frac{\partial \vec{\Re}}{\partial \Theta^2} \right| \quad , \quad h_3 = \left| \frac{\partial \vec{\Re}}{\partial \Theta^3} \right| \tag{3.16}$$

Ο ποσότητες h_1, h_2, h_3 καλούνται *βαθμωτοί συντελεστές*[6].

---

[5] Πρβλ. Κεφ. 2.3.
[6] Αγγλ. *scalar factors*

3.2 Κυλινδρικές πολικές συντεταγμένες[7]



Εικ. 3-2: Καρτεσιανές και πολικές συνταγμένες σημείου στο χώρο

Ένα σύστημα συντεταγμένων $(\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3)$ καλείται *ορθογώνιο καμπυλόγραμμο σύστημα*[8], όταν τα διανύσματα βάσεως είναι κάθετα μεταξύ τους,

$$\vec{g}_i \cdot \vec{g}_j = \delta_{ij} \tag{3.17}$$

Ένα τέτοιο σύστημα συντεταγμένων είναι και το σύστημα των κυλινδρικών πολικών συντεταγμένων (Εικ. 3-2). Οι κυλινδρικές πολικές συντεταγμένες ενός σημείου στο χώρο ορίζονται βάσει των καρτεσιανών του συντεταγμένων ως εξής,

$$\begin{aligned}
\Theta^1 &= r = \vartheta^1(x^i) = \sqrt{x^2 + y^2} \\
\Theta^2 &= \theta = \vartheta^2(x^i) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \\
\Theta^3 &= \vartheta^3(x^i) = z
\end{aligned} \tag{3.18}$$

---

[7] Αγγλ. *cylindrical coordinates*
[8] Αγγλ. *orthogonal curvilinear system of coordinates*

Οι παραπάνω σχέσεις μεταξύ κυλινδρικών και καρτεσιανών συντεταγμένων , Εξ. (3.18) αντιστρέφονται,

$$\begin{aligned} x &= \chi^1(\Theta^i) = \Theta^1 \cos\Theta^2 = r\cos\theta \\ y &= \chi^2(\Theta^i) = \Theta^1 \sin\Theta^2 = r\sin\theta \\ z &= \chi^3(\Theta^i) = \Theta^3 \end{aligned} \tag{3.19}$$

Από τον ορισμό του εν λόγω μετασχηματισμού από τις καρτεσιανές στις κυλινδρικές συντεταγμένες παίρνουμε την εξής έκφραση για τον αντίστοιχο συναρτησιακό πίνακα,

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial\chi^1}{\partial\Theta^1} & \dfrac{\partial\chi^1}{\partial\Theta^2} & \dfrac{\partial\chi^1}{\partial\Theta^3} \\ \dfrac{\partial\chi^2}{\partial\Theta^1} & \dfrac{\partial\chi^2}{\partial\Theta^2} & \dfrac{\partial\chi^2}{\partial\Theta^3} \\ \dfrac{\partial\chi^3}{\partial\Theta^1} & \dfrac{\partial\chi^3}{\partial\Theta^2} & \dfrac{\partial\chi^3}{\partial\Theta^3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{x}{r} & \dfrac{y}{r} & 0 \\ -\dfrac{y}{r^2} & \dfrac{x}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.20}$$

και την Ιακωβιανή του

$$J = \det\left[\frac{\partial\chi^i}{\partial\Theta^j}\right] = \frac{x^2}{r^3} + \frac{y^2}{r^3} = \frac{1}{r} \tag{3.21}$$

Από την παρατήρηση ότι στον πολικό άξονα $O(0,0,z)$ η Ιακωβιανή του αντίστροφου μετασχηματισμού μηδενίζεται, έπεται ο μετασχηματισμός αυτός είναι αντιστρέψιμος παντού εκτός του πολικού άξονα. Οπότε προκύπτουν και οι κάτωθι σχέσεις για τα διανύσματα βάσεως,

$$\begin{aligned} \vec{e}_x &= \vec{e}_1 = \frac{\partial\Theta^1}{\partial x^1}\vec{g}_1 + \frac{\partial\Theta^2}{\partial x^1}\vec{g}_2 + \frac{\partial\Theta^3}{\partial x^1}\vec{g}_3 = \frac{x}{r}\vec{g}_1 - \frac{y}{r^2}\vec{g}_2 + 0\cdot\vec{g}_3 \\ \vec{e}_y &= \vec{e}_2 = \frac{\partial\Theta^1}{\partial x^2}\vec{g}_1 + \frac{\partial\Theta^2}{\partial x^2}\vec{g}_2 + \frac{\partial\Theta^3}{\partial x^2}\vec{g}_3 = \frac{y}{r}\vec{g}_1 + \frac{x}{r^2}\vec{g}_2 + 0\cdot\vec{g}_3 \\ \vec{e}_z &= \vec{e}_3 = \frac{\partial\Theta^1}{\partial x^3}\vec{g}_1 + \frac{\partial\Theta^2}{\partial x^3}\vec{g}_2 + \frac{\partial\Theta^3}{\partial x^3}\vec{g}_3 = 0\cdot\vec{g}_1 + 0\cdot\vec{g}_2 + 1\cdot\vec{g}_3 \end{aligned} \tag{3.22}$$

ή συνοπτικά

$$\begin{Bmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\dfrac{1}{r}\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \dfrac{1}{r}\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \vec{g}_1 \\ \vec{g}_2 \\ \vec{g}_3 \end{Bmatrix} \tag{3.23}$$

Αντιστρέφοντας την παραπάνω σχέση παίρνουμε

$$\begin{Bmatrix} \vec{g}_1 \\ \vec{g}_2 \\ \vec{g}_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{Bmatrix} \tag{3.24}$$

Παρατηρούμε ότι το σύστημα κυλινδρικών συντεταγμένων είναι ένα ορθογώνιο σύστημα (γιατί;). Επίσης με την παρατήρηση ότι

$$\vec{\Re} = \Theta^1 \cos\Theta^2 \vec{e}_1 + \Theta^1 \sin\Theta^2 \vec{e}_2 + \Theta^3 \vec{e}_3 \tag{3.25}$$

έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{\partial\vec{\Re}}{\partial\Theta^1} &= \cos\Theta^2\vec{e}_1 + \sin\Theta^2\vec{e}_2 + 0\cdot\vec{e}_3 \\ \frac{\partial\vec{\Re}}{\partial\Theta^2} &= -\Theta^1\sin\Theta^2\vec{e}_1 + \Theta^1\cos\Theta^2\vec{e}_2 + 0\cdot\vec{e}_3 \\ \frac{\partial\vec{\Re}}{\partial\Theta^3} &= 0\cdot\vec{e}_1 + 0\cdot\vec{e}_2 + 1\cdot\vec{e}_3 \end{aligned} \tag{3.26}$$

οπότε προκύπτουν οι παρακάτω εκφράσεις για τους βαθμωτούς συντελεστές

$$\begin{aligned} h_1 &= \left|\frac{\partial\vec{\Re}}{\partial\Theta^1}\right| = \sqrt{\left(\cos\Theta^2\right)^2 + \left(\sin\Theta^2\right)^2 + 0^2} = 1 \\ h_2 &= \left|\frac{\partial\vec{\Re}}{\partial\Theta^2}\right| = \sqrt{\left(-\Theta^1\sin\Theta^2\right)^2 + \left(\Theta^1\cos\Theta^2\right)^2 + 0^2} = \Theta^1 = r \\ h_3 &= \left|\frac{\partial\vec{\Re}}{\partial\Theta^3}\right| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2} = 1 \end{aligned} \tag{3.27}$$

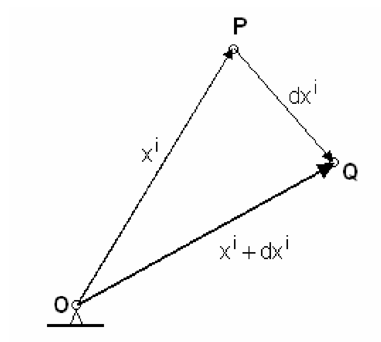
και για την ορθοκανονική βάση

$$\begin{aligned} \vec{e}_r &\equiv \vec{g}_1^0 = \frac{1}{h_1}\vec{g}_1 = \cos\theta\vec{e}_1 + \sin\theta\vec{e}_2 \\ \vec{e}_\theta &\equiv \vec{g}_2^0 = \frac{1}{h_2}\vec{g}_2 = -\sin\theta\vec{e}_1 + \cos\theta\vec{e}_2 \\ \vec{e}_z &\equiv \vec{g}_3^0 = \frac{1}{h_3}\vec{g}_3 = \vec{e}_3 \end{aligned} \tag{3.28}$$

ή συνοπτικά (πρβλ. Εξ. (3.22)),

$$\begin{Bmatrix} \vec{e}_r \\ \vec{e}_\theta \\ \vec{e}_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \vec{e}_x \\ \vec{e}_y \\ \vec{e}_z \end{Bmatrix} \tag{3.29}$$

3.3 Η μετρική σε καμπυλόγραμμες συντεταγμένες



Εικ. 3-3: Απειροστικό διάνυσμα διαφοράς θέσεων

Θεωρούμε ένα απειροστικό διανυσματικό στοιχείο, που συνδέει δύο διπλανά σημεία στο χώρο με συντεταγμένες $P(x^i)$ και $Q(x^i + dx^i)$, αντιστοίχως (Εικ. 3-3). Στο καρτεσιανό σύστημα το μήκος του απειροστικού διανύσματος $\overrightarrow{PQ}$ υπολογίζεται ως εξής,

$$d\ell = |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{dx^i \vec{e}_i \cdot dx^j \vec{e}_j} = \sqrt{dx^i dx^j (\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j)} \tag{3.30}$$

Επειδή η επιλεγείσα καρτεσιανή βάση είναι ορθοκανονική, το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων βάσεως δίνεται από τον μοναδιαίο τανυστή,

