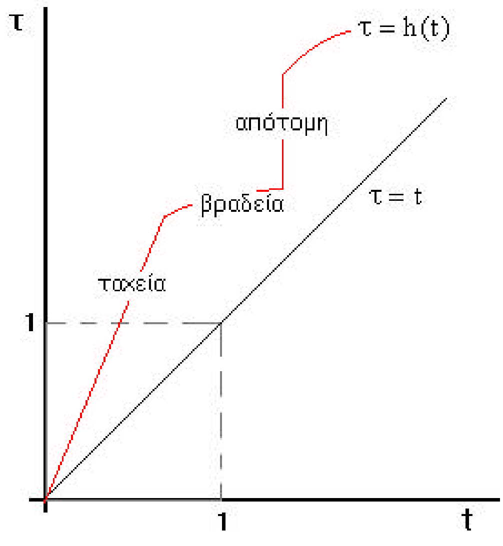
2. ΙΔΕΑΤΗ ΠΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑ[1]

2.1 Χρονικώς αναξάρτητη Συμπεριφορά

Εδώ θα περιορισθούμε σε υλικά που συμπεριφέρονται με καλή προσέγγιση ως αμιγώς *ανεξάρτητα της ταχύτητας παραμορφώσεως* (*rate independent materials*)[2]. Στην περίπτωση αυτή η οποιαδήποτε αλλαγή στην ταχύτητα φορτίσεως, που αντιστοιχεί σε κάποιο μονοτόνως αύξοντα, τμηματικώς συνεχή μετασχηματισμό της χρονικής μεταβλητής της μορφής,

$$t' = h(t) \quad h = \frac{dh}{dt} > 0$$

θα αφήνει αναλλοίωτη τις καταστατικές εξισώσεις.



[1] Πρβλ. L.M. Kachanov, *Fundamentals of the Theory of Plasticity*, Mir Publishers, 1974.
[2] Τα ανεξάρτητα της ταχύτητας παραμορφώσεως υλικά είναι αποτελούν μία μαθηματική εξιδανίκευση και μία οριακή συμπεριφορά. Γενικώς τα πραγματικά υλικά συμπεριφέρονται διαφορετικά όταν η ταχύτητα παραμορφώσεως αλλάζει. Μια τέτοια συμπεριφορά καλείται *ιξωδο-ελαστική ή ιξωδο-πλαστική (visco-elastic, visco-plastic)*. Πρβλ. P.Perzyna (1963). The constitutive equations for rate sensitive plastic materials. *Q. Appl. Math.*, Vol. 20, 321-332.).

Αν δεχθούμε για παράδειγα ότι μεταξύ ρυθμού παραμορφώσεως και τάσεως ισχύει μία καταστατική εξίσωση εξελικτικού χαρακτήρα,

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = f_{ij}(\sigma_{kl}, \dot{\sigma}_{mn}) \quad (2.1)$$

και δεχθούμε ότι

$$\dot{\varepsilon}_{ij} \approx \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t} \quad , \quad \varepsilon'_{ij} \approx \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t'}$$

τότε

$$\dot{\varepsilon}_{ij} \approx \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t'} \frac{dh}{dt} \approx \dot{h}\varepsilon'_{ij}$$

Αρα

$$f_{ij}(\sigma_{kl}, \dot{\sigma}_{mn}) = \dot{h} f_{ij}(\sigma_{kl}, \sigma'_{mn})$$

Ομοίως όμως έχουμε ότι

$$\dot{\sigma}_{mn} \approx \frac{\partial \sigma_{mn}}{\partial t'} \frac{dh}{dt} \approx \dot{h}\sigma'_{mn}$$

Αρα τελικά παίρνουμε ότι

$$f_{ij}(\sigma_{kl}, \dot{h}\sigma'_{mn}) = \dot{h} f_{ij}(\sigma_{kl}, \sigma'_{mn})$$

Με τον περιορισμό ότι η παρπάνω σχέση ισχύει μόνο για μονοτόνως αύξουσες συναρτήσεις μετασχηματισμού της χρονικής μεταβλητής $\dot{h} > 0$, η συνάρτηση αποκρίσεως δεν είναι κατ' ανάγκη μηδέν για μηδενικό ρυθμό μεταβολής της φορτίσεως, δηλαδή η $f_{ij}(\sigma_{kl}, 0)$ δεν είναι κατ' ανάγκη μηδέν. Αρα για να περιγράφει η καταστατική εξίσωση (2.1) την συμπεριφορά ενός υλικού που δεν επηρεάζεται από τον ρυθμό της φορτίσεως, τότε πρέπει να απαιτήσουμε όπως η συνάρτηση αποκρίσεως είναι θετικά ομογενής ως προς αυτόν,

$$\forall \lambda > 0 \quad \Rightarrow \quad f_{ij}(\ldots, \lambda\dot{\sigma}_{mn}) = \lambda f_{ij}(\ldots, \dot{\sigma}_{mn})$$

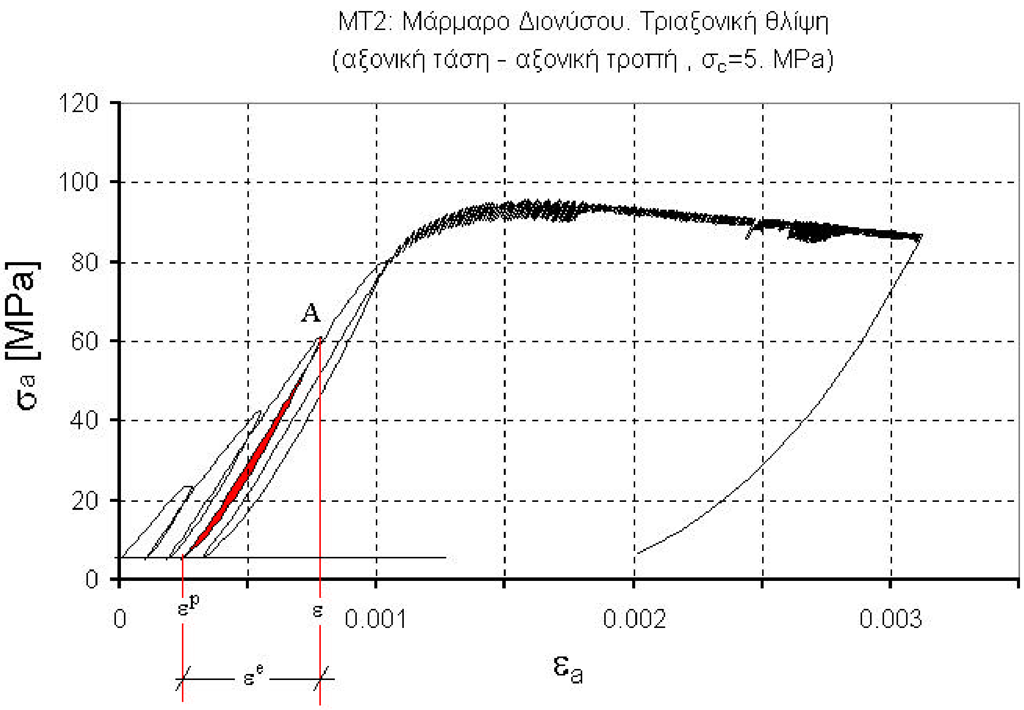
Ενα τυπικό παράδειγμα καταστατικής εξισώσεως, ανεξάρτητης του ρυθμού φορτίσεως είναι ένας *υπο-ελαστικός* νόμος, της μορφής,

