1 ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΠΟ ΤΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΚΑΙ ΑΝΑΛΥΣΗ

Στο Κεφάλαιο αυτό εισάγουμε τη σημειολογία με χρήση δεικτών και τη χρήση της αθροιστικής σύμβασης κατά Gauß-Einstein. Ειδικότερα παρουσιάζεται μία σύνοψη ορισμένων βασικών ορισμών και θεωρημάτων από την περιοχή της Γραμμικής Άλγεβρας[1,2,3] και της Διανυσματικής Ανάλυσης[4]

[1] Akivis M.A. and Goldberg V.V. *An Introduction to Linear Algebra & Tensors*, Dover, 1972.
[2] Pettofrezzo A.J., *Matrices and Transformations*, Dover, 1966.
[3] McConnell A.J., *Applications of Tensor Analysis*, Dover, 1957.
[4] Rutherford D.E., *Vector Methods*, Dover, 2004.

Ιωάννης Γ. Βαρδουλάκης, Dr-Ing., Καθηγητής της Μηχανικής στο Ε. Μ. Πολυτεχνείο
Τ.Θ. 144, Παιανία 190-02, http://geolab.mechan.ntua.gr/, I.Vardoulakis@mechan.ntua.gr

1.1 Συμβολισμοί με τη χρήση δεικτών

Συχνά θα συναντήσουμε στη βιβλιογραφία τη συντομογραφία μιας αλγεβρικής ποσότητας, όπως είναι π.χ. οι συντεταγμένες ενός σημείου, όπου θα γίνεται χρήση του λεγόμενου *βωβού δείκτη*. Έτσι όταν θέλουμε να αναφερθούμε στις συντεταγμένες ενός σημείου στο χώρο, αντί της πλήρους αναλυτικής αναγραφής αυτών,

$$x_1, x_2, x_3 \tag{1.1}$$

θα χρησιμοποιήσουμε απλά το συμβολισμό,

$$x_i \tag{1.2}$$

αφού προηγουμένως έχουμε καθορίσει ότι ο *βωβός* (και εμ' προκειμένω *κάτω*) δείκτης i θα παίρνει τις τιμές 1, 2 και 3. Επειδή όμως δεν έχουμε καθορίσει ακόμα τη μαθηματική υπόσταση της ποσότητας x_i, δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε στο σημείο αυτό ονομασίες όπως «διάνυσμα» ή «τανυστής», που έχουμε ακούσει πιθανώς να αναφέρεται σε άλλα Μαθήματα Μηχανικής και Μαθηματικών. Εδώ θα αρκεσθούμε στο να αποκαλούμε το μέγεθος x_i, ως ένα ***σύστημα 1ης τάξεως***, αφού εμφανίζει ένα μόνο δείκτη. Επίσης θα παρατηρήσουμε ότι ο δείκτης μπορεί να αναγράφεται είτε κάτω είτε πάνω, οπότε συχνά θα συναντήσουμε το συμβολισμό

$$x^i \tag{1.3}$$

αποσαφηνίζοντας ότι στη περίπτωση αυτή ο άνω δείκτης δεν θα πρέπει να εκληφθεί ως εκθέτης.

Στο σημείο αυτό συνηθίζεται να γίνεται αναφορά στις λεγόμενες, α) *γραμμικές μορφές*, που είναι αθροίσματα της μορφής

$$L = \sum_{i=1}^{3} a_i x^i = a_1 x^1 + a_2 x^2 + a_3 x^3 \tag{1.4}$$

και β) δι-γραμμικές ή *τετραγωνικές μορφές*

$$Q = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} a_{ij} x^i x^j = a_{11} x^1 x^1 + a_{12} x^1 x^2 + a_{13} x^1 x^3 + \cdots \tag{1.5}$$

Παράλληλα, για τη συμπύκνωση της γραφής μας, θα κάνουμε χρήση της λεγόμενης συμβάσεως αθροίσεως πάνω σε επαναλαμβανόμενο δείκτη κατά Gauß-Einstein, συμφώνως με την οποία οι παραπάνω γραμμικές ή πολυ-γραμμικές μορφές θα γράφονται χωρίς το σύμβολο του αθροίσματος και με προκαθορισμένο το πεδίο τιμών των δεικτών,

$$\begin{aligned} L &= a_i x^i \quad (i, j = 1,2,3) \\ Q &= a_{ij} x^i x^j \quad (i, j = 1,2,3) \end{aligned} \tag{1.6}$$

Παρατηρούμε ότι η μετονομασία ενός δείκτη π.χ. από i σε k δεν επιφέρει καμία αλλαγή στο αποτέλεσμα της αθροίσεως,

$$L = a_i x^i = a_k x^k \tag{1.7}$$

Επίσης παρατηρούμε ότι σε κάθε ένα σύστημα 1^{ης} τάξεως μπορούμε να αντιστοιχίσουμε αμφιμονοσήμαντα ένα μητρώο-γραμμή (1×3) που περιέχει τα στοιχεία του εν λόγω συστήματος

$$a_i \leftrightarrow \{a_i\} = \{a_1, a_2, a_3\} \tag{1.8}$$

ή ένα μητρώο-στήλη (3×1),

$$x^i \leftrightarrow \{x^i\}^T = \begin{Bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{Bmatrix} \tag{1.9}$$

Η γραμμική μορφή υπολογίζεται από το μητρωικό γινόμενο γραμμής επί στήλη

$$\{a_1, a_2, a_3\}\begin{Bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{Bmatrix} = \{a_i x^i\} \leftrightarrow L \tag{1.10}$$

Σε κάθε σύστημα 2^{ας} τάξεως μπορούμε να αντιστοιχήσουμε το μητρώο των στοιχείων του,

$$a_{ij} \leftrightarrow [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \tag{1.11}$$

η δε τετραγωνική μορφή υπολογίζεται από το αντίστοιχο μητρωικό γινόμενο

$$\begin{aligned} &\{x^1, x^2, x^3\} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{Bmatrix} = \\ &= \{x^i a_{i1}, x^i a_{i2}, x^i a_{i3}\}\begin{Bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{Bmatrix} = \{x^i a_{ij} x^j\} = \{a_{ij} x^i x^j\} \leftrightarrow Q \end{aligned} \tag{1.12}$$

Άσκηση

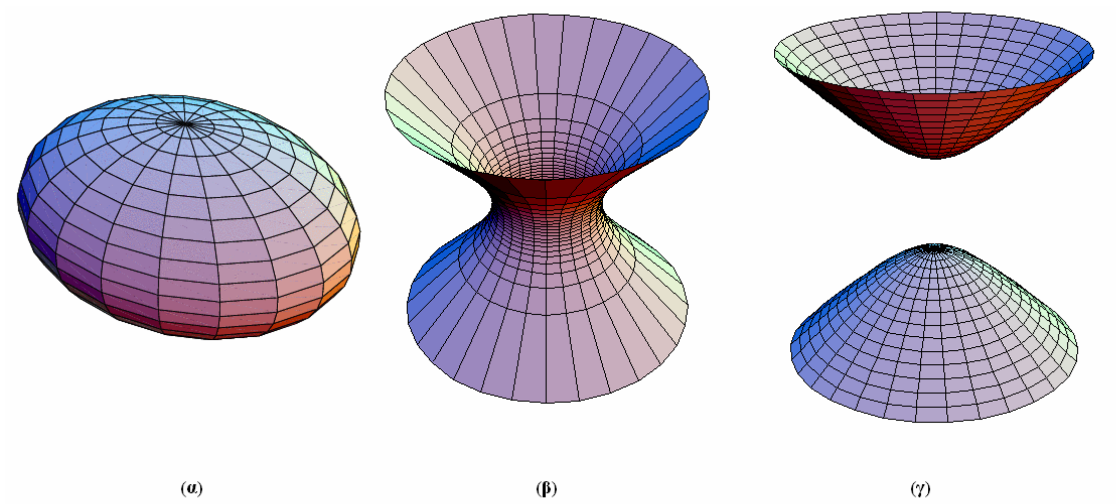
Να σχεδιασθούν οι δευτεροβάθμιες επιφάνειες στο χώρο που δίδονται από τις εξισώσεις, $Q=1$, Εξ. (1.12), για τις κάτωθι περιπτώσεις (Εικ. 1-1):

- Ελλειψοειδές: $$[a_{ij}] = \begin{bmatrix} a^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & b^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & c^{2} \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2} = 1$$

- Μονόφυλλο υπερβολοειδές: $[a_{ij}]=\begin{bmatrix} a^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & b^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & -c^{-2} \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{x_1^2}{a^2}+\frac{x_2^2}{b^2}-\frac{x_3^2}{c^2}=1$

- Δίφυλλο υπερβολοειδές: $[a_{ij}]=\begin{bmatrix} a^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & -b^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & -c^{-2} \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{x_1^2}{a^2}-\frac{x_2^2}{b^2}-\frac{x_3^2}{c^2}=1$

Παρατηρούμε ότι για $Q=0$ το δεύτερο μητρώο οδηγεί στην εξίσωση ενός πραγματικού κώνου.