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij} \tag{3.31}$$

οπότε,

$$d\ell^2 = \delta_{ij} dx^i dx^j = dx^i dx^i \tag{3.32}$$

Από την Εξ. (3.12) παίρνουμε ότι,

$$dx^k \vec{e}_k = d\Theta^i \vec{g}_i \tag{3.33}$$

οπότε

$$d\ell^2 = dx^i \vec{e}_i \cdot dx^j \vec{e}_j = d\Theta^i \vec{g}_i \cdot d\Theta^j \vec{g}_j = d\Theta^i d\Theta^j (\vec{g}_i \cdot \vec{g}_j) \tag{3.34}$$

Ο συμμετρικός πίνακας που προκύπτει από το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων βάσεως $\vec{g}_i$ είναι ο αντίστοιχος μετρικός τανυστής και συμβολίζεται ως,

$$g_{ij} = \vec{g}_i \cdot \vec{g}_j \tag{3.35}$$

Οπότε ο υπολογισμός του στοιχειώδους μήκους σε ένα καμπυλόγραμμο σύστημα συντεταγμένων δίδεται, κατ' αντιστοιχία της Εξ. (3.32) από μία σχέση που εμπλέκει το μετρικό τανυστή,

$$d\ell^2 = g_{ij} d\Theta^i d\Theta^j \tag{3.36}$$

Για το λόγο αυτό λέμε ότι το σύστημα $2^{\alpha\varsigma}$ τάξεως g_{ij} περιγράφει τη *μετρική* στο αντίστοιχο σύστημα συντεταγμένων. Με την παρατήρηση ότι

$$\vec{g}_i = h_{(i)} \vec{g}_i^0 \tag{3.37}$$

θα σημειώσουμε ότι σε ένα ορθογώνιο καμπυλόγραμμο σύστημα έχουμε ότι,

$$g_{ij} = h_{(i)} h_{(j)} \delta_{ij} \tag{3.38}$$

και

$$d\ell^2 = h_{(i)}^2 d\Theta^i d\Theta^i \tag{3.39}$$

Γενικώς, για δεδομένη την συναλλοίωτη βάση $\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3$ ορίζουμε μίαν άλλη βάση $\vec{g}^1, \vec{g}^2, \vec{g}^3$, την οποία ονομάζουμε *ανταλλοίωτη*, έτσι ώστε τα διανύσματα των δύο αυτών βάσεων να είναι κάθετα μεταξύ τους[9]

$$\vec{g}_i \cdot g^j = \delta_i^j \tag{3.40}$$

Με την εισαγωγή του μετρικού τανυστή της συναλλοίωτης βάσης g_{ij}, Εξ. (3.35), εισάγουμε τον μετρικό τανυστή της αντίστοιχης ανταλλοίωτης βάσης,

$$g^{ij} = \vec{g}^i \cdot \vec{g}^j \tag{3.41}$$

Ομοίως όπως αναπτύξαμε σχετικώς προς τα λοξά, ευθύγραμμα συστήματα συντεταγμένων, ισχύουν και στα καμπυλόγραμμα συστήματα οι παρακάτω σχέσεις,

$$\vec{g}^i = g^{ij} \vec{g}_j \quad , \quad \vec{g}_k = g_{kl} \vec{g}^l \tag{3.42}$$

οπότε,

---

[9] Πρβλ. Κεφ. 2.5.

$$g^{ij} g_{jk} = \delta^i_k \tag{3.43}$$

και οι τανυστές g_{ij} και g^{ij} είναι αντίστροφοι.

Για τον κατ' ευθείαν υπολογισμό των διανυσμάτων της ανταλλοίωτης βάσεως παρατηρούμε ότι ισχύουν πάλι οι παρακάτω σχέσεις,

$$\begin{aligned} \vec{g}^1 &= \frac{\vec{g}_2 \times \vec{g}_3}{[\vec{g}_2, \vec{g}_3, \vec{g}_1]} = \frac{\vec{g}_2 \times \vec{g}_3}{[\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3]} \\ \vec{g}^2 &= \frac{\vec{g}_3 \times \vec{g}_1}{[\vec{g}_3, \vec{g}_1, \vec{g}_2]} = \frac{\vec{g}_3 \times \vec{g}_1}{[\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3]} \\ \vec{g}^3 &= \frac{\vec{g}_1 \times \vec{g}_2}{[\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3]} \end{aligned} \tag{3.44}$$

$$[\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3]^2 = \left| g_{ij} \right| = g \quad \Rightarrow \quad [\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3] = \sqrt{g} \tag{3.45}$$

όπου το εξωτερικό τους γινόμενο δύο διανυσμάτων, $\vec{x} = x^k \vec{g}_k$ και $\vec{y} = y^l \vec{g}_l$ ορίζεται ως,

$$(\vec{x} \times \vec{y})_i = e_{ikl} x^k y^l \tag{3.46}$$

όπου e_{klm} είναι ο αντίστοιχος πλήρως αντισυμμετρικός τανυστής 3^ης^ τάξεως,

$$e_{klm} = \begin{cases} \sqrt{g} & if : (k,l,m) = cycl(1,2,3) \\ -\sqrt{g} & if : (k,l,m) = cycl(2,1,3) \\ 0 & else \end{cases} \quad , \quad g = \left| g_{ij} \right| \tag{3.47}$$

Άρα

$$\vec{g}_i \times \vec{g}_k = e_{ikl} \vec{g}^l \tag{3.48}$$

Θεωρούμε τώρα τη μεταβολή των διανυσμάτων της συναλλοίωτης βάσεως κατά μήκος των καμπυλόγραμμων συντεταγμένων,

$$\vec{g}_{k,l} = \frac{\partial \vec{g}_k}{\partial \Theta^l} = \frac{\partial^2 x^i}{\partial \Theta^k \partial \Theta^l} \vec{e}_i = \frac{\partial^2 x^i}{\partial \Theta^k \partial \Theta^l} \frac{\partial \Theta^j}{\partial x^i} \vec{g}_j \tag{3.49}$$

Η σχέση αυτή γράφεται συντομογραφικά ως εξής

$$\vec{g}_{k,l} = \Gamma^j_{kl} \vec{g}_j \tag{3.50}$$

όπου το σύστημα 3^ης^ τάξεως

$$\Gamma^j_{kl} = \frac{\partial \Theta^j}{\partial x^i} \frac{\partial^2 x^i}{\partial \Theta^k \partial \Theta^l} \tag{3.51}$$

καλείται σύμβολο Christoffel. Παρατηρούμε ότι το σύμβολο Christoffel είναι ένα σύστημα 3ης τάξεως, συμμετρικό ως προς τους δύο κάτω δείκτες,

$$\Gamma^j_{kl} = \Gamma^j_{lk} \tag{3.52}$$

3.4 Τα σύμβολα Christoffel

Τα σύμβολα Christoffel εισήχθησαν ανωτέρω με στόχο να εκφράσουμε τις μερικές παραγώγους της συναλλοίωτης βάσεως συναρτήσει της βάσεως αυτής, Εξ. (3.50). Ομοίως μπορούμε να εισάγουμε το σύστημα $\tilde{\Gamma}^i_{jn}$ για να εκφράσουμε τις μερικές παραγώγους της ανταλλοίωτης βάσεως,

$$\vec{g}^i_{,j} = \tilde{\Gamma}^i_{jn} \vec{g}^n \tag{3.53}$$

Από τη σχέση,

$$\left(\vec{g}^i \cdot \vec{g}_j\right)_{,k} = \left(\delta^i_j\right)_{,k} = 0 = \vec{g}^i_{,k} \cdot \vec{g}_j + \vec{g}^i \cdot \vec{g}_{j,k} \tag{3.54}$$

και τις Εξ. (3.50) και (3.53) παίρνουμε

$$\tilde{\Gamma}^i_{kl} \vec{g}^l \cdot \vec{g}_j \cdot + \Gamma^l_{jk} \vec{g}^i \cdot \vec{g}_l = 0 \quad \Rightarrow \quad \tilde{\Gamma}^i_{kl} \delta^l_j + \Gamma^l_{jk} \delta^i_l = 0 \tag{3.55}$$

Άρα,

$$\tilde{\Gamma}^i_{jk} = -\Gamma^i_{jk} \tag{3.56}$$

και ως εκ τούτου

$$\begin{aligned} \vec{g}_{k,l} &= \Gamma^m_{kl} \vec{g}_m \\ \vec{g}^k_{,l} &= -\Gamma^k_{lm} \vec{g}^m \end{aligned} \tag{3.57}$$

Θα δείξουμε τώρα ότι τα σύμβολα Christoffel μπορούν να εκφρασθούν συναρτήσει του μετρικού τανυστή και των παραγώγων του. Πράγματι από τις Εξ. (3.57) παίρνουμε,

$$\begin{aligned} \vec{g}_{k,l} \cdot \vec{g}^m &= \Gamma^m_{kl} \\ \vec{g}^k_{,l} \cdot \vec{g}^m &= -\Gamma^k_{lm} \end{aligned} \tag{3.58}$$

Διαφορίζοντας τη σχέση,

$$\vec{g}_l = g_{kl} \vec{g}^k \tag{3.59}$$

ως προς τα Θ^m παίρνουμε

$$\vec{g}_{l,m} = g_{kl,m}\vec{g}^k + g_{kl}\vec{g}^k_{,m} \tag{3.60}$$

Οπότε,

$$\begin{aligned}
&\vec{g}_{l,m} \cdot \vec{g}^p = g_{kl,m}\vec{g}^k \cdot \vec{g}^p + g_{kl}\vec{g}^k_{,m} \cdot \vec{g}^p \quad \Rightarrow \\
&\Gamma^p_{lm} = g^{kp}g_{kl,m} - g_{kl}\Gamma^k_{mq}g^{pq} \quad \Rightarrow \\
&g_{pn}\Gamma^p_{lm} + g_{kl}\Gamma^k_{mq}g^{pq}g_{pn} = g^{kp}g_{pn}g_{kl,m} \quad \Rightarrow \\
&g_{pn}\Gamma^p_{lm} + g_{kl}\Gamma^k_{mq}\delta^q_n = \delta^k_n g_{kl,m}
\end{aligned}$$