$$\dot{\varepsilon}_{kl} = M^{e}_{ijkl}\, \dot{\sigma}_{kl}$$

όπου στις περισσότερες εφαρμογές ο ελαστικός τανυστής ενδοτικότητος θα είναι εκείνος που περιγράφει ελαστικό υλικό τύπου Hooke. Παρατηρούμε ότι στην περίπτωση αυτή η καταστατική συνάρτηση είναι γραμμική ως πρός $\dot{\sigma}_{ij}$

2.2 Ελαστο-πλαστικός Διαχωρισμός της Τροπής

Από φαινομενολογικής σκοπιάς πραγματικά υλικά εμφανίζουν μη-αντιστρεπτές παραμορφώσεις, γεγονός που αναγνωρίζεται π.χ. σε ένα πείραμα φόρτισεως–αποφορτίσεως. Οπως φαίνεται και στο αντίστοιχο γράφημα η συμπεριφορά του υλικού (μαρμάρου εν προκειμένω) είναι ριζικά διαφορετική στον κλάδο φορτίσεως από εκείνης στον κλάδο αποφορτίσεως - επαναφορτίσεως. Επίσης παρατηρούμε ότι γενικώς οι τροπές κατά την αποφόρτιση υστερούν κατά πολύ εκείνων κατά την φόρτιση.



Εστω τώρα ε_{ij} είναι η ολική τροπή μέχρι κάποιου σημείου Α στην καμπύλη φορτίσεως. Το πείραμα αποφορτίσεως μας δείχνει ότι μόνο ένα μέρος της τροπής αυτής, έστω ε_{ij}^{e}, η λεγόμενη και *ελαστική τροπή (e: elastic)*, είναι αντιστρεπτή. Η *'παραμένουσα'* τροπή ε_{ij}^{p} καλείται και *πλαστική τροπή (p: plastic)*

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{e} + \varepsilon_{ij}^{p}$$

Η *θεωρία πλαστικότητος* βασίζεται στην υπόθεση ότι δεν μπορούμε να διατυπώσουμε καταστατικές εξισώσεις που να αφορούν πεπερασμένες παραμορφώσεις, οπως κάνουμε στην περίπτωση ελαστικών υλικών. Πράγματι, η συμπεριφορά ενός πραγματικού υλικού δεν εξαρτάται μόνο από την τρέχουσα τιμή της τάσεως, όπως υποθέτουμε ότι συμβαίνει στα ελαστικά υλικά, αλλά εξαρτάται και από την *ιστορία* της παραμορφώσεως. Για τον λόγο αυτό η παραπάνω ανάλυση της τροπής θα αφορά γενικώς τον ρυθμό της

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}^{e}_{ij} + \dot{\varepsilon}^{p}_{ij} \qquad (2.2)$$

Αντιστοίχως οι εξισώσεις της θεωρίας πλαστικότητος διατυπώνονται ως σχέσεις μεταξύ του ρυθμού της πλαστικής τροπής, της τάσεως και ίσως και του ρυθμού της. Εχουν δε αυτές οι εξισώσεις την μορφή *εξελικτικών εξισώσεων (evolution equations)* της μορφής [3]:

$$\dot{\varepsilon}^{p}_{ij} = g_{ij}\left(\sigma_{kl}, \dot{\sigma}_{mn} \ldots\right)$$

Υποθέτοντας τώρα ότι η συνάρτηση $g_{ij}(\ldots, \dot{\sigma}_{mn}, \ldots)$ ειναι θετικά ομογενής, εξασφαλίζουμε ότι η πλαστική απόκριση είναι ανεξάρτητη του ρυθμού της φορτίσεως[4]. Οπότε αντί τών ρυθμών μπορούμε χωρίς περιρισμό να αναφερόμαστε στις απειροστικές μεταβολές , $\Delta\varepsilon_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}\Delta t$ κ.λπ.. Πράγματι η υπόθεση αυτή για την συνάρτηση $g_{ij}(\ldots, \dot{\sigma}_{mn}, \ldots)$ μας εξασφαλίζει ότι,

$$\Delta t \cdot \dot{\varepsilon}^{p}_{ij} = \Delta t \cdot g_{ij}\left(\sigma_{kl}, \dot{\sigma}_{mn}, \ldots\right) = g_{ij}\left(\sigma_{kl}, \Delta t \cdot \dot{\sigma}_{mn}, \ldots\right)$$

δηλαδή

$$\dot{\varepsilon}^{p}_{ij} \cdot \Delta t = g_{ij}\left(\sigma_{kl}, \Delta\dot{\sigma}_{mn}, \ldots\right) \equiv \Delta\varepsilon^{p}_{ij}$$

Οσον αφορά δε τις ελαστικές τροπές θα δεχθούμε γενικώς ότι ισχύει ένας "*υπο-ελαστικός* νόμος",