Εικ. 1-1: (α) Ελλειψοειδές. (β) Μονόφυλλο υπερβολοειδές. (γ) Δίφυλλο υπερβολοειδές.

1.2 Συμμετρικά και αντισυμμετρικά συστήματα

Ένα ***συμμετρικό*** σύστημα $2^{ας}$ τάξεως a_{ij} χαρακτηρίζεται από την ιδιότητα ότι η τιμή του δεν αλλάζει αν γίνει εναλλαγή των δεικτών,

$$a_{ij}=a_{ji} \tag{1.13}$$

Παρατηρούμε ότι στη θεωρούμενη περίπτωση ο πίνακας των στοιχείων του αντίστοιχου συστήματος $2^{ας}$ τάξεως είναι συμμετρικός ως προς την κύρια διαγώνιό του. Π.χ. ένας συμμετρικός πίνακας 3×3 περιέχει μόνο 6 ανεξάρτητα στοιχεία,

$$a_{ij}=a_{ji} \leftrightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11} & c & b \\ c & a_{22} & a \\ b & a & a_{33} \end{bmatrix} \tag{1.14}$$

Ως σύμβολο Kronecker ορίζουμε το εξής συμμετρικό σύστημα $2^{ας}$ τάξεως δ_{ij},

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & if: i = j \\ 0 & if: i \neq j \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \delta_{ij} = \delta_{ji} \tag{1.15}$$

Στο σύμβολο Kronecker αντιστοιχεί ο μοναδιαίος πίνακας

$$\delta_{ij} = \delta_{ji} \leftrightarrow [I] = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1.16}$$

Ένα *πλήρως* συμμετρικό σύστημα $3^{ης}$ τάξεως χαρακτηρίζεται από τις εξής σχέσεις,

$$a_{ijk} = a_{kij} = a_{jki} = a_{ikj} = a_{jik} = a_{kji} \tag{1.17}$$

Ένα ***αντισυμμετρικό*** σύστημα $2^{ας}$ τάξεως χαρακτηρίζεται από την ιδιότητα ότι εναλλαγή των δύο δεικτών επιφέρει αλλαγή του πρόσημου του,

$$a_{ij} = -a_{ji} \tag{1.18}$$

Από τον ορισμό αυτό προκύπτει ότι σε ένα αντισυμμετρικό σύστημα $2^{ας}$ τάξεως τα διαγώνια στοιχεία είναι μηδενικά. Π.χ., σε έναν αντισυμμετρικό πίνακα 3×3 έχουμε,

$$a_{11} = a_{22} = a_{33} = 0 \tag{1.19}$$

οπότε ο πίνακας αυτός περιέχει μόνο 3 ανεξάρτητα στοιχεία

$$a_{ij} = -a_{ji} \leftrightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -c & -b \\ c & 0 & -a \\ b & a & 0 \end{bmatrix} \tag{1.20}$$

Αντιστοίχως ένα πλήρως αντισυμμετρικό σύστημα $3^{ης}$ τάξεως ικανοποιεί τις παρακάτω σχέσεις

$$a_{ijk} = a_{kij} = a_{jki} = -a_{ikj} = -a_{jik} = -a_{kji} \tag{1.21}$$

1.3 Συμμετρικό και αντισυμμετρικό μέρος συστήματος $2^{ας}$ τάξεως

Ως το *συμμετρικό* και το *αντισυμμετρικό* μέρος του a_{ij} ορίζουμε αντιστοίχως τα συστήματα

$$a_{(ij)} = \frac{1}{2}(a_{ij} + a_{ji}) \tag{1.22}$$

$$a_{[ij]} = \frac{1}{2}(a_{ij} - a_{ji}) \tag{1.23}$$

Με τη χρήση των συμβόλων Kronecker μπορούμε να κατασκευάσουμε δύο συστημάτων $4^{ης}$ τάξεως, που έχουν την ιδιότητα να μετατρέπουν ένα τυχόν σύστημα $2^{ας}$ τάξεως σε συμμετρικό και αντισυμμετρικό σύστημα. Πράγματι τα συστήματα

$$S_{ijkl} = \frac{1}{2}\left(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}\right) \tag{1.24}$$

$$A_{ijkl} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \delta_{ik} & \delta_{il} \\ \delta_{jk} & \delta_{jl} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\left(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}\right) \tag{1.25}$$

χαρακτηρίζονται αντιστοίχως από τις εξής ιδιότητες,

$$S_{ijkl}a_{kl} = a_{(ij)} \tag{1.26}$$

$$A_{ijkl}a_{kl} = a_{[ij]} \tag{1.27}$$

Ασκήσεις

1) Να αποδειχθεί ότι ένα πλήρως αντισυμμετρικό σύστημα 3^{ης} τάξεως έχει μία μόνο μη-μηδενική συνιστώσα,

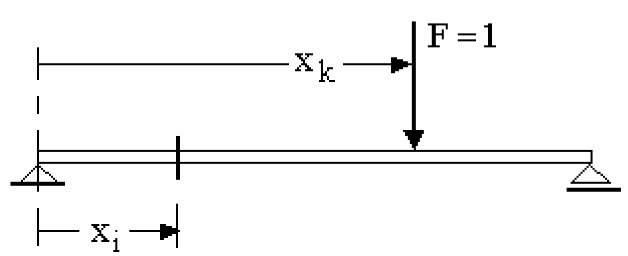
$$a_{ijk} = \begin{cases} a \;\; if: (ijk) = cycl(1,2,3) \\ -a \;\; if: (ijk) = cycl(2,1,3) \\ 0 \;\; else \end{cases} \tag{1.28}$$

2) (Ευθύ) Να αποδειχθεί ότι αν το σύστημα 2^{ας} τάξεως a_{ij} είναι αντισυμμετρικό τότε η δι-γραμμική μορφή,

$$a_{ij}x^i x^j = 0 \tag{1.29}$$

3) (Αντίστροφο) Να αποδειχθεί ότι. αν ισχύει η παραπάνω Εξ. (1.29) για όλες τις τιμές της μεταβλητής x_i, τότε το σύστημα a_{ij} είναι αντισυμμετρικό.

4) Έστω w_{ik} και ψ_{ik} η μετατόπιση και στροφή της διατομής αμφιέρειστης ελαστικής δοκού ακαμψίας (EI) στη θέση x_i λόγω μοναδιαίου φορτίου στη θέση x_k (Εικ. 1-2). Να διερευνηθεί και να αιτιολογηθεί αν τα συστήματα 2^{ας} τάξεως w_{ik} και ψ_{ik} είναι συμμετρικά ή όχι.



Εικ. 1-2: Η επιρροή μοναδιαίου φορτίου στην παραμόρφωση αμφιέρειστης δοκού

1.4 Το σύμβολο Levi-Civita και τα σύμβολα Kronecker

Το λεγόμενο μοναδιαίο αντισυμμετρικό ή αντιμεταθετικό σύστημα 3^{ης} τάξεως ή σύμβολο *Levi-Civita*, ε_{ijk} ορίζεται ως εξής:

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 \;\; if : (i,j,k) = cycl(1,2,3) \\ -1 \;\; if : (i,j,k) = cycl(2,1,3) \\ 0 \;\; else \end{cases} \tag{1.30}$$

δηλ. $\varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = 1$, $\varepsilon_{213} = \varepsilon_{132} = \varepsilon_{321} = -1$, $\varepsilon_{112} = \cdots = \varepsilon_{333} = 0$.