ή

$$g_{pn}\Gamma^p_{lm} + g_{kl}\Gamma^k_{mn} = g_{nl,m} \tag{3.61}$$

Δια κυκλικής αντιμεταθέσεως των δεικτών (n,l,m) από την παραπάνω σχέση παίρνουμε τις εξής σχέσεις

$$\begin{aligned}
&g_{pl}\Gamma^p_{mn} + g_{km}\Gamma^k_{nl} = g_{lm,n} \\
&g_{pm}\Gamma^p_{nm} + g_{kn}\Gamma^k_{lm} = g_{mn,l}
\end{aligned} \tag{3.62}$$

Πολλαπλασιάζοντας τις Εξ. (3.62) με ½ και την Εξ. (3.61) με -½ , προσθέτοντάς τις και λαμβάνοντας υπ' όψιν τις συμμετρίες των διαφόρων υπεισερχόμενων συστημάτων παίρνουμε

$$\begin{aligned}
&g_{pn}\Gamma^p_{lm} = \frac{1}{2}\left(g_{mn,l} + g_{nl,m} - g_{lm,n}\right) \quad \Rightarrow \\
&g^{kn}g_{pn}\Gamma^p_{lm} = \frac{1}{2}g^{kn}\left(g_{mn,l} + g_{nl,m} - g_{lm,n}\right)
\end{aligned} \tag{3.63}$$

ή

$$\Gamma^k_{lm} = \frac{1}{2}g^{kn}\left(g_{mn,l} + g_{nl,m} - g_{lm,n}\right) \tag{3.64}$$

Άσκηση

Να αποδειχθεί η σχέση,

$$g^{in}{}_{,m} = -g^{nk}\Gamma^i_{km} - g^{ik}\Gamma^n_{km} \tag{3.65}$$

Λύση

$$
\begin{aligned}
& g^{ij} g_{jk} = \delta^i_k \Rightarrow \quad g^{ij}{}_{,m} g_{jk} + g^{ij} g_{jk,m} = 0 \quad ; \quad g_{pn}\Gamma^p_{lm} + g_{pl}\Gamma^p_{mn} = g_{nl,m} \\
& g^{ij}{}_{,m} g_{jk} = -g^{ij} g_{jk,m} = -g^{ij}\left(g_{pj}\Gamma^p_{km} + g_{pk}\Gamma^p_{mj}\right) \\
& g^{ij}{}_{,m} g_{jk} g^{kn} = g^{ij}{}_{,m}\delta^n_j = g^{in}{}_{,m} = -g^{ij} g^{kn}\left(g_{pj}\Gamma^p_{km} + g_{pk}\Gamma^p_{mj}\right) \\
& g^{in}{}_{,m} = -g^{ij} g_{pj} g^{kn}\Gamma^p_{km} - g^{ij} g^{kn} g_{pk}\Gamma^p_{mj} \\
& g^{in}{}_{,m} = -\delta^i_p g^{kn}\Gamma^p_{km} - g^{ij}\delta^n_p\Gamma^p_{mj} \\
& g^{in}{}_{,m} = -g^{nk}\Gamma^i_{km} - g^{ik}\Gamma^n_{km}
\end{aligned}
$$

3.5 Μετρική και σύμβολα Christoffel σε κυλινδρικές πολικές συνταγμένες

Οι τανυστές της μετρικής σε κυλινδρικές συντεταγμένες παίρνουν την εξής μορφή,

$$
[g_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad [g^{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.66}
$$

Οπότε η ανταλλοίωτη βάση υπολογίζεται ως

$$
\vec{g}^i = g^{ij}\vec{g}_j \quad \Rightarrow \tag{3.67}
$$

$$
\begin{Bmatrix} \vec{g}^1 \\ \vec{g}^2 \\ \vec{g}^3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \vec{g}_1 \\ \vec{g}_2 \\ \vec{g}_3 \end{Bmatrix} \tag{3.68}
$$

ή

$$
\begin{aligned}
& \vec{g}^1 = \vec{g}_1 = h_1\vec{g}^0_1 = \vec{e}_r \\
& \vec{g}^2 = \frac{1}{r^2}\vec{g}_2 = \frac{1}{r^2}h_2\vec{g}^0_2 = \frac{1}{r^2}r\vec{e}_\theta = \frac{1}{r}\vec{e}_\theta \\
& \vec{g}^3 = \vec{g}_3 = h_3\vec{g}^0_3 = \vec{e}_z
\end{aligned} \tag{3.69}
$$

Οπότε από την Εξ. (3.36) παίρνουμε την εξής έκφραση για τη μετρική

$$
d\ell^2 = g_{ij}d\Theta^i d\Theta^j = dr^2 + r^2 d\theta^2 + dz^2 \tag{3.70}
$$

Οι συνιστώσες του συμβόλου Christoffel σε κυλινδρικές συντεταγμένες υπολογίζονται εύκολα με την παρατήρηση ότι εν προκειμένω όλες οι μερικές παράγωγοι του μετρικού τανυστή μηδενίζονται πλην της, $g_{22,1} = 2r$, οπότε βάσει της Εξ. (3.64) έχουμε ότι όλες οι συνιστώσες του συμβόλου Christoffel μηδενίζονται πλην των κάτωθι,

$$\Gamma^1_{22} = \frac{1}{2} g^{11}\left(g_{21,2} + g_{12,2} - g_{22,1}\right) = -\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2r = -r \quad \Rightarrow \left[\Gamma^1_{ij}\right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -r & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.71}$$

$$\left.\begin{aligned} \Gamma^2_{12} &= \frac{1}{2} g^{22}\left(g_{22,1} + g_{21,2} - g_{12,2}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{r^2}\cdot 2r = \frac{1}{r} \\ \Gamma^2_{21} &= \frac{1}{2} g^{22}\left(g_{12,2} + g_{22,1} - g_{21,2}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{r^2}\cdot 2r = \frac{1}{r} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left[\Gamma^2_{ij}\right] = \begin{bmatrix} 0 & 1/r & 0 \\ 1/r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.72}$$

$$\left[\Gamma^3_{ij}\right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.73}$$

3.6 Ανταλλοίωτοι τανυστές σε καμπυλόγραμμες συντεταγμένες

Θεωρούμε τον μετασχηματισμό από ένα σύστημα καμπυλόγραμμων συντεταγμένων Θ^l σε ένα άλλο, $\bar{\Theta}^k$:

$$\bar{\Theta}^k = \bar{\vartheta}^k(\Theta^l) \quad \Leftrightarrow \quad \Theta^l = \vartheta^k(\bar{\Theta}^k) \tag{3.74}$$

οπότε

$$\begin{aligned} d\bar{\Theta}^k &= \frac{\partial \bar{\vartheta}^k}{\partial \Theta^l} d\Theta^l \quad , \quad \det\left(\frac{\partial \bar{\vartheta}^k}{\partial \Theta^l}\right) \neq 0 \\ d\Theta^l &= \frac{\partial \vartheta^l}{\partial \bar{\Theta}^k} d\bar{\Theta}^k \quad , \quad \det\left(\frac{\partial \vartheta^l}{\partial \bar{\Theta}^k}\right) \neq 0 \end{aligned} \tag{3.75}$$

Οι παραπάνω κανόνες δείχνουν πώς μετασχηματίζονται τα διαφορικά των συντεταγμένων, ήτοι αν συμβολίσουμε με[10]

$$\bar{a}^k_l = \frac{\partial \bar{\vartheta}^k}{\partial \Theta^l} \quad , \quad \underline{a}^l_k = \frac{\partial \vartheta^l}{\partial \bar{\Theta}^k} \tag{3.76}$$

τότε παίρνουμε ότι

$$d\bar{\Theta}^k = \bar{a}^k_l d\Theta^l \quad , \quad d\Theta^l = \underline{a}^l_k d\bar{\Theta}^k \tag{3.77}$$

και

[10] Πρβλ. Κεφ. 2 εξ. (2.102): $\vec{e}_k = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k}\vec{g}_i, \bar{a}^i_k = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} \quad , \quad \vec{g}_i = \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i}\vec{e}_k, \underline{a}^k_i = \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i}$

$$
\begin{aligned}
d\vec{\Re} &= \bar{\vec{g}}_k d\bar{\Theta}^k = \bar{\vec{g}}_k \frac{\partial \bar{\vartheta}^k}{\partial \Theta^l} d\Theta^l \\
d\vec{\Re} &= \vec{g}_l d\Theta^l = \vec{g}_l \frac{\partial \vartheta^l}{\partial \bar{\Theta}^k} d\bar{\Theta}^k
\end{aligned}
\tag{3.78}
$$

Άρα τα διανύσματα βάσεως στα δύο αυτά συστήματα συνδέονται με τις παρακάτω σχέσεις:

$$
\begin{aligned}
\vec{g}_l d\Theta^l &= \bar{\vec{g}}_k \frac{\partial \bar{\vartheta}^k}{\partial \Theta^l} d\Theta^l \quad \Rightarrow \quad \vec{g}_l = \bar{a}_l^k \bar{\vec{g}}_k \\
\bar{\vec{g}}_k d\bar{\Theta}^k &= \vec{g}_l \frac{\partial \vartheta^l}{\partial \bar{\Theta}^k} d\bar{\Theta}^k \quad \Rightarrow \quad \bar{\vec{g}}_k = \underline{a}_k^l \vec{g}_l
\end{aligned}
\tag{3.79}
$$

Ας θεωρήσουμε τώρα ένα σύστημα 1ης τάξεως A^k, του οποίου οι συνιστώσες μετασχηματίζονται όπως τα διαφορικά των συντεταγμένων, Εξ. (2.21):

$$
\begin{aligned}
A^l &= \frac{\partial \vartheta^l}{\partial \bar{\Theta}^k} \bar{A}^k = \underline{a}_k^l \bar{A}^k \\
\bar{A}^l &= \frac{\partial \bar{\vartheta}^l}{\partial \Theta^k} \bar{A}^k = \bar{a}_k^l A^k
\end{aligned}
\tag{3.80}
$$

Αν ορίσουμε τα διανύσματα

$$
\vec{A} = A^k \vec{g}_k \quad , \quad \bar{\vec{A}} = \bar{A}^k \bar{\vec{g}}_k
\tag{3.81}
$$

τότε από τις Εξ. (3.79) και (3.80) παίρνουμε ότι,

$$
\begin{aligned}
\vec{A} &= A^l \vec{g}_l = \underline{a}_k^l \bar{A}^k \vec{g}_l = \bar{A}^k \bar{\vec{g}}_k \\
\vec{A} &= \bar{A}^l \bar{\vec{g}}_l = \bar{a}_k^l A^k \bar{\vec{g}}_l = A^k \vec{g}_k
\end{aligned}
\tag{3.82}
$$

Για το σύνολο των θεωρούμενων μετασχηματισμών λέμε ότι το σύστημα 1ης τάξεως A^i μετασχηματίζεται ως ένας ανταλλοίωτος τανυστής 1ης τάξεως, όταν αυτό μετασχηματίζεται όπως τα διαφορικά των συντεταγμένων, Εξ. (2.21) και Εξ. (2.23).