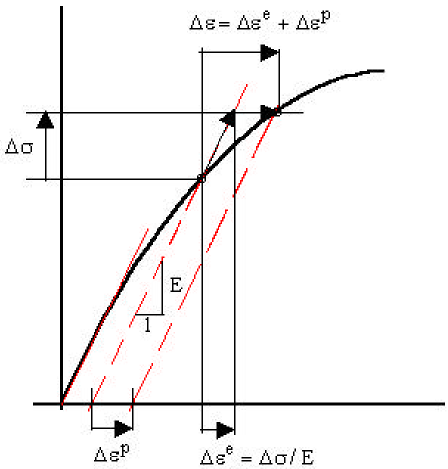
$$\dot{\varepsilon}^{e}_{kl} = M^{e}_{ijkl}\,\dot{\sigma}_{kl}$$

οπότε

$$\dot{\varepsilon}^{e}_{kl} \cdot \Delta t = M^{e}_{ijkl}\,\dot{\sigma}_{kl} \cdot \Delta t = M^{e}_{ijkl}\,\Delta\sigma_{kl} \equiv \Delta\varepsilon^{e}_{ij}$$

Αρα από την εξίσωση (2.2) έπεται η αντίστοιχη για τις απειροστικές μεταβολές,

$$\Delta\varepsilon_{ij} = \Delta\varepsilon^{e}_{ij} + \Delta\varepsilon^{p}_{ij} \quad (2.2\text{bis})$$



[3] Οι τελείες στη λίστα των μεταβλητών σημαίνουν εξάρτηση του ρυθμού της τάσεως και από μία σειρά παραμέτρων (εσωτερικών μεταβλητών), που περιγράφουν μετην σειρά τους την «ιστορία» της παραμορφώσεως.

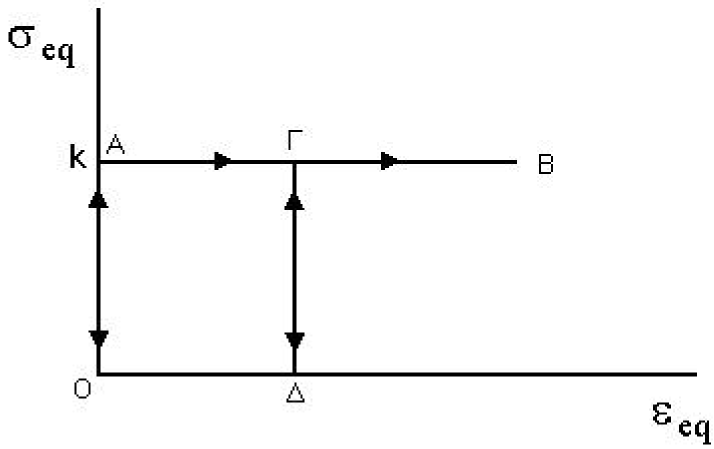
[4] Στην αντίθετη περίπτωση η απόκριση θα χαρακτερισθεί ως ιξωδο-πλαστική (visco-plastic).

Επειδή, όπως αναφέραμε, οι ελαστικές (αντιστρεπτές) τροπές είναι γενικώς μικρές σε σχέση με τις πλαστικές (μη-αντιστρεπτές) τροπές γι' αυτό σε πολλές περιπτώσεις οι πρώτες θεωρούνται αμελητέες. Στην ειδική αυτή περίπτωση μιλάμε για απολύτως-στερεά, πλαστικά υλικά (rigid-plastic materials)

$$\left|\dot{\varepsilon}^{e}_{ij}\right| << \left|\dot{\varepsilon}^{p}_{ij}\right| \quad \Rightarrow \quad \dot{\varepsilon}_{ij} \approx \dot{\varepsilon}^{p}_{ij}$$

2.3 Ιδεατά Πλαστικά Υλικά

Το απλούστερο προσομοίωμα πλαστικού υλικού είναι εκείνο του ισότροπου, ασυμπίεστου, ιδεατά πλαστικού και απολύτως στερεού υλικού. Το προσομοίωμα αυτό προτείνεται για την προσεγγιστική περιγραφή όλκιμων μετάλλων ή εύπλαστων αργίλων[5]. Η εξιδανικευμένη συμπεριφορά ενός ιδεατά πλαστικού υλικού παρίσταται γραφικά με την αντίστοιχη καμπύλη ισοδύναμης τάσεως - ισοδύναμης τροπής.



Οι ελαστικές τροπές θεωρούνται συνήθως αμελητέες, οπότε ο κλάδος αρχικής φορτίσεως (ΟΑ) και όλοι οι κλάδοι αποφορτίσεως-επαναφορτίσεως είναι κατακόρυφες ευθείες όπως η ευθεία (ΓΔ). Ο κλάδος φορτίσεως (ΑΒ) προσεγγίζεται με μια ευθεία παράλληλη προς τον άξονα $O\varepsilon_{eq}$ η οποία και τέμνει τον άξονα $O\sigma_{eq}$ στο σημείο $\sigma_{eq} = k$, που αντιστοιχεί στην ισοδύναμη τάση διαρροής του υλικού. Παρατηρούμε ότι στην περίπτωση που το υλικό διαρρέει, ενώ η τάση ικανοποιεί την παραπάνω συνθήκη διαρροής του υλικού, οι τροπές είναι γενικώς απροσδιόριστες.

Συμφώνως προς μία πρόταση του T.Y. Thomas[6] , η καταστατική εξισώση που διέπει την συμπεριφορά ενός ισοτρόπου, ασυμπίεστου, ιδεατά πλαστικού και απολύτως στερεού υλικού προκύπτει ως συνέπεια των εξής καταστατικών υποθέσεων:

[5] Πλάσσω (αρχ.): μορφώνω, διαπλάθω, σχηματίζω (Liddle and Scott's, *Greek-English Lexicon*, Calendron Press 1889: *πλάσσω*= to form, mould, shape). (αρχ.) επιθ.: πλαστικός.
[6] T.Y. Thomas, *Plastic Flow and fracture in Solids*, sect. IV, Academic Press, 1961.