Με τη βοήθεια του συμβόλου αυτού το τυχόν αντισυμμετρικό σύστημα 3^{ης} τάξεως γράφεται ως εξής (γιατί;)

$$a_{ijk} = a_{123}\varepsilon_{ijk} \tag{1.31}$$

Όπως ήδη αναφέραμε θα χρειασθεί να διακρίνουμε ανάμεσα σε συστήματα που έχουν δείκτες αναγραμμένους είτε «κάτω», όπως το σύστημα ε_{ijk}, είτε «πάνω», όπως το σύστημα ε^{ijk}, το οποίο θα ορισθεί κατ' αναλογία της (1.30) ως,

$$\varepsilon^{ijk} = \begin{cases} +1 \;\; if : (i,j,k) = cycl(1,2,3) \\ -1 \;\; if : (i,j,k) = cycl(2,1,3) \\ 0 \;\; else \end{cases} \tag{1.32}$$

Ένα αντισυμμετρικό σύστημα 2^{ας} τάξεως προσδιορίζεται πλήρως από ένα σύστημα 1^{ης} τάξεως,

$$[\omega_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & -\omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ \omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix} \quad \leftrightarrow \quad \omega_{ij} = -\varepsilon_{ijk}\omega_k \tag{1.33}$$

Στην περίπτωση αυτή έχουμε ότι,

$$\omega_l = -\frac{1}{2}\varepsilon_{mnl}\omega_{mn} \tag{1.34}$$

Προφανώς αν ορίσουμε ως $\omega_i' = -\omega_i$ από τις παραπάνω σχέσεις παίρνουμε τις εξής ισοδύναμες εκφράσεις,

$$\omega_{ij} = \varepsilon_{ijk}\omega_k' \quad \Leftrightarrow \quad \omega_l' = \frac{1}{2}\varepsilon_{mnl}\omega_{mn} \tag{1.35}$$

Το γινόμενο των δύο αντισυμμετρικών συστημάτων 3^{ης} τάξεως, ορίζει το εξής σύστημα 6^{ης} τάξεως

$$\varepsilon_{mnp}\varepsilon^{rst} = \delta_{mnp}^{rst} \tag{1.36}$$

Το σύστημα αυτό καλείται σύμβολο ***Kronecker*** 6^{ης} τάξεως. Για τον προσδιορισμό του συστήματος δ_{mnp}^{rst} ορίζουμε κατ' αρχήν τα συμμετρικά σύμβολα Kronecker 2^{ας} τάξεως

$$\delta_{ij} = \delta^{ij} = \delta_i^{\cdot j} = \delta_{\cdot i}^{j} = \begin{cases} 1 \;\; if : i = j \\ 0 \;\; if : i \neq j \end{cases} \tag{1.37}$$

Στα σύμβολα Kronecker 2^{ας} τάξεως αντιστοιχεί ο μοναδιαίος πίνακας, π.χ.

$$\delta_{ij} = \delta^{ij} = \delta_{i}^{\cdot j} = \delta_{\cdot i}^{j} \leftrightarrow [I] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1.38}$$

Με τη βοήθεια των συμβόλων Kronecker 2ας τάξεως μπορούμε να ορίσουμε τις πράξεις:

α) της αναβιβάσεως, καταβιβάσεως και εναλλαγής ενός δείκτη

$$\begin{aligned} &\delta_{ij} x^j = x_i \ , \ \delta^{ij} x_j = x^i \ , \ \delta_i^j x_j = x_i \ , \ \delta_j^i x^j = x^i \\ &\delta_{ij} x_j = x_i \ , \ \delta^{ij} x^j = x^i \ , \ \delta_i^j x^j = x_i \ , \ \delta_j^i x_j = x^i \\ &\delta_{ik} a_k = a_i \ , \ \delta^{ik} a^k = a^i \end{aligned} \tag{1.39}$$

β) της *συστολής*[5] ενός δείκτη

$$\begin{aligned} &\delta_{ij} a^{ij} = a^{ii} = a^{11} + a^{22} + a^{33} \\ &\delta^{ij} a_{ij} = a_{ii} \\ &\delta_{i}^{\cdot j} a_{\cdot j}^{i} = a_{\cdot i}^{i} \\ &\delta_{\cdot i}^{j} a_{j}^{\cdot i} = a_{i}^{\cdot i} \end{aligned} \tag{1.40}$$

Κάνοντας χρήση του ορισμού του συμβόλου Levi-Civita μπορούμε να αποδείξουμε ότι το σύμβολο Kronecker 6ης τάξεως δ_{mnp}^{rst} παίρνει τις εξής τιμές:

$\delta_{mnp}^{rst} = 0$, όταν δύο ή περισσότεροι δείκτες ταυτίζονται,

$\delta_{mnp}^{rst} = +1$, όταν οι δείκτες (r,s,t) και (mnp) διαφέρουν κατά άρτιο αριθμό μεταθέσεων,

$\delta_{mnp}^{rst} = -1$, όταν οι δείκτες (r,s,t) και (mnp) διαφέρουν κατά περιττό αριθμό μεταθέσεων.

Αυτός ο ορισμός μπορεί να συνοψισθεί στην παρακάτω χρήσιμη σχέση, που συνδέει το σύμβολο δ_{mnp}^{rst} με μία ορίζουσα της οποίας τα στοιχεία είναι σύμβολα Kronecker 2ας τάξεως,

$$\delta_{mnp}^{rst} = \begin{vmatrix} \delta_m^r & \delta_n^r & \delta_p^r \\ \delta_m^s & \delta_n^s & \delta_p^s \\ \delta_m^t & \delta_n^t & \delta_p^t \end{vmatrix} \tag{1.41}$$

Συστολή *του συμβόλου* δ_{mnp}^{rst} *δίνει το σύμβολο* Kronecker 4ης τάξεως,

$$\delta_{mn}^{rs} = \delta_{mnp}^{rst} \delta^{tp} = \delta_{mnt}^{rsp} \delta_{tp} = \delta_{mnp}^{rsp} = \delta_{mn1}^{rs1} + \delta_{mn2}^{rs2} + \delta_{mn3}^{rs3} \tag{1.42}$$

όπου αποδεικνύεται ότι,

[5] Αγγλ. *contraction*, Γερμ. *Verjüngung*

$$\delta^{rs}_{mn} = \begin{vmatrix} \delta^r_m & \delta^r_n \\ \delta^s_m & \delta^s_n \end{vmatrix} = \delta^r_m \delta^s_n - \delta^r_n \delta^s_m \tag{1.43}$$

οπότε

$$\varepsilon_{mnp}\varepsilon^{rsp} = \varepsilon_{mnp}\varepsilon^{rst}\delta^{tp} = \delta^{rst}_{mnp}\delta^{tp} = \delta^{rs}_{mn} = \delta^r_m \delta^s_n - \delta^r_n \delta^s_m \tag{1.44}$$

Άρα από τις εξ. (1.25), (1.27) και (1.44) παίρνουμε ότι,

$$a_{[ij]} = \frac{1}{2}(a_{ij} - a_{ji}) = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijp}\varepsilon^{klp}a_{kl} \tag{1.45}$$

Περαιτέρω συστολή του συμβόλου Kronecker $4^{\eta\varsigma}$ τάξεως οδηγεί στη σχέση του με το σύμβολο Kronecker $2^{\alpha\varsigma}$ τάξεως,

$$\delta^{rn}_{mn} = 2\delta^r_m \tag{1.46}$$

Επίσης ισχύουν και οι κάτωθι χρήσιμες ταυτότητες,

$$\begin{gathered} \delta^{ijk}_{mnp}\delta^{hlp}_{rst} = \delta^{ijk}_{rst}\delta^{hl}_{mn} \\ \delta^{ijk}_{mnp}\delta^{hnp}_{rst} = 2!\,\delta^{ijk}_{rst}\delta^{h}_{m} \\ \delta^{ijk}_{mnp}\delta^{mnp}_{rst} = 3!\,\delta^{ijk}_{rst} \end{gathered} \tag{1.47}$$