3.7 Συναλλοίωτοι τανυστές σε καμπυλόγραμμες συντεταγμένες

Θεωρούμε μια βαθμωτή συνάρτηση

$$
A = A(\Theta^i) = A\left(\vartheta^i(\bar{\Theta}^i)\right) = \bar{A}(\bar{\Theta}^i)
\tag{3.83}
$$

Το τέλειο διαφορικό της είναι αναλλοίωτο

$$
dA = \frac{\partial A}{\partial \Theta^i} d\Theta^i = \frac{\partial \bar{A}}{\partial \bar{\Theta}^i} d\bar{\Theta}^i
\tag{3.84}
$$

Το τέλειο διαφορικό της εν λόγω βαθμωτής συναρτήσεως ορίζει με τη σειρά του έναν τανυστή, που είναι συζυγής προς τα διαφορικά των συντεταγμένων και που είναι ως εκ τούτου ένας συναλλοίωτος τανυστής. Ο συναλλοίωτος αυτός τανυστής είναι η παράγωγός της θεωρούμενης βαθμωτής συναρτήσεως και υπολογίζεται ως εξής,

$$\frac{\partial \bar{A}}{\partial \bar{\Theta}^i} = \frac{\partial \vartheta^j}{\partial \bar{\Theta}^i}\frac{\partial A}{\partial \Theta^j} \quad , \quad \frac{\partial A}{\partial \Theta^i} = \frac{\partial \bar{\vartheta}^j}{\partial \Theta^i}\frac{\partial A}{\partial \bar{\Theta}^j} \tag{3.85}$$

Η παράγωγος αυτή καλείται *συναλλοίωτη παράγωγος* και συμβολίζεται ως εξής,

$$A_{|i} = A_{,i} \tag{3.86}$$

Γενικώς, εισάγοντας τα συστήματα 1ης τάξεως

$$A_i = \frac{\partial A}{\partial \Theta^i} \quad , \quad \bar{A}_i = \frac{\partial \bar{A}}{\partial \bar{\Theta}^i} \tag{3.87}$$

από τις Εξ. (3.76) και (3.85) παίρνουμε το νόμο μετασχηματισμού ενός συναλλοίωτου τανυστή 1ης τάξεως

$$\bar{A}_i = \underline{a}_i^k A_k \quad , \quad A_i = \bar{a}_i^k \bar{A}_k \tag{3.88}$$

3.8 Οι φυσικές συνιστώσες ενός τανυστή

Θεωρούμε ένα ανταλλοίωτο διάνυσμα,

$$\vec{A} = A^i \vec{g}_i = A^1 \vec{g}_1 + A^2 \vec{g}_2 + A^3 \vec{g}_3 \tag{3.89}$$

Το πραγματικό μέγεθος της συνιστώσας στην κατεύθυνση της Θ^1 συμβολίζεται ως

$$A^{*1} = A^1 \left|\vec{g}_1\right| = A^1 \sqrt{\vec{g}_1 \cdot \vec{g}_1} = A^1 \sqrt{g_{11}} \tag{3.90}$$

και αποκαλείται φυσική συνιστώσα. Γενικώς οι φυσικές συνιστώσες ενός διανύσματος δίδονται από τις εξής σχέσεις[11],

$$A^{*i} = A^i \sqrt{g_{(ii)}} \quad , \quad A_i^* = A_i \sqrt{g^{(ii)}} \tag{3.91}$$

Ομοίως θα ορισθούν και οι φυσικές συνιστώσες ενός τανυστή 2ας τάξεως,

[11] Υπενθυμίζουμε ότι ο συμβολισμός επαναλαμβανόμενων δεικτών σε παρένθεση σημαίνει ότι δεν γίνεται άθροιση πάνω στο συγκεκριμένο δείκτη

$$
\begin{aligned}
t^{*ij} &= t^{ij}\sqrt{g_{(ii)}}\sqrt{g_{(jj)}} \\
t^{*i}{}_{j} &= t^{i}_{j}\sqrt{g_{(ii)}}\sqrt{g^{(jj)}} \\
t^{*}{}_{ij} &= t_{ij}\sqrt{g^{(ii)}}\sqrt{g^{(jj)}}
\end{aligned}
\tag{3.92}
$$

3.9 Η συναλλοίωτη παράγωγος ενός τανυστή[12]

Θεωρούμε ένα διανυσματικό πεδίο, που είναι συνάρτηση των καμπυλόγραμμων συντεταγμένων,

$$\vec{A} = A^{i}(\Theta^{k})\vec{g}_{i}(\Theta^{l}) \tag{3.93}$$

Παρατηρούμε ότι στην παραπάνω έκφραση τόσο οι ανταλλοίωτες συνιστώσες του διανύσματος όσο και οι συνιστώσες της συναλλοίωτης βάσεως είναι συναρτήσεις των καμπυλόγραμμων συντεταγμένων. Οπότε η μεταβολή του διανύσματος κατά μήκος των καμπυλόγραμμων συντεταγμένων είναι[13],

$$\vec{A}_{,j} = A^{i}_{,j}\vec{g}_{i} + A^{i}\vec{g}_{i,j} = A^{i}_{,j}\vec{g}_{i} + A^{i}\Gamma^{n}_{ij}\vec{g}_{n} = \left(A^{i}_{,j} + \Gamma^{i}_{kj}A^{k}\right)\vec{g}_{i} \tag{3.94}$$

Η ποσότητα μέσα στην παρένθεση καλείται συναλλοίωτη παράγωγος του ανταλλοίωτου διανύσματος A^{i} και συμβολίζεται ως εξής,

$$A^{i}_{|j} = A^{i}_{,j} + \Gamma^{i}_{jk}A^{k} \tag{3.95}$$

Οπότε

$$\vec{A}_{,j} = A^{i}_{|j}\vec{g}_{i} \tag{3.96}$$

Αποδεικνύεται ότι, εάν ένα σύστημα 1ης τάξεως είναι ανταλλοίωτος τανυστής τότε η συναλλοίωτος παράγωγός του είναι επίσης τανυστής, δηλαδή

$$\bar{A}^{i}_{|j} = \frac{\partial\bar{\vartheta}^{i}}{\partial\Theta^{k}}\frac{\partial\vartheta^{l}}{\partial\Theta^{j}}A^{k}_{|l} \tag{3.97}$$

Παρατηρούμε επίσης ότι η μερική παράγωγος $A^{i}_{,j}$ <u>δεν</u> μετασχηματίζεται ως τανυστής 2ας τάξεως. Ομοίως αποδεικνύεται ότι η συναλλοίωτη παράγωγος ενός συναλλοίωτου διανύσματος είναι τανυστής και δίδεται από την εξής σχέση αντιστοίχως,

$$A_{i|j} = A_{i,j} - \Gamma^{k}_{ij}A_{k} \tag{3.98}$$

---

[12] Αγγλ. covariant derivative
[13] Πρβλ. Εξ. (3.50)

Τέλος παραθέτουμε και τις συναλλοίωτες παραγώγους ενός τανυστή 2ας τάξεως

$$\begin{aligned} A_{ij|k} &= A_{ij,k} - \Gamma^m_{ik} A_{mj} - \Gamma^m_{jk} A_{im} \\ A^i_{j|k} &= A^i_{j,k} + \Gamma^i_{km} A^m_j - \Gamma^m_{jk} A^i_m \\ A^j_{i|k} &= A^j_{i,k} - \Gamma^m_{ik} A^j_m + \Gamma^j_{km} A^m_i \\ A^{ij}_{|k} &= A^{ij}_{,k} + \Gamma^i_{km} A^{mj} + \Gamma^j_{km} A^{im} \end{aligned} \tag{3.99}$$

Ομοίως μπορούμε να ορίσουμε τις συναλλοίωτες παραγώγους τανυστών ανωτέρας τάξεως.

Άσκηση

Να αποδειχθεί ότι η συναλλοίωτη παράγωγος των διανυσμάτων βάσεως μηδενίζεται

$$\vec{g}^i_{|k} = 0 \tag{3.100}$$

Λύση

Θεωρούμε το διάνυσμα

$$\vec{A}^i = A^i_j \vec{g}^j (\Theta^l)$$

Οπότε βάσει τις εξ. (3.99) έχουμε

$$\vec{A}^i_{|k} = A^i_{j|k} \vec{g}^j = \left(A^i_{j,k} + \Gamma^i_{km} A^m_j - \Gamma^m_{jk} A^i_m \right) \vec{g}^j$$

Έστω

$$A^i_j = \delta^i_j$$

Άρα

$$A^i_{j|k} = \delta^i_{j,k} + \Gamma^i_{km} \delta^m_j - \Gamma^m_{jk} \delta^i_m = \Gamma^i_{kj} - \Gamma^i_{jk} = 0$$

ο.ε.δ.