I. Το υλικό είναι απολύτως στερεό, άρα

$$\dot{\varepsilon}^{e}_{ij} = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}^{p}_{ij}$$

II. Το υλικό είναι ασυμπίεστο, άρα διαχωρίζοντας τον ρυθμό παραμορφωσεως σε σφαιρικό και αποκλίνον μέρος έχουμε τις σχέσεις,

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{3}\dot{\varepsilon}_{kk}\delta_{ij} + \dot{e}_{ij} \quad , \quad \dot{\varepsilon}_{kk} = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{e}_{ij}$$

III. Λόγω της υποθέσεως (II) η πίεση $p = \sigma_{kk}/3$ είναι κινηματικώς απροσδιόριστη, ενώ οι συνιστώσες του αποκλίνοντος τανυστή των τάσεων είναι ανάλογες εκείνων του ρυθμού του αποκλίνοντος τανυστή πλαστικής παραμορφώσεως. Αρα διαχωρίζοντας την τάση σε μέση ορθή και σε αποκλίνουσα, έχουμε τις σχέσεις,

$$\sigma_{ij} = p\delta_{ij} + s_{ij} \quad , \quad s_{ij} = \lambda \dot{e}^{p}_{ij} \qquad (2.3)$$

IV. Ο συντελεστής αναλογίας στην σχέση τάσεων-τροπών (2.3) είναι μία βαθμωτή αναλλοίωτος συνάρτηση του ρυθμού του αποκλίνοντος τανυστή πλαστικής παραμορφώσεως, δηλ.

$$\lambda = \Lambda(\dot{e}^{p}_{ij}) \qquad (2.4)$$

V. Δεν υπάρχει αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ της τάσεως και του ρυθμού παραμορφώσεως.

Παρατηρήσεις:

- Επειδή ο ρυθμός παραμορφώσεως ορίζεται ως το συμμετρικό μέρος της βαθμίδος της ταχύτητας,

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_i v_j + \partial_j v_i)$$

  από τις καταστατικές υποθέσεις (I) και (II) έπονται οι παρακάτω σχέσεις για την βαθμίδα της ταχύτητας

$$\partial_k v_k = 0$$

$$\partial_i v_j + \partial_j v_i = 2\dot{e}^{p}_{ij}$$

- Η καταστατική υπόθεση (III), εξίσωση (2.3), εκφράζει την υπόθεση ότι οι τανυστές των τάσεων και του ρυθμού πλαστικής παραμορφώσεως είναι ομοαξονικοί.

- Η καταστατική υπόθεση (V) εκφράζει την βασική διαφορά μεταξύ ελαστικής και ιδεατά πλαστικής συμπεριφοράς (μη αντιστρεψιμότητα).

Για το προσδιορισμό της ζητούμενης καταστατικής σχέσεως θεωρούμε κατ' αρχήν τις ιδιοτιμές η_i $(i=1,2,3)$ του τανυστή $\dot{e}^p_{ij}$,

$$\det\left(\dot{e}^p_{ij}-\eta\delta_{ij}\right)=0 \quad \Rightarrow \qquad \eta^3-J_{2\dot{e}}\,\eta-J_{3\dot{e}}=0$$

Οι συντελεστές της χαρακτηριστικής εξισώσεως είναι αντιστοίχως η *2η και 3η αναλλοίωτος* του τανυστή $\dot{e}^p_{ij}$,

$$J_{2\dot{e}}=\frac{1}{2}\dot{e}^p_{ij}\dot{e}^p_{ji}=\frac{1}{2}\left(\eta_1^2+\eta_2^2+\eta_3^2\right)$$

$$J_{3\dot{e}}=\frac{1}{3}\dot{e}^p_{ij}\dot{e}^p_{jk}\dot{e}^p_{ki}=\frac{1}{3}\left(\eta_1^3+\eta_2^3+\eta_3^3\right)$$

Είναι λοιπόν προφανές ότι οι ιδιοτιμές η_i $(i=1,2,3)$ του τανυστή $\dot{e}^p_{ij}$ είναι συναρτήσεις των βασικών αναλλοιώτων του τανυστή αυτού. Δεχόμενοι τώρα πως ο συντελεστής λ στην καταστατική εξίσωση (2.3) είναι μία αναλλοίωτη συνάρτηση του τανυστή $\dot{e}^p_{ij}$, και κάνοντας ένα μετασχηματισμό των συντεταγμένων στο σύστημα των κυρίων αξόνων $O(x_{1'},x_{2'},x_{3'})$ του τανυστή $\dot{e}^p_{ij}$ παίρνουμε ότι ο συντελεστής λ είναι συνάρτηση των βασικών αναλοιώτων του $\dot{e}^p_{ij}$,

$$\lambda=\Lambda(\dot{e}^p_{ij})=\Lambda'(\eta_i)=\hat{\Lambda}(J_{2\dot{e}},J_{3\dot{e}})$$

Εστω τώρα

$$J_{2s}=\frac{1}{2}s_{ij}s_{ji}=\frac{1}{2}\left(s_1^2+s_2^2+s_3^2\right)$$

$$J_{3s}=\frac{1}{3}s_{ij}s_{jk}s_{ki}=\frac{1}{3}\left(s_1^3+s_2^3+s_3^3\right)$$

Από την εξίσωση (2.3) παίρνουμε,

$$J_{2s}=\lambda^2 J_{2\dot{e}} \quad , \quad J_{3s}=\lambda^3 J_{3\dot{e}} \qquad (2.5)$$

Αν υποθέσουμε ότι η ιακωβιανή του παραπάνω συστήματος εξισώσεων (2.5) είναι διάφορη του μηδενός,

$$\Delta = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial J_{2s}}{\partial J_{2\dot{e}}} & \dfrac{\partial J_{2s}}{\partial J_{3\dot{e}}} \\ \dfrac{\partial J_{3s}}{\partial J_{2\dot{e}}} & \dfrac{\partial J_{3s}}{\partial J_{3\dot{e}}} \end{vmatrix} \neq 0$$

τότε οι σχέσεις (2.5) είναι αντιστρέψιμες και υπάρχει μία μονοσήμαντη λύση,

$$J_{2\dot{e}} = B(J_{2s}, J_{3s}) \quad , \quad J_{3\dot{e}} = C(J_{2s}, J_{3s})$$

και άρα

$$\lambda = \hat{\Lambda}(J_{2\dot{e}}, J_{3\dot{e}}) = \overline{\Lambda}(J_{2s}, J_{3s})$$