Ασκήσεις

Να αποδειχθεί ότι

$$\varepsilon_{rst} = \frac{1}{2}(r-s)(s-t)(t-r) \quad ,r,s,t \in \{1,2,3\} \tag{1.48}$$

Να αποδειχθούν οι παρακάτω σχέσεις:

$$\begin{gathered} \delta^r_r = 3 \\ \delta^{rst}_{mst} = 2\delta^r_m \\ \delta^{rst}_{rst} = 3! \\ \delta^{rst}_{tmn} = \delta^{rst}_{ntm} = \delta^{rs}_{mn} \\ \delta^{rs}_{mn}a^{mn} = a^{rs} - a^{sr} \\ \delta^{rst}_{mnp}a^{mnp} = a^{rst} - a^{rts} + a^{str} - a^{srt} + a^{trs} - a^{tsr} \end{gathered} \tag{1.49}$$

1.5 Συμμετρίες συστημάτων 3ης τάξεως[6]

Έστω A_{ijk} ένα τυχόν σύστημα 3ης τάξεως. Με βάση το σύστημα αυτό μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα πλήρως συμμετρικό σύστημα 3ης τάξεως,

$$S_{ijk} = \frac{1}{3!}\left(A_{ijk} + A_{ikj} + A_{jki} + A_{jik} + A_{kij} + A_{kji} \right) \tag{1.50}$$

και ένα πλήρως αντισυμμετρικό σύστημα 3ης τάξεως,

$$Q_{ijk} = \frac{1}{3!}\left(A_{ijk} - A_{ikj} + A_{jki} - A_{jik} + A_{kij} - A_{kji} \right) \tag{1.51}$$

Παρατηρούμε όμως ότι το σύστημα

$$R_{ijk} = A_{ijk} - \left(S_{ijk} + Q_{ijk} \right) \tag{1.52}$$

δεν είναι το μηδενικό σύστημα 3ης τάξεως. Πράγματι το «υπόλοιπο» R_{ijk} μπορεί να αναλυθεί ποικιλοτρόπως. Π.χ. το R_{ijk} αναλύεται σε ένα σύστημα συμμετρικό ως προς τους δύο πρώτους δείκτες (i,j) και σε ένα σύστημα συμμετρικό ως προς τον πρώτο και τρίτο δείκτη (i,k),

$$R_{ijk} = S_{ijk}^{(1)} + S_{ijk}^{(2)} \tag{1.53}$$

όπου

$$\begin{aligned} S_{ijk}^{(1)} &= \frac{2}{3!}\left(\left(A_{ijk} - A_{kji} \right) + \left(A_{jik} - A_{kij} \right) \right) \\ S_{ijk}^{(2)} &= \frac{2}{3!}\left(\left(A_{ijk} - A_{jik} \right) + \left(A_{kji} - A_{jki} \right) \right) \end{aligned} \tag{1.54}$$

Προφανώς τα συστήματα αυτά μηδενίζονται όταν το σύστημα A_{ijk} είναι πλήρως συμμετρικό. Ομοίως μπορούμε να αναλύσουμε το υπόλοιπο R_{ijk} σε ένα σύστημα αντισυμμετρικό ως προς τους δείκτες (i,k) και σε ένα σύστημα αντισυμμετρικό ως προς τους δείκτες (i,j)

$$R_{ijk} = Q_{ijk}^{(1)} + Q_{ijk}^{(2)} \tag{1.55}$$

όπου

$$\begin{aligned} Q_{ijk}^{(1)} &= \frac{2}{3!}\left(\left(A_{ijk} + A_{jik} \right) - \left(A_{kji} + A_{jki} \right) \right) \\ Q_{ijk}^{(2)} &= \frac{2}{3!}\left(\left(A_{ijk} + A_{kji} \right) - \left(A_{jik} - A_{kij} \right) \right) \end{aligned} \tag{1.56}$$

---

[6] Wade; T. L. and Bruck, R. H. (1944). Types of symmetries. The American Mathematical Monthly, 51, 123-129.

Τα συστήματα αυτά μηδενίζονται όταν το σύστημα A_{ijk} είναι πλήρως αντισυμμετρικό.

Συμπέρασμα των ανωτέρω είναι ότι για να είναι ένα σύστημα $3^{ης}$ τάξεως συμμετρικό πρέπει το αντισυμμετρικό του μέρος Q_{ijk} να μηδενίζεται αλλά αυτό δεν αρκεί, διότι πρέπει επίσης να μηδενίζεται και το υπόλοιπο που συμβολίσαμε με R_{ijk}.

1.6 Ορίζουσες

Ας θεωρήσουμε την ορίζουσα του πίνακα $[a_s^r]$

$$A = \det[a_s^r] = \left|a_s^r\right| = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{vmatrix} \tag{1.57}$$

Παρατηρούμε ότι ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις

$$\begin{aligned} \left|a_s^r\right| &= \varepsilon^{ijk} a_1^i a_2^j a_3^k \\ \left|a_n^m\right| \varepsilon^{rst} &= \varepsilon^{ijk} a_i^r a_j^s a_k^t \\ \left|a_n^m\right| \varepsilon_{rst} &= \varepsilon_{ijk} a_r^i a_s^j a_t^k \end{aligned} \tag{1.58}$$

Ας θεωρήσουμε το ανάπτυγμα της ορίζουσας ως προς τα στοιχεία της πρώτης στήλης,

$$\left|a_s^r\right| = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{vmatrix} = a_1^1 A_1^1 + a_1^2 A_2^1 + a_1^3 A_3^1 \tag{1.59}$$

Στο ανάπτυγμα αυτό με A_r^1 έχουμε συμβολίσει τις ελάσσονες ορίζουσες των στοιχείων a_1^r, δηλαδή

$$\begin{aligned} A_1^1 &= (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_2^2 & a_3^2 \\ a_2^3 & a_3^3 \end{vmatrix} = a_2^2 a_3^3 - a_2^3 a_3^2 = \varepsilon_{123} a_2^2 a_3^3 + \varepsilon_{132} a_2^3 a_3^2 = \varepsilon_{1st} a_2^s a_3^t \\ A_2^1 &= (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} a_2^1 & a_3^1 \\ a_2^3 & a_3^3 \end{vmatrix} = -\left(a_2^1 a_3^3 - a_2^3 a_3^1\right) = \varepsilon_{213} a_2^1 a_3^3 + \varepsilon_{231} a_2^3 a_3^1 = \varepsilon_{2st} a_2^s a_3^t \\ A_3^1 &= (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} a_2^1 & a_3^1 \\ a_2^2 & a_3^2 \end{vmatrix} = a_2^1 a_3^2 - a_2^2 a_3^1 = \varepsilon_{312} a_2^1 a_3^2 + \varepsilon_{321} a_2^2 a_3^1 = \varepsilon_{3st} a_2^s a_3^t \end{aligned} \tag{1.60}$$

Γενικώς ισχύει η σχέση,

$$\varepsilon^{123} \varepsilon_{rst} a_2^s a_3^t = \frac{1}{2!} \varepsilon^{1jk} \varepsilon_{rst} a_j^s a_k^t = \frac{1}{2!} \delta_{rst}^{1jk} a_j^s a_k^t \tag{1.61}$$

οπότε το στοιχείο A_r^i, παίρνει την εξής μορφή,

$$A_r^i = \frac{1}{2!}\delta_{rst}^{ijk} a_j^s a_k^t \tag{1.62}$$

Με τη βοήθεια αυτής της σχέσεως μπορούμε να υπολογίσουμε το παρακάτω ανάπτυγμα,

$$\begin{aligned} a_r^m A_m^i &= \frac{1}{2!}\delta_{mst}^{ijk} a_r^m a_j^s a_k^t = \frac{1}{2!}\varepsilon^{ijk}\varepsilon_{mst} a_r^m a_j^s a_k^t \\ &= \frac{1}{2!}\varepsilon^{ijk}\varepsilon_{rjk}\left|a_q^p\right| = \frac{1}{2!}\delta_{rjk}^{ijk}\left|a_q^p\right| \end{aligned} \tag{1.63}$$