Στο σημείο αυτό θα παρατηρήσουμε ότι ο μηδενισμός της συναλλοίωτης παραγώγου των διανυσμάτων βάσεως, εξ. (3.100), ερμηνεύεται ως σχέση παραλληλίας:

Θεώρημα

Τα διανύσματα βάσεως μεταφέρονται «παραλλήλως» κατά μήκος των συντεταγμένων καμπυλών[14].

---

[14] Η γενίκευση αυτή ονομάζεται και παράλληλη μεταφορά κατά Levi-Civita.

Πράγματι,

$$\begin{aligned} &\vec{A}^i_{,j} = A^i_{j|k}\vec{g}_i \quad \Rightarrow \quad \vec{g}_{i,j} = \vec{0} \quad \Rightarrow \\ &\vec{g}_{(i)} \cdot \left(\vec{g}_{(i)} + \vec{g}_{(i),j} d\Theta^j \right) = g_{(i)(i)} \end{aligned} \tag{3.101}$$

3.10 Ο τελεστής βαθμίδας σε ορθογώνιες καμπυλόγραμμες συντεταγμένες

Σε καρτεσιανές συντεταγμένες ο διαφορικός τελεστής της βαθμίδας ορίζεται ως,

$$\vec{\nabla} = \vec{e}^i \frac{\partial}{\partial x^i} \tag{3.102}$$

οπότε,

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} &= \vec{e}^i \frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial \chi^i}{\partial \Theta^k} \vec{g}^k \frac{\partial \vartheta^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial \Theta^j} \\ &= \frac{\partial \vartheta^j}{\partial x^i} \frac{\partial \chi^i}{\partial \Theta^k} \vec{g}^k \frac{\partial}{\partial \Theta^j} = \delta^j_k \vec{g}^k \frac{\partial}{\partial \Theta^j} = \vec{g}^k \frac{\partial}{\partial \Theta^k} \end{aligned} \tag{3.103}$$

Άρα η βαθμίδα ενός βαθμωτού μεγέθους σε καμπυλόγραμμες συντεταγμένες υπολογίζεται ως εξής,

$$\vec{\nabla} A = \vec{g}^k \frac{\partial A}{\partial \Theta^k} = A_{,k} \vec{g}^k \tag{3.104}$$

ή λόγω της Εξ. (3.86),

$$\mathbf{grad}\ A = \vec{\nabla} A = A_{|k} \vec{g}^k \tag{3.105}$$

Παράδειγμα: *Κυλινδρικές Πολικές Συντεταγμένες*

Από την Εξ. (3.105) παίρνουμε

$$\mathbf{grad}\, A = A_{|1} \vec{g}^1 + A_{|2} \vec{g}^2 + A_{|3} \vec{g}^3 \tag{3.106}$$

άρα σε πολικές συντεταγμένες έχουμε,

$$\mathbf{grad}\ A = \frac{\partial A}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{\partial A}{\partial z} \vec{e}_z \tag{3.107}$$

3.11 Ο τελεστής αποκλίσεως σε ορθογώνιες καμπυλόγραμμες συντεταγμένες και εφαρμογή σε κυλινδρικές πολικές συντεταγμένες

Ο διαφορικός τελεστής της αποκλίσεως ορίζεται ως εξής,

$$div\vec{v} = \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \left(\vec{g}^i \frac{\partial}{\partial \Theta^i} \right) \cdot \left(v^j \vec{g}_j \right) \tag{3.108}$$

ή

$$\begin{aligned} div\vec{v} &= \vec{g}^i \cdot \left(v^j_{,i} \vec{g}_j + v^j \vec{g}_{j,i} \right) = \vec{g}^i \cdot \left(v^j_{,i} \vec{g}_j + v^j \Gamma^k_{ji} \vec{g}_k \right) \\ &= \vec{g}^i \cdot \vec{g}_j \left(v^j_{,i} + \Gamma^j_{ki} v^k \right) = \delta^i_j v^j_{|i} \\ &= v^i_{|i} = g^{ik} v_{i|k} \end{aligned} \tag{3.109}$$

Άρα

$$div\vec{v} = g^{ik} v_{i|k} = v^i_{|i} \tag{3.110}$$

Παράδειγμα: *Κυλινδρικές Πολικές Συντεταγμένες*

Θεωρούμε το διάνυσμα της ταχύτητας,

$$\vec{v} = v_1 \vec{g}^1 + v_2 \vec{g}^2 + v_3 \vec{g}^3 = v_r \vec{e}_r + v_\theta \vec{e}_\theta + v_z \vec{e}_z \tag{3.111}$$

όπου

$$\begin{aligned} v_r &= \vec{v} \cdot \vec{e}_r = v_1 \\ v_\theta &= \vec{v} \cdot \vec{e}_\theta = \frac{1}{r} v_2 \\ v_z &= \vec{v} \cdot \vec{e}_z = v_3 \end{aligned}$$

ή

$$\begin{aligned} v_r &= v^*{}_1 = v_1 \sqrt{g^{11}} = v_1 \\ v_\theta &= v^*{}_2 = v_2 \sqrt{g^{22}} = \frac{1}{r} v_2 \\ v_z &= v^*{}_3 = v_3 \sqrt{g^{33}} = v_3 \end{aligned} \tag{3.112}$$

Άρα

$$v_1 = v_r \quad , \quad v_2 = r v_\theta \quad , \quad v_3 = v_z \tag{3.113}$$

- Υπολογισμός των συναλλοίωτων παραγώγων: $v_{k|l} = v_{k,l} - \Gamma^m_{kl} v_m$

$$\begin{aligned}
v_{1|1} &= v_{1,1} - \Gamma_{11}^{m} v_m = v_{1,1} \\
v_{1|2} &= v_{1,2} - \Gamma_{12}^{m} v_m = v_{1,2} - \Gamma_{12}^{2} v_2 = v_{1,2} - \frac{1}{r} v_2 \\
v_{1|3} &= v_{1,3} - \Gamma_{13}^{m} v_m = v_{1,3}
\end{aligned} \tag{3.114}$$

$$\begin{aligned}
v_{2|1} &= v_{2,1} - \Gamma_{21}^{m} v_m = v_{1,1} - \Gamma_{21}^{2} v_2 = v_{2,1} - \frac{1}{r} v_2 \\
v_{2|2} &= v_{2,2} - \Gamma_{22}^{m} v_m = v_{2,2} - \Gamma_{22}^{1} v_1 = v_{2,2} + r v_1 \\
v_{2|3} &= v_{2,3} - \Gamma_{23}^{m} v_m = v_{2,3}
\end{aligned} \tag{3.115}$$

$$\begin{aligned}
v_{3|1} &= v_{3,1} - \Gamma_{31}^{m} v_m = v_{3,1} \\
v_{3|2} &= v_{3,2} - \Gamma_{32}^{m} v_m = v_{3,2} \\
v_{3|3} &= v_{3,3} - \Gamma_{33}^{m} v_m = v_{3,3}
\end{aligned} \tag{3.116}$$

- Υπολογισμός φυσικών συνιστωσών των συναλλοίωτων παραγώγων:

$$\begin{aligned}
v_{r|r} &= v_{1|1}^{*} = v_{1|1} \sqrt{g^{11}} \sqrt{g^{11}} = v_{1|1} \\
v_{r|\theta} &= v_{1|2}^{*} = v_{1|2} \sqrt{g^{11}} \sqrt{g^{22}} = \frac{1}{r} v_{1|2} \\
v_{r|z} &= v_{1|3}^{*} = v_{1|3} \sqrt{g^{11}} \sqrt{g^{33}} = v_{1|3}
\end{aligned} \tag{3.117}$$

$$\begin{aligned}
v_{\theta|r} &= v_{2|1}^{*} = v_{2|1} \sqrt{g^{22}} \sqrt{g^{11}} = \frac{1}{r} v_{2|1} \\
v_{\theta|\theta} &= v_{2|2}^{*} = v_{2|2} \sqrt{g^{22}} \sqrt{g^{22}} = \frac{1}{r^2} v_{2|2} \\
v_{\theta|z} &= v_{2|3}^{*} = v_{2|3} \sqrt{g^{22}} \sqrt{g^{33}} = \frac{1}{r} v_{2|3}
\end{aligned} \tag{3.118}$$

$$\begin{aligned}
v_{z|r} &= v_{3|1}^{*} = v_{3|1} \sqrt{g^{33}} \sqrt{g^{11}} = v_{3|1} \\
v_{z|\theta} &= v_{3|2}^{*} = v_{3|2} \sqrt{g^{33}} \sqrt{g^{22}} = \frac{1}{r} v_{3|2} \\
v_{z|z} &= v_{3|3}^{*} = v_{3|3} \sqrt{g^{33}} \sqrt{g^{33}} = v_{3|3}
\end{aligned} \tag{3.119}$$

Άρα,

$$
\begin{aligned}
v_{r|r} &= v^*_{1|1} = v_{1|1} = v_{1,1} = \frac{\partial}{\partial r} v_r \\
v_{r|\theta} &= v^*_{1|2} = \frac{1}{r} v_{1|2} = \frac{1}{r}\left(v_{1,2} - \frac{1}{r} v_2 \right) = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial \theta} v_r - \frac{1}{r}\left(r v_\theta \right) \right) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} v_r - \frac{v_\theta}{r} \\
v_{r|z} &= v^*_{1|3} = v_{1|3} = v_{1,3} = \frac{\partial}{\partial z} v_r
\end{aligned}
\tag{3.120}
$$

$$
\begin{aligned}
v_{\theta|r} &= v^*_{2|1} = \frac{1}{r} v_{2|1} = \frac{1}{r}\left(v_{2,1} - \frac{1}{r} v_2 \right) = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(r v_\theta) - \frac{1}{r}(r v_\theta) \right) = \frac{\partial}{\partial r} v_\theta \\
v_{\theta|\theta} &= v^*_{2|2} = \frac{1}{r^2} v_{2|2} = \frac{1}{r^2}\left(v_{2,2} + r v_1 \right) = \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial}{\partial \theta}(r v_\theta) + r v_r \right) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} v_\theta + \frac{v_r}{r} \\
v_{\theta|z} &= v^*_{2|3} = \frac{1}{r} v_{2|3} = \frac{1}{r} v_{2,3} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial z}(r v_\theta) = \frac{\partial}{\partial z} v_\theta
\end{aligned}
\tag{3.121}
$$

$$
\begin{aligned}
v_{z|r} &= v^*_{3|1} = v_{3|1} = v_{3,1} = \frac{\partial}{\partial r} v_z \\
v_{z|\theta} &= v^*_{3|2} = \frac{1}{r} v_{3|2} = \frac{1}{r} v_{3,2} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} v_z \\
v_{z|z} &= v^*_{3|3} = v_{3|3} = v_{3,3} = \frac{\partial}{\partial z} v_z
\end{aligned}
\tag{3.122}
$$