Στην περίπτωση αυτή η εξίσωση (2.3) είναι μονοσημάντως αντιστρέψιμη, και

$$\dot{e}^{p}_{ij} = \frac{1}{\overline{\mathbf{L}}(J_{2s}, J_{3s})} s_{ij}$$

γεγονός που βρίσκεται σε αντίφαση με την καταστατική υπόθεση (V). Αρα από την υπόθεση (V) έπεται ότι η ιακωβιανή του συστήματος (2.5) πρέπει να μηδενίζεται

$$\Delta = 0 \qquad (2.6)$$

ή

$$\begin{vmatrix} 2\lambda \dfrac{\partial \lambda}{\partial J_{2\dot{e}}} J_{2\dot{e}} + \lambda^2 & 2\lambda \dfrac{\partial \lambda}{\partial J_{3\dot{e}}} J_{3\dot{e}} \\ 3\lambda^2 \dfrac{\partial \lambda}{\partial J_{2\dot{e}}} J_{3\dot{e}} & 3\lambda^2 \dfrac{\partial \lambda}{\partial J_{3\dot{e}}} J_{3\dot{e}} + \lambda^3 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2J_{2\dot{e}} \frac{\partial \lambda}{\partial J_{2\dot{e}}} + 3J_{3\dot{e}} \frac{\partial \lambda}{\partial J_{3\dot{e}}} + \lambda = 0$$

Παρατηρούμε ότι με τον μετασχηματισμό,

$$x = \sqrt{J_{2\dot{e}}} \quad , \quad y = \sqrt[3]{J_{3\dot{e}}} \quad , \quad \lambda = z(x, y)$$

η παραπάνω διαφορική εξίσωση παίρνει την μορφή ομογενούς διαφορικής εξισώσεως, τάξεως $\alpha = -1$

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = \alpha z$$

Η γενική λύση της ομογενούς δ.ε. είναι μία ομογενής συνάρτηση α-ταξεως[7]

$$z(kx, ky) = k^{\alpha} z(x, y)$$

[7] E.Kamke, Differentialgleichungen, Loesungsmethoden und Loesungen, Vol. II, sect. E. 2.25 & 4.8 Chelsea Publ. Co., 1974.

Παρατηρούμε τώρα ότι η συνάρτηση

$$z = \frac{1}{x} f\left(\frac{y}{x}\right)$$

είναι λύση της ομογενούς δ.ε.. Αυτό σημαίνει ότι η αρχική εξίσωση (2.6) έχει λύσεις της μορφής,

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{J_{2\dot{e}}}} L\left(\frac{\sqrt[3]{J_{3\dot{e}}}}{\sqrt{J_{2\dot{e}}}}\right)$$

οπότε η εξίσωση (2.3) δίδει,

$$s_{ij} = \frac{1}{\sqrt{J_{2\dot{e}}}} L\left(\frac{\sqrt[3]{J_{3\dot{e}}}}{\sqrt{J_{2\dot{e}}}}\right) \dot{e}_{ij}^{p} \qquad (2.7)$$

από την οποία παίρνουμε ότι,

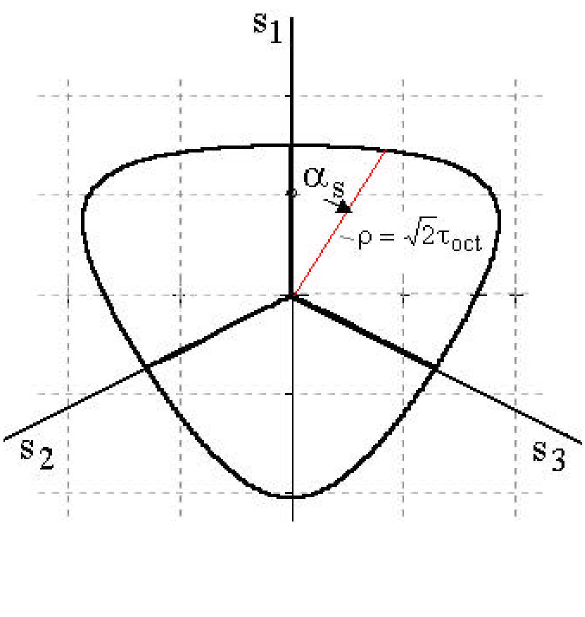
$$\frac{\sqrt[3]{J_{3es}}}{\sqrt{J_{2es}}} = \frac{\sqrt[3]{J_{3\dot{e}}}}{\sqrt{J_{2\dot{e}}}} \quad \Rightarrow \quad L = \overline{L}\left(\frac{\sqrt[3]{J_{3s}}}{\sqrt{J_{2s}}}\right)$$

Από την σχέση (2.7) παίρνουμε τον εξής περιορισμό για την *ένταση της διατμητικής τάσεως*

$$T = \sqrt{J_{2s}} = \overline{L}\left(\frac{\sqrt[3]{J_{3s}}}{\sqrt{J_{2s}}}\right)$$

Υπενθυμίζουμε ότι $\cos 3\alpha_s = 3\sqrt{3} J_{3s} / (2 J_{2s}^{3/2})$, είναι η *αναλλοίωτη τασική γωνία ομοιότητος*. Οπότε τελικά παίρνουμε τον περιορισμό ότι εν προκειμένω η ένταση της διατμητικής τάσεως πρέπει να είναι γενικώς μία συνάρτηση της αναλλοίωτης γωνίας ομοιότητος, π.χ.

$$\tau_{oct} = \sqrt{\frac{2}{3}} T = F(\cos 3\alpha_s) \qquad (2.8)$$



Η σχέση αυτή λέγεται *συνθήκη διαρροής (yield condition)*. Η συνθήκη διαρροής (2.8) παρίσταται γεωμετρικά στον χώρο των κυρίων τάσεων ως ένας κύλινδρος με τον άξονά του να συμπίπτει με την χωροδιαγώνιο και με ίχνος στο αποκλίνον επίπεδο που να καθορίζεται από την συνάρτηση $F(\alpha_s)$.

Με την συνθήκη διαρροής (2.8) και τις καταστατικές υποθέσεις (ΙΙΙ), (IV) και (V) έπεται τελικά ότι ο νόμος *πλαστικής ροής*

$$\dot{\varepsilon}^p_{kk} = 0 \quad \wedge \quad \dot{e}^p_{ij} = \frac{1}{\lambda} s_{ij} \quad , \quad \lambda > 0 \qquad (2.9)$$

Παρατηρούμε ότι ο νόμος πλαστικής ροής περιορίζει μόνο η κατεύθυνση του $\dot{e}^p_{ij}$,

$$\frac{\dot{e}^p_{ij}}{\dot{g}^p} = \frac{s_{ij}}{2T} \quad , \quad \dot{g}^p = \sqrt{2\dot{e}^p_{kl}\dot{e}^p_{lk}}$$

ενώ η ένταση του ρυθμού (διατμητικής) πλαστικής παραμορφώσεως δεν περιορίζεται από τις καταστατικές υποθέσεις (Ι) έως (V).