Οπότε παίρνουμε την παρακάτω έκφραση για το ανάπτυγμα μιας ορίζουσας,

$$a_r^m A_m^i = A\delta_r^i \tag{1.64}$$

Ομοίως έχουμε και τη σχέση,

$$a_m^i A_r^m = A\delta_r^i \tag{1.65}$$

Όταν η ορίζουσα είναι διάφορη του μηδενός ($A \neq 0$) τότε το στοιχείο

$$\alpha_r^i = \frac{1}{A} A_r^i \tag{1.66}$$

είναι το *συμπληρωματικό* του στοιχείου a_i^r και συμβολίζεται ως,

$$\alpha_r^i = co\left(a_i^r\right) \tag{1.67}$$

Οπότε, έχουμε τις σχέσεις

$$a_m^i \alpha_r^m = a_r^m \alpha_m^i = \delta_r^i \tag{1.68}$$

ή

$$\begin{bmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_2^1 & \alpha_3^1 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \alpha_3^2 \\ \alpha_1^3 & \alpha_2^3 & \alpha_3^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1.69}$$

ή

$$\begin{bmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{bmatrix}\frac{1}{A}\begin{bmatrix} A_1^1 & A_2^1 & A_3^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & A_3^2 \\ A_1^3 & A_2^3 & A_3^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1.70}$$

Η παραπάνω σχέσεις ορίζουν τον αντίστροφο ενός τετραγωνικού πίνακα: Έστω,

$$\left[A\right] = [a_s^r] = \begin{bmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{bmatrix} \tag{1.71}$$

Αν η ορίζουσα του πίνακα αυτού είναι διάφορη του μηδενός, δηλαδή αν $A = \det\left[A\right] \neq 0$, τότε ορίζουμε τον αντίστροφο του πίνακα $\left[A\right]$ ως

$$\left[A\right]^{-1} = \frac{1}{A}\begin{bmatrix} A_1^1 & A_2^1 & A_3^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & A_3^2 \\ A_1^3 & A_2^3 & A_3^3 \end{bmatrix} \tag{1.72}$$

Επίσης μπορούμε να αποδείξουμε τις παρακάτω χρήσιμες σχέσεις,

$$\begin{aligned} &\varepsilon^{rst} A_r^i = 3\varepsilon^{ijk} a_j^s a_k^t \\ &\varepsilon_{ijk} A_r^i = \varepsilon_{rst} a_j^s a_k^t \\ &\frac{\partial A}{\partial a_i^r} = A_r^i \end{aligned} \tag{1.73}$$

Αντίστοιχο τυπολόγιο μπορεί να αναπτυχθεί και για το σύστημα a_{mn}:

$$\begin{aligned} &A = \det[a_{rs}] = \left|a_{rs}\right| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &A^{ir} = \frac{1}{2!}\varepsilon^{ijk}\varepsilon^{rst} a_{js} a_{kt} \\ &a_{mr} A^{mi} = a_{rm} A^{im} = A\delta_r^i \\ &co\left(a_{ri}\right) = \alpha^{ir} = \frac{1}{A} A^{ir} \quad (A \neq 0) \\ &a_{mr}\alpha^{mi} = a_{rm}\alpha^{im} = \delta_r^i \end{aligned} \tag{1.74}$$

1.7 Γραμμικά συστήματα

Η λύση του γραμμικού συστήματος

$$a_m^r x^m = b^r \quad (A \neq 0) \tag{1.75}$$

είναι,

$$x^i = \frac{1}{A} A_m^i b^m \tag{1.76}$$

1.8 Θετικώς ορισμένες τετραγωνικές μορφές

Ορισμός: Η τετραγωνική μορφή, $Q = a_{mn} x^m x^n$, λέγεται *θετικώς ορισμένη*, όταν

$$Q = \begin{cases} 0 & if : x^r = 0 \\ > 0 & if : x^r \neq 0 \end{cases} \tag{1.77}$$

Θεώρημα: Θεωρούμε δύο τετραγωνικές μορφές $Q = a_{mn}x^m x^n$ και $S = b_{mn}x^m x^n$, όπου τα συστήματα a_{mn} και b_{mn} είναι συμμετρικά. Επίσης θεωρούμε την ορίζουσα,

$$\Lambda(\lambda) = \left|\lambda a_{mn} - b_{mn}\right| = \begin{vmatrix} \lambda a_{11} - b_{11} & \lambda a_{12} - b_{12} & \lambda a_{13} - b_{13} \\ \lambda a_{21} - b_{21} & \lambda a_{22} - b_{22} & \lambda a_{23} - b_{23} \\ \lambda a_{31} - b_{31} & \lambda a_{32} - b_{32} & \lambda a_{33} - b_{33} \end{vmatrix} \tag{1.78}$$

Αν η τετραγωνική μορφή $Q = a_{mn}x^m x^n$ είναι θετικώς ορισμένη, τότε η εξίσωση,

$$\Lambda(\lambda) = 0 \tag{1.79}$$

έχει πραγματικές ρίζες.

Απόδειξη:

Έστω, $\rho = \alpha + i\beta$, ρίζα της Εξ. (1.79). Τότε υπάρχει ένα μη-μηδενικό σύστημα[7], $z^n = x^n + iy^n$ που να ικανοποιεί το γραμμικό σύστημα[8]

$$\left[\rho a_{mn} - b_{mn}\right]\left\{z^n\right\} = 0 \tag{1.80}$$

ή

$$[(\alpha + i\beta)a_{mn} - b_{mn}]\left\{x^n + iy^n\right\} = 0 \tag{1.81}$$

Εξισώνοντας τα πραγματικά και φανταστικά μέρη της παραπάνω εξισώσεως παίρνουμε,

$$\alpha a_{mn}x^n - \beta a_{mn}y^n - b_{mn}x^n = 0 \tag{1.82}$$

$$\alpha a_{mn}y^n + \beta a_{mn}x^n - b_{mn}y^n = 0 \tag{1.83}$$

Οπότε πολλαπλασιάζοντας την Εξ. (1.82) επί y^m και την Εξ. (1.83) επί x^m και αθροίζοντας πάνω στο δείκτη m παίρνουμε,

$$\beta(a_{mn}x^n x^m + a_{mn}y^m y^n) = (b_{mn} - b_{nm})x^m y^n = 0 \tag{1.84}$$

Τα στοιχεία x^r και y^r δεν είναι όλα κατ' ανάγκην μηδέν και η τετραγωνική μορφή $a_{mn}x^m x^n$ είναι θετικώς ορισμένη, οπότε από την Εξ. (1.84) έπεται ότι $\beta = 0$.

ο.ε.δ.

Αν πολλαπλασιάσουμε την Εξ. (1.82) επί x^m και την Εξ. (1.83) επί y^m και αθροίσουμε πάνω στο δείκτη m, τότε παίρνουμε τη σχέση

$$\alpha(a_{mn}x^n x^m + a_{mn}y^m y^n) = b_{mn}x^m x^n + b_{mn}y^m y^n \tag{1.85}$$

---

[7] Ο n είναι εμ' προκειμένω ένας άνω δείκτης.

[8] Υπενθυμίζουμε ότι ο δείκτης n δεν είναι εκθέτης και ότι πραγματοποιείται άθροιση πάνω σε κάθε επαναλαμβανόμενο δείκτη.

Αν τώρα δεχθούμε ότι και η τετραγωνική μορφή $b_{mn}x^m x^n$ είναι επίσης θετικώς ορισμένη, τότε από την Εξ. (1.85) παίρνουμε ότι, $\alpha > 0$. Άρα αν οι τετραγωνικές μορφές $a_{mn}x^m x^n$ και $b_{mn}x^m x^n$ είναι θετικώς ορισμένες και τα συστήματα a_{mn}, b_{mn} είναι συμμετρικά, τότε οι ρίζες της εξισώσεως, $\left|\lambda a_{mn} - b_{mn}\right| = 0$, είναι όλες πραγματικές και θετικές.