και

$$
div\vec{v} = g^{ik} v_{i|k} = g^{11} v_{1|1} + g^{22} v_{2|2} + g^{33} v_{3|3} \tag{3.123}
$$

ή

$$
div\vec{v} = v_{1|1} + \frac{1}{r^2} v_{2|2} + v_{3|3} = v_{r|r} + v_{\theta|\theta} + v_{z|z} \tag{3.124}
$$

ή

$$
div\vec{v} = \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \tag{3.125}
$$

3.12 Ο τελεστής στροβιλισμού σε ορθογώνιες καμπυλόγραμμες συντεταγμένες και εφαρμογή σε κυλινδρικές πολικές συντεταγμένες

Ο διαφορικός τελεστής του στροβιλισμού ορίζεται ως εξής,

$$
\mathbf{rot}\,\vec{v} = \vec{\nabla} \times \vec{v} = \left(\vec{g}^k \frac{\partial}{\partial \Theta^k} \right) \times \left(v_l \vec{g}^l \right) \tag{3.126}
$$

ή

$$\mathbf{rot}\ \vec{v} = \left(\vec{g}^k \times \vec{g}^l\right) v_{l,k} + v_l \left(\vec{g}^k \times g^l_{,k}\right) \tag{3.127}$$

Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}
\vec{g}^k \times g^l_{,k} &= -\Gamma^l_{km}\left(\vec{g}^k \times \vec{g}^m\right) = -\frac{1}{2}\left(\Gamma^l_{km} + \Gamma^l_{mk}\right)\left(\vec{g}^k \times \vec{g}^m\right) \\
&= -\frac{1}{2}\left(\Gamma^l_{km}\left(\vec{g}^k \times \vec{g}^m\right) + \Gamma^l_{mk}\left(\vec{g}^k \times \vec{g}^m\right)\right) \\
&= -\frac{1}{2}\left(\Gamma^l_{km}\left(\vec{g}^k \times \vec{g}^m\right) + \Gamma^l_{mk}\left(-\vec{g}^m \times \vec{g}^k\right)\right) \\
&= -\frac{1}{2}\left(\Gamma^l_{km}\left(\vec{g}^k \times \vec{g}^m\right) - \Gamma^l_{mk}\left(\vec{g}^m \times \vec{g}^k\right)\right) \\
&-\frac{1}{2}\left(\Gamma^l_{km}\left(\vec{g}^k \times \vec{g}^m\right) - \Gamma^l_{km}\left(\vec{g}^k \times \vec{g}^m\right)\right) = 0
\end{aligned} \tag{3.128}$$

άρα

$$\mathbf{rot}\,\vec{v} = \left(\vec{g}^k \times \vec{g}^l\right) v_{l,k} = e^{klm} v_{l,k} \vec{g}_m \tag{3.129}$$

Παράδειγμα: *Κυλινδρικές Πολικές Συντεταγμένες*

Αναπτύσσουμε την παραπάνω έκφραση, Εξ. (3.129),

$$\mathbf{rot}\,\vec{v}\cdot\vec{g}_1 = e^{klm} v_{l,k}\vec{g}_m \cdot \vec{g}_1 = e^{klm} v_{l,k}\delta_{m1} = e^{kl1} v_{l,k}$$

$$= e^{231} v_{3,2} + e^{321} v_{2,3} = \frac{1}{\sqrt{g}}\left(v_{3,2} - v_{2,3}\right) = \frac{1}{r}\left(v_{3,2} - v_{2,3}\right)$$

$$\mathbf{rot}\,\vec{v}\cdot\vec{g}_2 = e^{klm} v_{l,k}\vec{g}_m \cdot \vec{g}_2 = e^{klm} v_{l,k}\delta_{m2} = e^{kl2} v_{l,k}$$

$$= e^{132} v_{3,1} + e^{312} v_{1,3} = \frac{1}{\sqrt{g}}\left(v_{1,3} - v_{3,1}\right) = \frac{1}{r}\left(v_{1,3} - v_{3,1}\right)$$

$$\mathbf{rot}\,\vec{v}\cdot\vec{g}_3 = e^{klm} v_{l,k}\vec{g}_m \cdot \vec{g}_3 = e^{klm} v_{l,k}\delta_{m3} = e^{kl3} v_{l,k}$$

$$= e^{123} v_{2,1} + e^{213} v_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{g}}\left(v_{2,1} - v_{1,2}\right) = \frac{1}{r}\left(v_{2,1} - v_{1,2}\right)$$

Άρα

$$\mathbf{rot}\,\vec{v} = \frac{1}{r}\left(v_{3,2} - v_{2,3}\right) h_1 \vec{e}_r + \frac{1}{r}\left(v_{1,3} - v_{3,1}\right) h_2 \vec{e}_\theta + \frac{1}{r}\left(v_{2,1} - v_{1,2}\right) h_3 \vec{e}_z$$

ή

$$\mathbf{rot} = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial v_z}{\partial \theta} - \frac{\partial}{\partial z}\left(r v_\theta\right)\right)\vec{e}_r + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r}\right) r\vec{e}_\theta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(r v_\theta\right) - \frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right)\vec{e}_z$$

ή

$$\mathbf{rot} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta} - \frac{\partial v_\theta}{\partial z}\right)\vec{e}_r + \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r}\right)\vec{e}_\theta + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r v_\theta\right) - \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right)\vec{e}_z \tag{3.130}$$

3.13 Ο τελεστής Laplace σε ορθογώνιες καμπυλόγραμμες συντεταγμένες και εφαρμογή σε κυλινδρικές πολικές συντεταγμένες

Ο διαφορικός τελεστής του **Laplace** ορίζεται ως εξής,

$$\nabla^2 \phi = \mathrm{div}\,\mathbf{grad}\,\phi \tag{3.131}$$

Όπως δείξαμε παραπάνω,

$$\mathbf{grad}\,\phi = \phi_{|k}\vec{g}^{k} = A_k \vec{g}^{k}\,,\ A_k = \phi_{|k} = \phi_{,i} \tag{3.132}$$

και

$$div\vec{A} = g^{ik} A_{i|k} \tag{3.133}$$

Από την Εξ.(3.98) παίρνουμε

$$A_{i|k} = A_{i,k} - \Gamma_{ik}^{m} A_m = \phi_{,ik} - \Gamma_{ik}^{m}\phi_{,m} \tag{3.134}$$

οπότε

$$\nabla^2 \phi = g^{ik}\left(\phi_{,ik} - \Gamma_{ik}^{m}\phi_{,m}\right) \tag{3.135}$$

Παράδειγμα: *Κυλινδρικές Πολικές Συντεταγμένες*

Με δεδομένα

$$[g^{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

και

$$\left[\Gamma^1_{ij}\right]=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&-r&0\\0&0&0\end{bmatrix},\left[\Gamma^2_{ij}\right]=\begin{bmatrix}0&1/r&0\\1/r&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},\left[\Gamma^3_{ij}\right]=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

αναπτύσσουμε την παραπάνω έκφραση, Εξ. (3.135)

$$\begin{aligned}\nabla^2\phi &= g^{ik}\left(\phi_{,ik}-\Gamma^m_{ik}\phi_{,m}\right)\\ &= g^{11}\left(\phi_{,11}-\Gamma^m_{11}\phi_{,m}\right)+g^{22}\left(\phi_{,22}-\Gamma^m_{22}\phi_{,m}\right)+g^{33}\left(\phi_{,33}-\Gamma^m_{33}\phi_{,m}\right)\\ &= \phi_{,11}+\frac{1}{r^2}\left(\phi_{,22}-\Gamma^1_{22}\phi_{,1}\right)+\phi_{,33}\end{aligned}$$

ή

$$\nabla^2\phi=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} \tag{3.136}$$

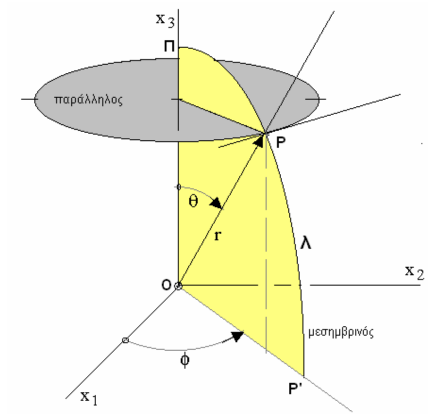
3.14 Άσκηση: Σφαιρικές πολικές συντεταγμένες

Συμφώνως προς την Εικ. 3-4 σε ένα σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων η γωνία $\prec(POP')=\lambda=90^o-\theta$, καλείται *γεωγραφικό πλάτος* και η γωνία $\prec(+x_1OP')=\phi$ καλείται *γεωγραφικό μήκος*. Το τυχόν σημείο του χώρου P πάνω στη σφαίρα βρίσκεται στην τομή ενός *παράλληλου κύκλου,* $\lambda=\sigma\tau\alpha\theta.$ και ενός *μεσημβρινού,* $\phi=\sigma\tau\alpha\theta.$ Έστω το διάνυσμα θέσεως σε καρτεσιανές συντεταγμένες

$$\vec{OP}=x^i\vec{e}_i \tag{3.137}$$

Οι πολικές σφαιρικές συντεταγμένες του διανύσματος θέσεως και καρτεσιανές του συντεταγμένες συσχετίζονται ως εξής,

$$\begin{aligned}x=x^1&=\chi^1(\Theta^i)=\Theta^1\sin\Theta^2\cos\Theta^3=r\sin\theta\cos\phi\\ y=x^2&=\chi^2(\Theta^i)=\Theta^1\sin\Theta^2\sin\Theta^3=r\sin\theta\sin\phi\\ z=x^3&=\chi^3(\Theta^i)=\Theta^1\cos\Theta^2=r\cos\theta\end{aligned} \tag{3.138}$$