Παρατηρούμε επίσης ότι στην ειδική περίπτωση που η καταστατική συνάρτηση $F(\alpha_s) = k : \text{const.}$, καταλήγουμε στην συνθήκη διαρροής κατά v. Mises,

$$\tau_{oct} = k = \text{const.}$$

Στην περίπτωση αυτή η συνθήκη διαρροής παρίσταται στον χώρο των κυρίων τάσεων ως ένας κυκλικός κύλινδρος με έξονα την χωροδιαγώνιο και ακτίνα $\sqrt{2}\,k$ (δηλ. το ίχνος της κυλινδρικής επιφάνειας στο αποκλίνον επίπεδο (π) είναι κύκλος με ακτίνα $\sqrt{2}\,k$).

Παρατηρούμε τέλος ότι αφού ο τανυστής των τάσεων και ο τανυστής του ρυθμού πλαστικών τροπών είναι ομοαξονικοί, μπορούμε να ταυτίσουμε το σύστημα κυρίων αξόνων τους. Στην περίπτωση αυτή το διάνυσμα των κύριων πλαστικών τροπών, $\dot{e}^p_i = \eta_i$ $(i = 1,2,3)$ παρίσταται στο επίπεδο (π) και είναι κάθετο στο κυκλικό ίχνος της συνθήκης διαρροής. Η συνθήκη αυτή είναι γνωστή ως ***συνθήκη καθετότητος*** *(normality condition)*.

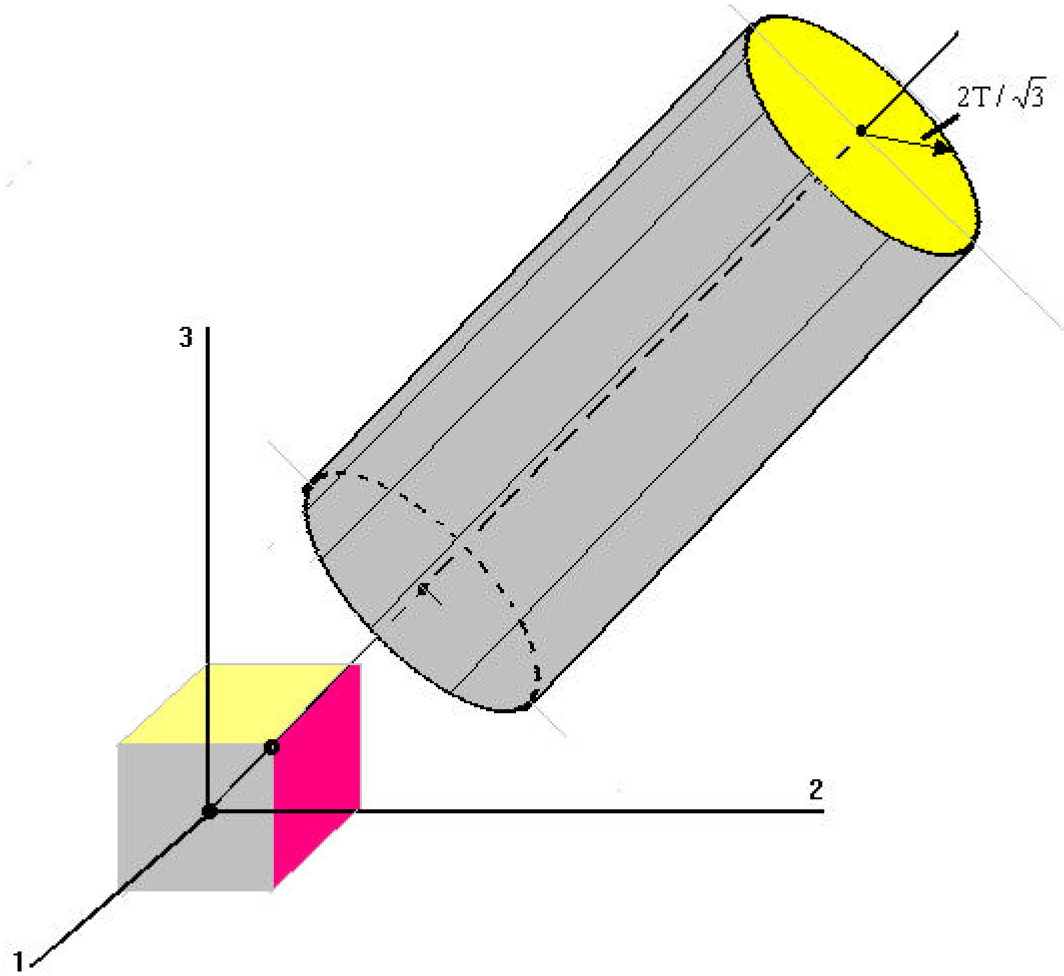
Η συνθήκη καθετότητος γενικεύεται ως εξής: Εστω

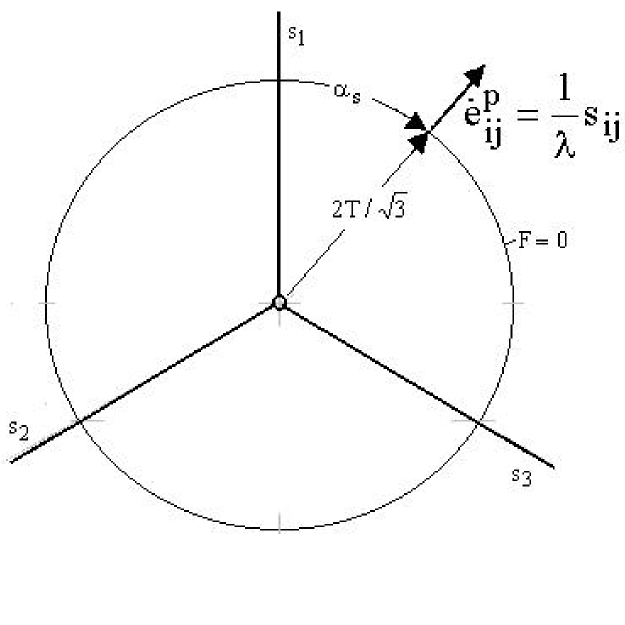
$$F(s_{ij}) = k > 0$$

η συνθήκη διαρροής, όπου η *συνάρτηση διαρροης (yield function)* $F(s_{ij})$ είναι μία ισότροπη συνάρτηση το αποκλίνοντος τανυστή τωντάσεων.