1.9 Η χαρακτηριστική εξίσωση τετραγωνικού πίνακα 3×3

Οι ιδιοτιμές ενός τετραγωνικού πίνακα $[A_{ij}]$ 3×3 ικανοποιούν τη *χαρακτηριστική* του εξίσωση (γιατί;)

$$\left|A_{ij} - \alpha\delta_{ij}\right| = 0 \tag{1.86}$$

ή

$$\alpha^3 - I_A\alpha^2 + II_A\alpha - III_A = 0 \tag{1.87}$$

όπου I_A, II_A και III_A είναι οι λεγόμενες βασικές αναλλοίωτες του πίνακα $[\overline{A}]_{3\times 3}$, που δίδονται από τις παρακάτω σχέσεις, συναρτήσει των στοιχείων του πίνακα $[\overline{A}] = [a_{ij}]$ και των ιδιοτιμών του $\alpha_{i'}$ $(i' = 1,2,3)$:

$$I_A = A_{11} + A_{22} + A_{33} = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \tag{1.88}$$

$$II_A = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_{22} & A_{23} \\ A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_{11} & A_{13} \\ A_{31} & A_{33} \end{vmatrix} = \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_3\alpha_1 \tag{1.89}$$

$$III_A = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} = \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \tag{1.90}$$

Θεώρημα

Οι ιδιοτιμές ενός συμμετρικού πραγματικού πίνακα είναι πραγματικοί αριθμοί.

Απόδειξη

Έστω

$$A_{ij}n_j = \lambda n_j \quad , \quad A_{ij} = A_{ji} \in \mathbb{R} \tag{1.91}$$

και έστω

$$n_i = a_i + ib_i \quad , \quad \overline{n}_i = a_i - ib_i \tag{1.92}$$

Από την Εξ. (1.91) παίρνουμε,

$$
\begin{aligned}
A_{ij} n_i \bar{n}_j &= \frac{1}{2}\left(A_{ij} n_i \bar{n}_j + A_{ji} n_j \bar{n}_i \right) \\
&= \frac{1}{2}\left(A_{ij}\left(a_i + ib_i\right)\left(a_j - ib_j\right) + A_{ji}\left(a_j + ib_j\right)\left(a_i - ib_i\right)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(A_{ij} a_i a_j - iA_{ij} a_i b_j + iA_{ij} b_i a_j + A_{ij} b_i b_j + A_{ji} a_j a_i - iA_{ji} a_j b_i + iA_{ji} b_j a_i + A_{ji} b_j b_i \right) \\
&= \frac{1}{2}\left(A_{ij} a_i a_j - iA_{ij} a_i b_j + iA_{ij} b_i a_j + A_{ij} b_i b_j + A_{ij} a_j a_i - iA_{ij} a_j b_i + iA_{ij} b_j a_i + A_{ij} b_j b_i \right) \\
&= A_{ij} a_i a_j + A_{ij} b_i b_j \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

αλλά και

$$
\begin{aligned}
A_{ij} n_i \bar{n}_j &= \frac{1}{2}\left(\lambda n_j \bar{n}_j + \lambda n_i \bar{n}_i \right) \\
&= \lambda\left(a_i + ib_i\right)\left(a_i - ib_i\right) \\
&= \lambda\left(a_i a_i - ia_i b_i + ib_i a_i + b_i b_i\right) \\
&= \lambda\left(a_i a_i + b_i b_i\right) \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \lambda \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

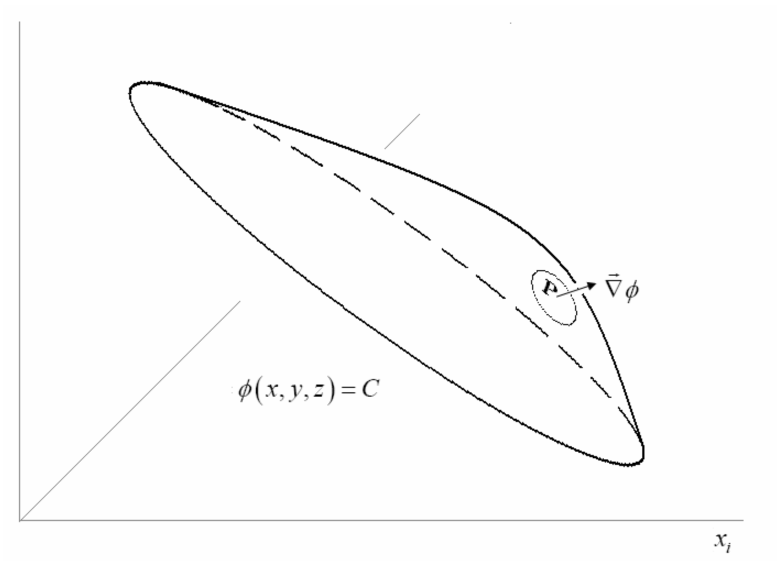
ο.ε.δ.

Ασκήσεις

1. Να γραφεί πρόγραμμα Η/Υ, που για δεδομένο συμμετρικό πίνακα να υπολογίζει τις ιδιοτιμές και τα ιδιο-διανύσματά του συμπεριλαμβανομένων και των περιπτώσεων πολλαπλών ιδιοτιμών. Π.χ. ο πίνακας: $[A_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ έχει τις ιδιοτιμές, $\{\alpha_{i'}\} = \{-1, 2, 5\}$.
2. Ποια είναι η γεωμετρική σημασία των ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων ενός συμμετρικού πίνακα A_{ij} σε σχέση με την αντίστοιχη επιφάνεια $2^{ας}$ τάξεως που ορίζεται από τη σχέση, $\{x_i\}[A_{ij}]\{x_j\}^T = 1$. Για τη διερεύνηση αυτού του ερωτήματος σκόπιμο θα ήταν να σχεδιασθεί η αντίστοιχη επιφάνεια στο σύστημα κυρίων αξόνων του πίνακα $[A_{ij}]$.

1.10 Ο τελεστής "∇"[9]

1.10.1 Ο τελεστής βαθμίδας



Εικ. 1-3: Η κάθετος σε σημείο επί επιφανείας στο χώρο

Ας θεωρήσουμε καρτεσιανές συντεταγμένες $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$ και την εξίσωση,

$$\phi(x_i) = \phi\left(x, y, z\right) = c = const. \tag{1.93}$$

Για διάφορες τιμές της σταθεράς c παίρνουμε μία οικογένεια επιφανειών (Εικ. 1-3). Για κάποια τιμή της σταθεράς c μία από αυτές τις επιφάνειες διέρχεται από δεδομένο σημείο $P(x,y,z)$. Η κάθετη στην επιφάνεια αυτή στο σημείο αυτής $P(x,y,z)$ δίδεται από τα συνημίτονα κατευθύνσεώς της, που όπως γνωρίζουμε από την Αναλυτική Γεωμετρία των επιφανειών είναι ανάλογα των ποσοτήτων

$$\left\{\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\right\}_P = \left\{\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial z}\right\}_P \tag{1.94}$$

Οπότε το διάνυσμα

$$\left.\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\right|_P \vec{e}_i \tag{1.95}$$

είναι παράλληλο προς την κάθετο στην επιφάνεια $\phi\left(x,y,z\right) = C$ στο σημείο P. Έστω dn το μήκος ενός απειροστικού ευθύγραμμου τμήματος κατά μήκος της καθέτου στην εν λόγω επιφάνεια στο σημείο P. Τα συνημίτονα κατευθύνσεως της καθέτου αυτής είναι

---

[9] Το κεφάλαιο αυτό είναι βασισμένο στο αντίστοιχο από το βιβλίο: D.E. Rutherford, *Vector Methods*, Dover, 2004.

$$\left\{ \frac{dx}{dn}, \frac{dy}{dn}, \frac{dz}{dn} \right\} \tag{1.96}$$

Οπότε το μέγεθος του διανύσματος που δίδεται από την Εξ. (1.95) είναι

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}\frac{dx}{dn} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\frac{dy}{dn} + \frac{\partial \phi}{\partial z}\frac{dz}{dn} = \frac{\partial \phi}{\partial n} \tag{1.97}$$