Εικ. 3-4: Καρτεσιανές και σφαιρικές συνταγμένες σημείου στο χώρο

1. Να αποδειχθούν οι παρακάτω σχέσεις:

$$\begin{aligned}
\vec{g}_1 &= \sin\theta\cos\phi\,\vec{e}_1 + \sin\theta\sin\phi\,\vec{e}_2 + \cos\theta\,\vec{e}_3 \\
\vec{g}_2 &= r\cos\theta\cos\phi\,\vec{e}_1 + r\cos\theta\sin\phi\,\vec{e}_2 - r\sin\theta\,\vec{e}_3 \\
\vec{g}_3 &= -r\sin\theta\sin\phi\,\vec{e}_1 + r\sin\theta\cos\phi\,\vec{e}_2
\end{aligned} \tag{3.139}$$

2. Να επαληθευθεί ότι το σύστημα πολικών σφαιρικών συντεταγμένων είναι ορθογώνιο.

3. Να επαληθευθεί ότι οι μετρικοί τανυστές δίδονται από τους εξής πίνακες:

$$[g_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\sin^2\theta \end{bmatrix} \quad , \quad [g^{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{r^2\sin^2\theta} \end{bmatrix} \tag{3.140}$$

4. Να αποδειχθούν οι παρακάτω σχέσεις μεταξύ των διανυσμάτων βάσεως,

$$\vec{g}^1 = \vec{g}_1 \quad , \quad \vec{g}^2 = \frac{1}{r^2}\vec{g}^2 \quad , \quad \vec{g}^3 = \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\vec{g}^3 \tag{3.141}$$

5. Να επαληθευθεί ότι τα σύμβολα Christoffel δίδονται από τους εξής πίνακες:

$$\left[\Gamma^1_{ij}\right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -r & 0 \\ 0 & 0 & -r\sin^2\theta \end{bmatrix} \tag{3.142}$$

$$\left[\Gamma^2_{ij}\right] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{r} & 0 \\ \frac{1}{r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sin\theta\cos\theta \end{bmatrix} \tag{3.143}$$

$$\left[\Gamma^3_{ij}\right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{r} \\ 0 & 0 & \cot\theta \\ \frac{1}{r} & \cot\theta & 0 \end{bmatrix} \tag{3.144}$$

6. Αν $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi$ είναι η τοπική ορθοκανονική βάση, να αποδειχθούν οι παρακάτω εκφράσεις για τους βασικούς διαφορικούς τελεστές:

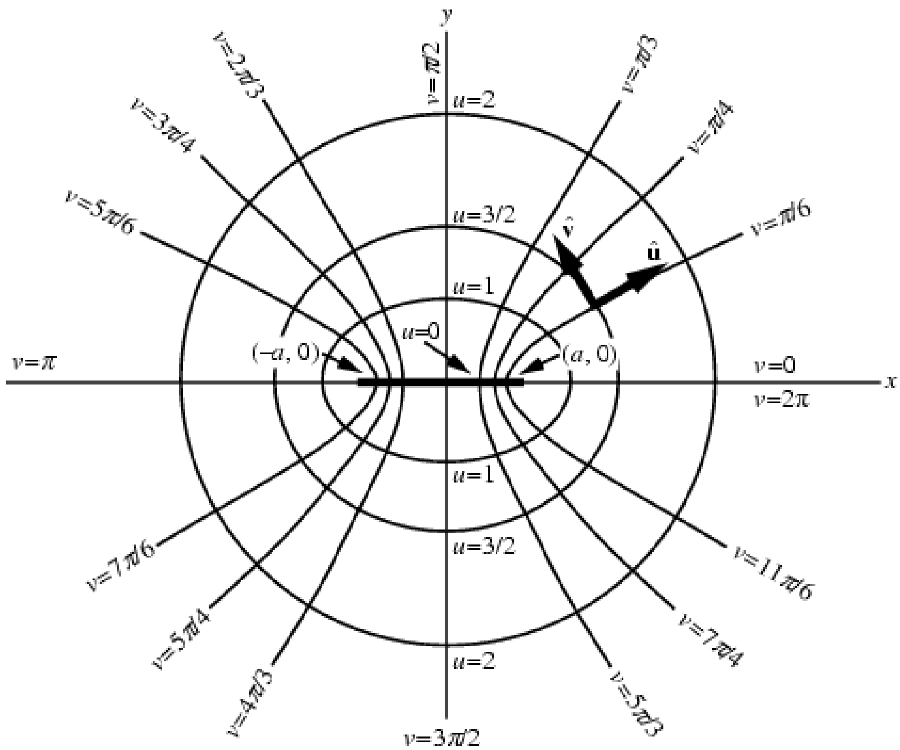
$$\mathbf{grad}\,\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial \Phi}{\partial \phi}\vec{e}_\phi \tag{3.145}$$

$$div\vec{v} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 v_r\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta v_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} \tag{3.146}$$

$$\mathbf{rot}\,\vec{v}$$
$$= \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta v_\phi) - \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi}\right]\vec{e}_r + \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r}\left(r v_\phi\right)\right]\vec{e}_\theta + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r v_\theta\right) - \frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right]\vec{e}_\phi$$
(3.147)

$$\nabla^2\Phi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial \Phi}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} \tag{3.148}$$

3.15 Παράρτημα: Συντεταγμένες του ελλειπτικού κυλίνδρου



Εικ. 3-5: Ελλειπτικές συντεταγμένες στο επίπεδο (x, y)

Στο επίπεδο (x, y) οι ελλειπτικές συντεταγμένες (u, v) ενός σημείου συνδέονται με τις καρτεσιανές του συντεταγμένες βάσει των κάτωθι σχέσεων,

$$\begin{aligned} x &= a\cosh u \cos v \\ y &= a\sinh u \sin v \end{aligned} \tag{3.149}$$

όπου

$$u \geq 0 \quad , \quad 0 \leq v < 2\pi \tag{3.150}$$

Από την τριγωνομετρική ταυτότητα

$$\frac{x^2}{a^2\cosh^2 u} + \frac{y^2}{a^2\sinh^2 u} = \cos^2 v + \sin^2 v = 1 \tag{3.151}$$

προκύπτει ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων με $u = const$ είναι ομοεστιακές ελλείψεις. Ενώ από την υπερβολική τριγωνομετρική ταυτότητα

$$\frac{x^2}{a^2\cos^2 v}-\frac{y^2}{a^2\sin^2 v}=\cosh^2 u-\sinh^2 u=1 \tag{3.152}$$

προκύπτει ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων με $v=const$ είναι ομοεστιακές υπερβολές. Οι κοινές εστίες των οικογενειών αυτών των καμπυλών $u=const$ και $v=const$ κείνται στα σημεία $(x,y)=(\pm a,0)$ (Εικ. 3-5): Κάθε καμπύλη $v=const$ είναι το ένα τέταρτο μίας υπερβολής. Οι τιμές $v=0$ και $v=2\pi$ αντιστοιχούν στο τμήμα του άξονα x για $a\le x<\infty$. Η καμπύλη $u=0$, είναι μια εκφυλισμένη έλλειψη, που εκτείνεται στο διάστημα $-a\le x\le a$.

Αναλυτικώς το σύστημα ελλειπτικών συντεταγμένων ορίζεται από τις παρακάτω σχέσεις:

$$\begin{aligned}
x &= \chi^1(\Theta^i)=a\cosh\Theta^1\cos\Theta^2 = c\cosh u\cos v\\
y &= \chi^2(\Theta^i)=a\sinh\Theta^1\sin\Theta^2 = c\sinh u\sin v\\
z &= \chi^3(\Theta^i)=\Theta^3
\end{aligned} \tag{3.153}$$

Από την έκφραση για το διάνυσμα θέσεως,

$$\vec{\Re}=x^i\vec{e}_i=a\cosh\Theta^1\cos\Theta^2\vec{e}_1+a\sinh\Theta^1\sin\Theta^2\vec{e}_2+\Theta^3\vec{e}_3 \tag{3.154}$$

και την εξ. (3.11) παίρνουμε,

$$\begin{Bmatrix}\vec{g}_1\\ \vec{g}_2\\ \vec{g}_3\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}a\sinh u\cos v & -a\cosh u\sin v & 0\\ a\cosh u\sin v & a\sinh u\cos v & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\vec{e}_1\\ \vec{e}_2\\ \vec{e}_3\end{Bmatrix} \tag{3.155}$$

και την Ιακωβιανή του

$$\begin{aligned}
J=g&=\det\left[\frac{\partial\chi^i}{\partial\Theta^j}\right]=a^2\left(\cosh^2 u-\cos^2 v\right)\\
&=a^2\left(\sinh^2 u+\sin^2 v\right)=a^2\frac{1}{2}\left(\cosh 2u-\cos 2v\right)
\end{aligned} \tag{3.156}$$

Παρατηρούμε ότι το σύστημα ελλειπτικών κυλινδρικών συντεταγμένων είναι ένα ορθογώνιο σύστημα (γιατί;).