Ομοαξονικότητα και καθετότητα εξασφαλίζονται αν απαιτήσουμε την ισχύ του λεγομένου *συνηρτημένου νόμου πλαστικής ροής (associated flow-rule)*, ο οποίος προϋποθέται ότι η συναρτηση διαρροής παίζει και τον ρόλο *πλαστικού δυναμικού (plastic potential)*

$$e_{ij}^{p} = \Lambda \frac{\partial F}{\partial s_{ij}} \quad , \quad \Lambda > 0$$





2.4 Εξισώσεις Prandtl - Reuss

Γενικεύοντας τις παραπάνω παρατηρήσεις μπορούμε τώρα να διατυπώσουμε την λογόμενη *θεωρία πλαστικής ροής για ιδεατά πλαστικά υλικά.* Κατ' αρχήν δεχόμαστε ότι ο ρυθμός της παραμορφώσεως μπορεί να αναλυθεί προσθετικά στο ρυθμό ελαστικής και πλαστικής τροπής,

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}^{e} + \dot{\varepsilon}_{ij}^{p} \quad (2.11)$$

και υποθέτουμε ότι ο ρυθμός ελαστικών τροπών δίδεται από τον νόμο του Hooke[8],

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{e} = \frac{1+\nu}{E}\dot{\sigma}_{ij} - \frac{\nu}{E}\dot{\sigma}_{kk}\delta_{ij} \quad (2.12)$$

Στο σημείο αυτό θα δεχθούμε ότι το υλικό είναι 'πλαστικά' ασυμπίεστο, δηλ.,

$$\dot{\varepsilon}_{kk}^{p} = 0 \qquad (2.13)$$

Επίσης θα δεχθούμε την ύπαρξη μιας επιφάνειας στο χώρο των τάσεων

$$F(s_{ij}) = k \quad (k > 0) \qquad (2.14)$$

η οποία περιβάλλει την περιοχή ελαστικής συμπεριφοράς. Αυτό σημαίνει ότι αν κάποια εντατική κατάσταση σ_{ij} βρίσκεται εντός της ελαστικής περιοχής, τότε ο ρυθμός πλαστικών τροπών μηδενίζεται, δηλ.

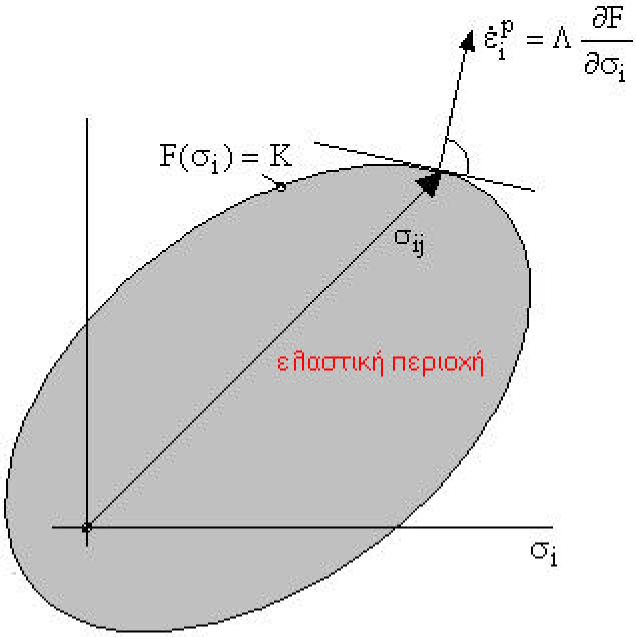
$$F(s_{ij}) < k \quad \Rightarrow \quad \dot{\varepsilon}_{ij}^{p} = 0$$

Επίσης δεχόμαστε ότι ο τανυστής του ρυθμού πλαστικής παραμορφώσεως είναι ομοαξονικός με τον τανυστή των τάσεων, οπότε αυτός παρίσταται ως διάνυσμα στον χώρο των κυρίων τάσεων. Μέσα στα πλαίσια της λεγόμενης *συνηρτημένης θεωρίας πλαστικής ροής (associated flow theory of plasticity)* δεχόμαστε επιπλέον ότι το διάνυσμα αυτό είναι κάθετο στην επιφάνεια διαρροής (*συνθήκη καθετότητος*), γεγονός το οποίο εκφράζεται από την σχέση,

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{p} = \Lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \quad , \quad \Lambda \geq 0 \quad (2.16)$$

Στην σχέση αυτή η παράμετρος Λ *καλείται πλαστικός πολλαπλασιαστής (plastic multiplier)* και είναι μια **απροσδιόριστη** βαθμωτή ποσότητα.

[8] Ε είναι το μέτρο Young και ν είναι ο λόγος Poisson του υλικού



Για να είναι συμβατή η σχέση (2.16) με την καταστατική υποθέση (2.13), προκύπτει ότι προκειμένου περί ενός πλαστικά ασυμπίεστου υλικού, που υπακούει ένα συνηρτημένο νόμο πλαστικης ροής, η συνθήκη διαρροής δεν πρέπει να εξαρτάται από την μέση ορθή τάση, δηλ. πρέπει να είναι μόνο συνάρτηση το αποκλίνοντος τανυστή των τάσεων,

$$F(s_{ij}) = k \quad \Rightarrow \quad \dot{\varepsilon}_{kk}^p = \Lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_{kk}} = 0 \quad \wedge \quad \dot{e}_{ij}^p = \Lambda \frac{\partial F}{\partial s_{ij}} \quad (2.17)$$

Για παράδειγμα η συνθήκη **von Mises** περιγράφει την επιφάνεια διαρροής που δίδεται από την σχέση,

$$\tau_{oct} = \sqrt{\frac{2}{3} J_{2s}} = k$$

οπότε,

$$\dot{e}_{ij}^p = \Lambda \frac{\partial \tau_{oct}}{\partial s_{ij}} = \Lambda \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{J_{2s}}} \frac{\partial J_{2s}}{\partial s_{ij}}$$

$$= \Lambda \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{1}{T} \frac{\partial}{\partial s_{ij}} \left(\frac{1}{2} s_{mn} s_{nm} \right)$$

$$= \Lambda \frac{1}{\sqrt{6}} \frac{1}{2T} \left(s_{mn} \delta_{in} \delta_{jm} + \delta_{im} \delta_{jn} s_{nm} \right)$$

$$\Rightarrow \quad \dot{e}_{ij}^p = \frac{1}{\sqrt{6}} \Lambda \frac{s_{ij}}{T}$$