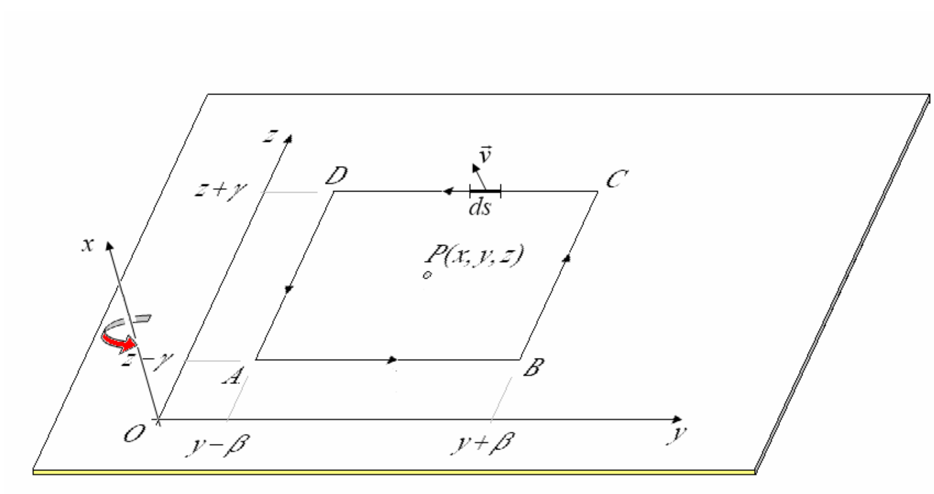
Εισάγοντας τον τελεστή βαθμίδας σε καρτεσιανές συντεταγμένες,

$$\vec{\nabla} = \vec{e}^{\,i} \frac{\partial}{\partial x^i} \tag{1.98}$$

Ορίζουμε την βαθμίδα του βαθμωτού μεγέθους $\phi(x_i)$ ως

$$\mathbf{grad}\ \phi = \vec{\nabla}\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\vec{e}_i = \phi_{,i}\vec{e}_i \quad , \quad \phi_{,i} = \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \tag{1.99}$$

1.10.2 Ο τελεστής στροβιλισμού



Εικ. 1-4: Κλειστή όδευση στο επίπεδο

Έστω ένα διανυσματικό πεδίο,

$$\vec{v} = v_i\vec{e}_i = v_x\vec{e}_x + v_y\vec{e}_y + v_z\vec{e}_z \tag{1.100}$$

Θεωρούμε μία κλειστή καμπύλη $(C) = (ABCD)$ η οποία περικλείει το σημείο $P(x, y, z)$ σε ένα επίπεδο το οποίο είναι κάθετο στο διάνυσμα $\vec{n} = \vec{e}_x$ (Εικ. 1-4). Επίσης εξασφαλίζουμε όπως η όδευση της καμπύλης αυτής είναι δεξιόστροφη. Κατά μήκος αυτής της καμπύλης (C) με παράμετρο το μήκος τόξου s

$$(C): \quad x = x(s), \quad y = y(s), \quad z = z(s) \tag{1.101}$$

ορίζουμε το στοιχειώδες διάνυσμα $d\vec{s}$,

$$d\vec{s} = \left(\frac{dx}{ds}\vec{e}_x + \frac{dy}{ds}\vec{e}_y + \frac{dz}{ds}\vec{e}_z \right) ds \tag{1.102}$$

Π.χ. για την καμπύλη στην Εικ. 1-4,

$$d\vec{s} = \begin{cases} dy\vec{e}_y & (AB),(CD) \\ dz\vec{e}_z & (BC),(DA) \end{cases} \tag{1.103}$$

Με βάση τα παραπάνω ορίζουμε την ποσότητα

$$\Gamma_C = \oint_{(\Gamma)} v_i ds_i \tag{1.104}$$

η οποία και καλείται η (δεξιόστροφη) *κυκλοφορία* κατά Kelvin της ποσότητας $\vec{v}$ (π.χ. ταχύτητας) κατά μήκος της καμπύλης C.

Ένα διανυσματικό μέγεθος, το οποίο θα συμβολίσουμε ως $\mathbf{rot}\,\vec{v}$, και το οποίο αποκαλούμε *στροβιλισμό* του διανύσματος $\vec{v}$, έχει συνιστώσα στην κατεύθυνση του διανύσματος $\vec{n}$ που ορίζεται ως εξής:

$$\lim_{S\to 0}\frac{\Gamma_C}{S} \tag{1.105}$$

όπου S είναι το εμβαδόν της επιφάνειας που περικλείεται από την καμπύλη (C). Αποδεικνύεται ότι όταν το παραπάνω όριο υπάρχει όντως η Εξ. (1.105) ορίζει ένα διάνυσμα, το οποίο είναι ανεξάρτητο της επιλογής της (C).

Βάσει της Εικ. 1-4 η αναλυτική έκφραση του διανύσματος $rot\vec{v}$ υπολογίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned}
&\int_{(AB)} v_i d\ell_i = \int_{y-\beta}^{y+\beta} v_y dy = 2\beta v_y\left(x, y', z-\gamma\right) \quad , \quad y-\beta \le y' \le y+\beta \\
&\int_{(BC)} v_i d\ell_i = \int_{z-\gamma}^{z+\gamma} v_z dz = 2\gamma v_z\left(x, y+\beta, z'\right) \quad , \quad z-\gamma \le z' \le z+\gamma \\
&\int_{(CD)} v_i d\ell_i = \int_{y+\beta}^{y-\beta} v_y dy = -2\beta v_y\left(x, y', z+\gamma\right) \quad , \quad y-\beta \le y' \le y+\beta \\
&\int_{(DA)} v_i d\ell_i = \int_{z+\gamma}^{z-\gamma} v_z dz = -2\gamma v_z\left(x, y-\beta, z'\right) \quad , \quad z-\gamma \le z' \le z+\gamma
\end{aligned} \tag{1.106}$$

Με

$$S = 4\beta\gamma \tag{1.107}$$

Από την Εξ. (1.105) και (1.106) παίρνουμε

$$
\begin{aligned}
&\lim_{\beta\to 0}\lim_{\gamma\to 0}\frac{2\gamma v_z\left(x,y+\beta,z'\right)-2\gamma v_z\left(x,y-\beta,z'\right)}{4\beta\gamma}\\
&-\lim_{\beta\to 0}\lim_{\gamma\to 0}\frac{2\beta v_y\left(x,y',z+\gamma\right)-2\beta v_y\left(x,y',z-\gamma\right)}{4\beta\gamma}\\
&=\lim_{\beta\to 0}\frac{v_z\left(x,y+\beta,z'\right)-v_z\left(x,y-\beta,z'\right)}{2\beta}-\lim_{\gamma\to 0}\frac{v_y\left(x,y',z+\gamma\right)-v_y\left(x,y',z-\gamma\right)}{2\gamma}\\
&=\frac{\partial}{\partial y}v_z(x,y,z)-\frac{\partial}{\partial z}v_y(x,y,z)
\end{aligned}
\tag{1.108}
$$

Οπότε,

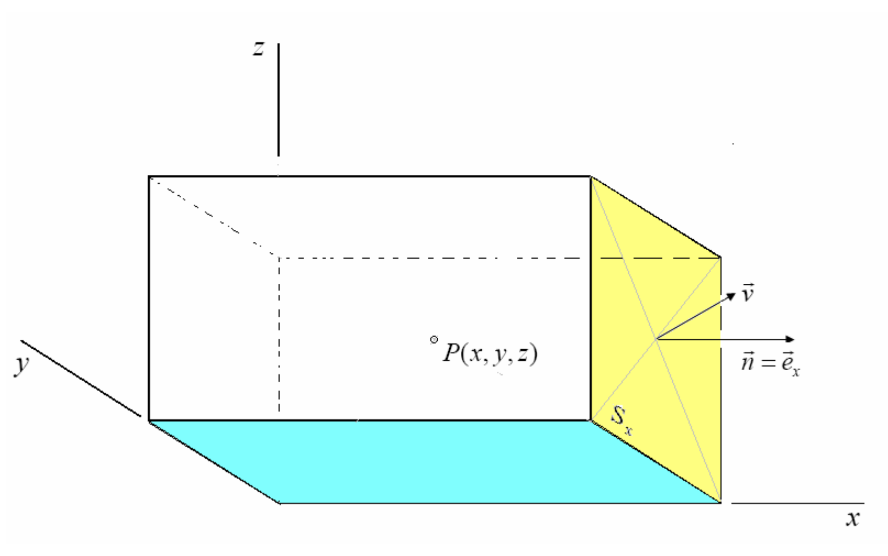
$$
\mathbf{rot}\ \vec{v}=\left(\frac{\partial v_z}{\partial y}-\frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\vec{e}_x+\left(\frac{\partial v_x}{\partial z}-\frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\vec{e}_y+\left(\frac{\partial v_y}{\partial x}-\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\vec{e}_z \tag{1.109}
$$