Βαθμωτοί συντελεστές:

$$h_1=h_2=a\sqrt{\sinh^2 u+\sin^2 v}=a\sqrt{\frac{1}{2}\left(\cosh 2u-\cos 2v\right)}\quad ,\quad h_3=1 \tag{3.157}$$

Τανυστές της μετρικής:

$$[g_{ij}] = \begin{bmatrix} a\sinh u\cos v & -a\cosh u\sin v & 0 \\ a\cosh u\sin v & a\sinh u\cos v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.158}$$

και

$$[g^{ij}] = \frac{1}{g}\begin{bmatrix} a\sinh u\cos v & a\cosh u\sin v & 0 \\ -a\cosh u\sin v & a\sinh u\cos v & 0 \\ 0 & 0 & a^2\left(\cosh^2 u - \cos^2 v\right) \end{bmatrix} \tag{3.159}$$

Βαθμίδα

$$\vec{\nabla}A = \vec{g}^k\,\frac{\partial A}{\partial\Theta^k} = A_{,k}\vec{g}^k \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla}A = \frac{\partial A}{\partial u}\vec{g}^1 + \frac{\partial A}{\partial v}\vec{g}^2 + \frac{\partial A}{\partial z}\vec{g}^3 \tag{3.160}$$

Έστω,

$$A_i = A_{,i} \equiv A_{|i} \tag{3.161}$$

Τότε οι φυσικές συνιστώσες της βαθμίδας υπολογίζονται βάσει της εξ. (3.91)

$$\begin{aligned} A_1^* &= A_1\sqrt{g^{11}} = \sqrt{\frac{2\sinh u\cos v}{a\left(\cosh 2u - \cos 2v\right)}}\,\frac{\partial A}{\partial u} \\ A_2^* &= A_2\sqrt{g^{22}} = \sqrt{\frac{2\sinh u\cos v}{a\left(\cosh 2u - \cos 2v\right)}}\,\frac{\partial A}{\partial v} \\ A_3^* &= A_3\sqrt{g^{33}} = \frac{\partial A}{\partial z} \end{aligned} \tag{3.162}$$

Σύμβολα Christoffel:

$$\left[g_{1m,n}\right] = \begin{bmatrix} a\cosh u\cos v & -a\sinh u\sin v & 0 \\ -a\sinh u\sin v & -a\cosh u\cos v & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.163}$$

$$\left[g_{2m,n}\right] = \begin{bmatrix} a\sinh u\sin v & a\cosh u s\cos v & 0 \\ a\cosh u\cos v & -a\sinh u\sin v & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.164}$$

$$\left[g_{3m,n}\right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.165}$$

$$\Gamma^1_{11} = \frac{1}{2} g^{1n} \left(g_{1n,1} + g_{n1,1} - g_{11,n} \right)$$
$$= \frac{1}{2} g^{11} \left(g_{11,1} + g_{11,1} - g_{11,1} \right) + \frac{1}{2} g^{12} \left(g_{12,1} + g_{21,1} - g_{11,2} \right) + \frac{1}{2} g^{11} \left(g_{13,1} + g_{31,1} - g_{11,3} \right)$$
$$= \frac{\sinh u \cosh u}{\cosh 2u - \cos 2v}$$

$$\Gamma^1_{12} = \frac{1}{2} g^{1n} \left(g_{2n,1} + g_{n1,2} - g_{12,n} \right)$$
$$= \frac{1}{2} g^{11} \left(g_{21,1} + g_{11,2} - g_{12,1} \right) + \frac{1}{2} g^{12} \left(g_{22,1} + g_{21,2} - g_{12,2} \right) + \frac{1}{2} g^{13} \left(g_{23,1} + g_{31,2} - g_{12,3} \right)$$
$$= \frac{\cos v \sin v \left(4\cosh^2 u - 1 \right)}{\cosh 2u - \cos 2v}$$

$$\Gamma^1_{13} = \frac{1}{2} g^{1n} \left(g_{3n,1} + g_{n1,3} - g_{13,n} \right) = 0$$

$$\Gamma^1_{21} = \Gamma^1_{12}$$

$$\Gamma^1_{22} = \frac{1}{2} g^{1n} \left(g_{2n,2} + g_{n2,2} - g_{22,n} \right)$$
$$= \frac{1}{2} g^{11} \left(g_{21,2} + g_{12,2} - g_{22,1} \right) + \frac{1}{2} g^{12} \left(g_{22,2} + g_{22,2} - g_{22,2} \right) + \frac{1}{2} g^{13} \left(g_{23,2} + g_{32,2} - g_{22,3} \right)$$
$$= -\frac{\sinh u \cosh u}{\cosh 2u - \cos 2v}$$

$$\Gamma^1_{23} = \frac{1}{2} g^{1n} \left(g_{3n,2} + g_{n2,3} - g_{23,n} \right) = 0$$

$$\Gamma^1_{13} = \Gamma^1_{23} = \Gamma^1_{23} = 0$$

$$\Gamma^2_{11} = \frac{1}{2} g^{2n} \left(g_{1n,1} + g_{n1,1} - g_{11,n} \right)$$
$$= \frac{1}{2} g^{21} \left(g_{11,1} + g_{11,1} - g_{11,1} \right) + \frac{1}{2} g^{22} \left(g_{12,1} + g_{21,1} - g_{11,2} \right) + \frac{1}{2} g^{23} \left(g_{13,1} + g_{31,1} - g_{11,3} \right)$$
$$= -\frac{\cos v \sin v}{\cosh 2u - \cos 2v}$$

$$\Gamma_{12}^{2}=\frac{1}{2}g^{2n}\left(g_{2n,1}+g_{n1,2}-g_{12,n}\right)$$
$$=\frac{1}{2}g^{21}\left(g_{21,1}+g_{11,2}-g_{12,1}\right)+\frac{1}{2}g^{22}\left(g_{22,1}+g_{21,2}-g_{12,2}\right)+\frac{1}{2}g^{23}\left(g_{23,1}+g_{31,2}-g_{12,3}\right)$$
$$=\frac{\sinh u\cosh u\left(4\cos^{2}v-1\right)}{\cosh 2u-\cos 2v}$$

$$\Gamma_{13}^{2}=\frac{1}{2}g^{2n}\left(g_{3n,1}+g_{n1,3}-g_{13,n}\right)=0$$

$$\Gamma_{22}^{2}=\frac{1}{2}g^{2n}\left(g_{2n,2}+g_{n2,2}-g_{22,n}\right)$$
$$=\frac{1}{2}g^{21}\left(g_{21,2}+g_{12,2}-g_{22,1}\right)+\frac{1}{2}g^{22}\left(g_{22,2}+g_{22,2}-g_{22,2}\right)+\frac{1}{2}g^{23}\left(g_{23,2}+g_{32,2}-g_{22,3}\right)$$
$$=\frac{\cos v\sin v}{\cosh 2u-\cos 2v}$$

$$\Gamma_{23}^{2}=\frac{1}{2}g^{2n}\left(g_{3n,2}+g_{n2,3}-g_{23,n}\right)=0$$

$$\Gamma_{13}^{2}=\Gamma_{23}^{2}=\Gamma_{23}^{2}=0$$

$$\Gamma_{11}^{3}=\frac{1}{2}g^{3n}\left(g_{1n,1}+g_{n1,1}-g_{11,n}\right)=\frac{1}{2}g^{33}\left(g_{13,1}+g_{31,1}-g_{11,3}\right)=0$$

$$\Gamma_{12}^{3}=\frac{1}{2}g^{3n}\left(g_{2n,1}+g_{n1,2}-g_{12,n}\right)=\frac{1}{2}g^{33}\left(g_{23,1}+g_{31,2}-g_{12,3}\right)=0$$

$$\Gamma_{13}^{3}=\frac{1}{2}g^{3n}\left(g_{3n,1}+g_{n1,3}-g_{13,n}\right)=\frac{1}{2}g^{33}\left(g_{33,1}+g_{31,3}-g_{13,3}\right)=0$$

$$\Gamma_{21}^{3}=\Gamma_{12}^{3}=0$$

$$\Gamma_{22}^{3}=\frac{1}{2}g^{3n}\left(g_{2n,2}+g_{n2,2}-g_{22,n}\right)=\frac{1}{2}g^{33}\left(g_{23,2}+g_{32,2}-g_{22,3}\right)=0$$

$$\Gamma_{23}^{3}=\frac{1}{2}g^{3n}\left(g_{3n,2}+g_{n2,3}-g_{23,n}\right)=\frac{1}{2}g^{33}\left(g_{33,2}+g_{32,3}-g_{23,3}\right)=0$$

$$\Gamma_{31}^{3}=\Gamma_{13}^{3}=0$$

$$\Gamma_{32}^{3}=\Gamma_{23}^{3}=0$$

$$\Gamma_{33}^{3} = \frac{1}{2} g^{3n} \left(g_{3n,3} + g_{n3,3} - g_{33,n} \right) = \frac{1}{2} g^{33} \left(g_{33,3} + g_{33,3} - g_{33,3} \right) = 0$$

Άρα

$$\left[\Gamma_{ij}^{1} \right] = \begin{bmatrix} \dfrac{\sinh u \cosh u}{\cosh 2u - \cos 2v} & \dfrac{\cos v \sin v \left(4\cosh^2 u - 1 \right)}{\cosh 2u - \cos 2v} & 0 \\ \dfrac{\cos v \sin v \left(4\cosh^2 u - 1 \right)}{\cosh 2u - \cos 2v} & -\dfrac{\sinh u \cosh u}{\cosh 2u - \cos 2v} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.166}$$

$$\left[\Gamma_{ij}^{2} \right] = \begin{bmatrix} -\dfrac{\cos v \sin v}{\cosh 2u - \cos 2v} & \dfrac{\sinh u \cosh u \left(4\cos^2 v - 1 \right)}{\cosh 2u - \cos 2v} & 0 \\ \dfrac{\sinh u \cosh u \left(4\cos^2 v - 1 \right)}{\cosh 2u - \cos 2v} & \dfrac{\cos v \sin v}{\cosh 2u - \cos 2v} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.167}$$

$$\left[\Gamma_{ij}^{3} \right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.168}$$

Άσκηση

Να αποδειχθεί ότι σε ελλειπτικές συντεταγμένες ισχύει ότι,

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{a^2 \left(\sinh^2 u + \sin^2 v \right)} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^2} \right) + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \tag{3.169}$$