Συνοψίζοντας τα ανωτέρω παίρνουμε τις λεγόμενες εξισώσεις **Prandtl-Reuss** :

- Εξισώσεις συμβιβαστού για τον ρυθμό της παραμορφώσεως[9]:

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_i v_j + \partial_j v_i)$$

- Ανάλυση του ρυθμού της παραμορφώσεως σε ελαστικό και πλαστικό μέρος:

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}^e_{ij} + \dot{\varepsilon}^p_{ij}$$

- Νόμος ελαστικότητας:

$$\dot{\varepsilon}^e_{ij} = \frac{1+\nu}{E}\dot{\sigma}_{ij} - \frac{\nu}{E}\dot{\sigma}_{kk}\delta_{ij}$$

- Συνθήκη διαρροής:

$$F(s_{ij}) = \sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{\frac{1}{2}s_{ij}s_{ji}} = k$$

- Νόμος πλαστικής ροής:

$$\dot{\varepsilon}^p_{kk} = 0 \quad , \quad \dot{e}^p_{ij} = \Lambda\frac{\partial F}{\partial s_{ij}}\dot{e}^p_{ij} = \frac{1}{\sqrt{6}}\Lambda\frac{s_{ij}}{T} \quad , \quad \Lambda = \begin{cases} 0 & \text{if } : F < k \\ > 0 & \text{else} \end{cases}$$

Παρατηρούμε τέλος ότι για $E \to \infty$, λαμβάνουμε την οριακή συμπεριφορά του

- Ιδεατά πλαστικού-απολύτως στερεού υλικού, όπου

$$\varepsilon^e_{ij} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}^p_{ij}$$

2.5 Συνθήκη Καθετότητας και Κυρτότητα της Επιφάνειας Διαρροής

Εστω τώρα δυο εντατικές καταστάσεις, σ^c_{ij} και σ^*_{ij}, έτσι ώστε η πρώτη να είναι ***οριακή,*** δηλαδή να ικανοποιεί την συνθήκη διαρροής

$$F(\sigma^c_{ij}) = k$$

ενώ η δεύτερη να είναι ***επιτρεπτή,*** δηλαδή να μην παριβιάζει την συνθήκη διαρροής

[9] $v_i(x_k, t)$ είναι το διάνυσμα της ταχύτητας των υλικών σημείων.

$$F(\sigma^{*}_{ij}) \le k$$

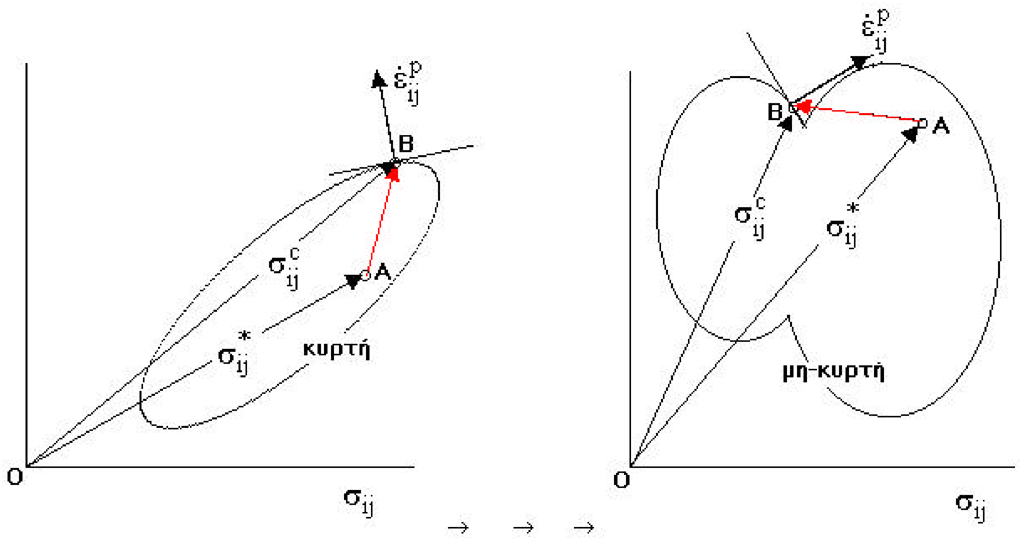
Με άλλα λόγια η εντατική κατάσταση σ^{c}_{ij} απεικονίζεται επί της επιφάνειας διαρροής (στο όριο ή σύνορο αυτής) ενώ η σ^{*}_{ij} απεικονίζεται είτε στο σύνορο είτε στην εσωτερική (ελαστική) περιοχή της επιφάννειας διαρροής.

Από την συνθήκη καθετότητας

$$\dot{\varepsilon}^{p}_{ij} = \Lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \quad (2.18)$$

και εφόσον η επιφάνεια διαρροής είναι κυρτή, προκύπτει ότι ισχύει η παρακάτω καθοριστική ανισότητα που αποδίδεται στον Drucker (1951)

$$(\sigma^{c}_{ij} - \sigma^{*}_{ij})\dot{\varepsilon}^{p}_{ij} \ge 0 \quad (2.19)$$



$$\vec{OB} = \vec{OA} + \vec{AB}$$

Παρατηρούμε ότι όταν η επιφάνεια διαρροής δεν είναι κυρτή, τότε υπάρχουν εντατικές καταστάσεις σ^{c}_{ij} και σ^{*}_{ij} επί και εντός αυτής (που αντιστοιχουν στα διανύσματα θέσεως $\vec{OB}$ και $\vec{OA}$), τέτοιες ώστε η διαφορά $(\sigma^{c}_{ij} - \sigma^{*}_{ij})$ να αντιστοιχεί σε διάνυσμα $\vec{AB}$, του οποίου το εσωτερικό γινόμενο με το διάνυσμα της καθέτου $\dot{\varepsilon}^{p}_{ij}$ επι της επιφανείας διαρροής στο σημείο Β να είναι αρνητικό.