Συμφώνως προς την Εξ. (1.109) ο διαφορικός τελεστής του στροβιλισμού του διανύσματος $\vec{v}(x_i)$ ορίζεται ως το εξωτερικό γινόμενο του τελεστή βαθμίδας και του $\vec{v}$,

$$
\mathbf{rot}\ \vec{v}=\vec{\nabla}\times\vec{v}=\left(\vec{e}_k\,\frac{\partial}{\partial x_k}\right)\times\left(v_l\vec{e}_l\right) \tag{1.110}
$$

Παρατηρούμε ότι ο στροβιλισμός του διανύσματος $\vec{v}(x_i)$. ταυτίζεται με το αντισυμμετρικό μέρος της βαθμίδας του.

1.10.3 Ο τελεστής αποκλίσεως



Εικ. 1-5: Κλειστή επιφάνεια στο χώρο

Κατ' αναλογία με τη διαδικασία που εκθέσαμε στη προηγούμενη παράγραφο ορίζουμε μία κλειστή επιφάνεια (S), που περιβάλει ένα δεδομένο σημείο $P(x_i)$ στο χώρο. Π.χ. η κλειστή επιφάνεια μπορεί να αποτελείται από τις πλευρές ενός ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου του οποίου οι πλευρές είναι παράλληλες προς τους άξονες του καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων (Εικ. 1-5).

Γενικώς σε κάθε σημείο της εν λόγω κλειστής επιφάνειας θεωρούμε το εξωτερικό μοναδιαίο διάνυσμα $\vec{n}$ και αν dS συμβολίζει το εμβαδόν του στοιχείο της επιφάνειας τότε ορίζουμε το διάνυσμά $\vec{n}dS$. Για ένα δεδομένο διανυσματικό μέγεθος $\vec{v}(x_i)$ ορίζουμε την ποσότητα,

$$Q_S = \iint_{(S)} v_i n_i dS \tag{1.111}$$

καλείται η ροή του $\vec{v}(x_i)$.

Ένα βαθμωτό μέγεθος, το οποίο θα συμβολίσουμε ως $div\vec{v}$, και το οποίο αποκαλούμε απόκλιση του διανύσματος $\vec{v}$, έχει τιμή που ορίζεται ως εξής:

$$div\vec{v} = \lim_{V\to 0}\frac{Q_S}{V} \tag{1.112}$$

όπου V είναι ο όγκος που περικλείεται από την επιφάνεια (S).

Άσκηση

Να αποδειχθεί ότι

$$div\vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = v_{i,i} \tag{1.113}$$

και ότι,

$$div\vec{v} = \vec{\nabla}\cdot\vec{v} \tag{1.114}$$

1.11 Παράρτημα Ι: Χρήσιμες ταυτότητες μεταξύ διαφορικών τελεστών

$$\boldsymbol{\nabla}\phi = \mathrm{grad}\,\phi$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A} = \mathrm{div}\,\mathbf{A}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A} = \mathrm{rot}\,\mathbf{A}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\phi = \mathrm{div}\ \mathrm{grad}\ \phi \equiv \nabla^2\phi$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\nabla}\phi = \mathrm{rot}\ \mathrm{grad}\,\phi = 0 \quad (\varepsilon_{ijk}\,\partial_j\partial_k\phi = 0)$$

$$\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A}) = \mathrm{grad}\ \mathrm{div}\ \mathbf{A}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}) = \mathrm{div}\ \mathrm{rot}\ \mathrm{A} = 0 \quad \left(\partial_i(\varepsilon_{ijk}\,\partial_j A_k) = \varepsilon_{ijk}\,\partial_i\partial_j A_k = 0\right)$$

$$\nabla\times(\nabla\times\mathbf{A}) = \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\ \mathbf{A} = \mathrm{grad}\ \mathrm{div}\,\mathbf{A} - \nabla^2\mathbf{A}$$

$$\mathrm{grad}\,(\phi\chi) = \phi\,\mathrm{grad}\,\chi + \chi\,\mathrm{grad}\,\phi$$

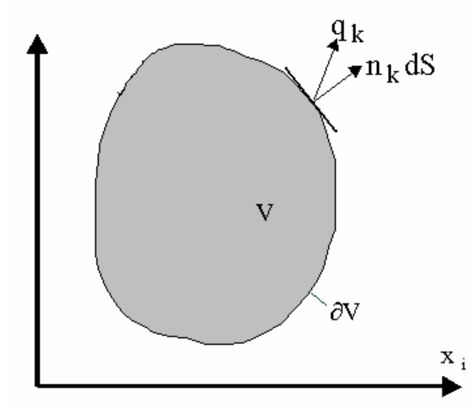
$$\mathrm{div}\,(\phi\mathbf{A}) = \phi\,\mathrm{div}\,\mathbf{A} + \mathbf{A}\cdot\mathrm{grad}\,\phi$$

$$\mathrm{div}\,(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = \mathbf{B}\cdot\mathrm{rot}\,\mathbf{A} - \mathbf{A}\cdot\mathrm{rot}\,\mathbf{B}$$

$$\mathrm{rot}(\varphi\mathbf{A}) = \varphi\,\mathrm{rot}(\mathbf{A}) - \mathbf{A}\times\nabla\varphi$$

1.12 Παράρτημα ΙΙ: Το θεώρημα αποκλίσεως[10]

Θεωρούμε ένα χωρίο V του $\Re^3$ που περιβάλλεται από το σύνορο ∂V. Στο τυχόν σημείο του συνόρου ορίζουμε την στοιχειώδη επιφάνεια dS με μοναδιαίο εξωτερικό διάνυσμα n_i.



Εικ. 1-6: Κανονικό χωρίο εφαρμογής του θεωρήματος αποκλίσεως

Έστω στο χωρίο αυτό μία διανυσματική συνάρτηση $q_i = q_i(x_k)$ $\left(i,k=1,2,3\right)$, που είναι συνεχής και έχει συνεχείς πρώτες παραγώγους. Τότε ισχύει

$$\int_{(V)} \frac{\partial q_k}{\partial x_k} dV = \int_{(\partial V)} q_k n_k dS \qquad (1.115)$$

ή

$$\int_{(V)} div\, \boldsymbol{q}\; dV = \int_{(\partial V)} \boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{n}\; dS \qquad (1.116)$$

δηλαδή το ολοκλήρωμα της αποκλίσεως ενός διανυσματικού πεδίου πάνω στο χωρίο V ισούται με την συνολική «ροή» του πεδίου δια μέσου του συνόρου αυτού $\partial \boldsymbol{V}$.

Άσκηση

Να αποδειχθεί ότι[11]

$$\int_{(V)} \frac{\partial \psi}{\partial x_k} dV = \int_{(\partial V)} n_i \psi dS \qquad (1.117)$$

---

[10] Το θεώρημα αυτό παρουσιάστηκε υπό διαφορετικές μορφές από τους Lagrange (1762), Gauss (1813), Ostrogradsky (1831) και Green (1828). Καμιά φορά αποκαλείται και Θεώρημα Αποκλίσεως (Divergence Theorem). Στη σχετική βιβλιογραφία θα αναζητήσουμε επίσης και τα παρεμφερή Θεωρήματα Green και Stokes.

[11] Hay, G.E., *Vector and Tensor Analysis*, Dover, p. 149 ff, 1953.