

Περιεχόμενα

I. Σύντομη Περιγραφή Περιεχομένων	2
II. Βασική Βιβλιογραφία	3
III. Εισαγωγικό Σημείωμα	4
1. Εισαγωγικές έννοιες	5
1.1 Οι αναλλοίωτες του τανυστού των τάσεων	5
1.2 Στατιστική ερμηνεία των αναλλοίωτων του τανυστή των τάσεων	10
1.3 Ζώνες διατμήσεως	15
1.4 Μέγιστη, μέση και οκταεδρική διατμητική τάση	18
1.5 Κριτήρια αστοχίας κατά Tresca και von Mises	22
2. Ιδεατή πλαστικότητα	25
2.1 Χρονικώς αναξάρτητη συμπεριφορά	25
2.2 Ελαστο-πλαστικός διαχωρισμός της τροπής	27
2.3 Ιδεατά πλαστικά υλικά	29
2.4 Εξισώσεις Prandtl - Reuss	36
2.5 Συνθήκη καθετότητας και κυρτότητα της επιφάνειας διαρροής	38
3. Τα βασικά θεωρήματα της οριακής αναλύσεως	41
3.1 Η αρχή των δυνατών έργων	41
3.2 Ασυνεχή πεδία	45
3.2.1 Ασυνέχειες στην ένταση	45
3.2.2 Ασυνέχειες στην ταχύτητα	47
3.3 Τα θεωρήματα της οριακής αναλύσεως	50
3.3.1 Το θεώρημα "άνω ορίου"	51
3.3.2 Το θεώρημα "κάτω ορίου"	58
3.4 Επίπεδη παραμόρφωση	61
3.4.1 Ορισμοί και κριτήριο διαρροής	57
3.4.2 Ανω φράγμα φορτίου αστοχίας πεδילוδοκού	63
3.4.2.1 Μηχανισμός καταρρεύσεως εξ απολύτως στερεών σωμάτων	63
3.4.2.2 Μεικτός μηχανισμός καταρρεύσεως	66
3.4.3 Κάτω φράγμα φορτίου αστοχίας πεδילוδοκού	70
3.5 Ροπή καταρρεύσεως δοκού σε καθαρή κάμψη	73
4. Το στατικό πρόβλημα της οριακής αναλύσεως	77
4.1 Οι βασικές στατικές και κινηματικές εξισώσεις	77
4.2 Υπερβολικές μερικές διαφορικές εξισώσεις και χαρακτηριστικές γραμμές	80
4.3 Εξισώσεις Hencky	90
4.4 Εξισώσεις Geiringer	94
4.5 Φορτίο καταρρεύσεως πεδילוδοκού κατά Prandtl	95
4.6 Κάμψη κοντού προβόλου κατά Green	98
4.7 Πρόβλημα Cauchy και διακριτοποίηση Massau	107

I. Σύντομη Περιγραφή Περιεχομένων

Το σύγγραμμα αυτό απευθύνεται σε προπτυχιακούς και μεταπτυχιακούς φοιτητές Μηχανικούς, Εφηρμοσμένους Μαθηματικούς και Φυσικούς Εφαρμογών και συνιστά μία εισαγωγή στην μαθηματική θεωρία πλαστικότητας των απολύτως στερεών-ιδεατά πλαστικών, όλκιμων υλικών, όπως π.χ. είναι διάφορα μέταλλα και οι κεκορεσμένες άργιλλοι κάτω από αστράγγιστες συνθήκες. Η μαθηματική θεωρία επεξηγείται στη βάση πρακτικών παραδειγμάτων - κυρίως δανεισμένων από την Δομοστατική και την Εδαφομηχανική - και συμπληρώνεται από επιλεγμένες ασκήσεις. Η σχετική ειδική βιβλιογραφία δίδεται σε υποσημειώσεις μέσα στο κείμενο. Η γενική βιβλιογραφία σκιαγραφείται στην συνέχεια της παρούσης Εισαγωγής.

Στο 1^ο κεφάλαιο δίδονται οι βάσεις που αφορούν στην μαθηματική θεωρία αντοχής των υλικών. Ορίζονται οι διάφορες αναλλοίωτες ποσότητες του τανυστή των τάσεων, αποδίδεται το φυσικό τους νόημα και διατυπώνονται τα κλασσικά κριτήρια διαρροής κατά von Mises και Tresca. Στο 2^ο κεφάλαιο θεμελιώνεται η μαθηματική θεωρία Πλαστικότητας απολύτως στερεών-ιδεατά πλαστικών υλικών. Παρουσιάζονται οι βασικοί ορισμοί και παραδοχές πάνω στις οποίες αναπτύσσεται η θεωρία. Παράλληλα επεξηγούνται οι βασικές έννοιες και τέλος αναπτύσσονται οι εξισώσεις που διέπουν το γενικό πρόβλημα (οι λεγόμενες εξισώσεις Prandtl - Reuss). Στο τέλος του κεφαλαίου αυτού γίνεται αναφορά στη βασική καταστατική υπόθεση που είναι γνωστή ως το αξίωμα 'καθετότητας' του Drucker. Στο 3^ο κεφάλαιο αναπτύσσονται και αποδεικνύονται τα θεωρήματα 'άνω' και 'κάτω' ορίου της μαθηματικής θεωρίας της πλαστικότητας που βασίζονται στο παραπάνω αξίωμα καθετότητας. Τα θεωρήματα άνω και κάτω ορίου βασίζονται επίσης και σε μια γενική διατύπωση της Αρχής των Δυνατών Εργων, που επιτρέπει τον χειρισμό ασυνεχειών στην παραμόρφωση. Η ισχύς των θεωρημάτων αυτών γίνεται κατανοητή με μια σειρά παραδειγμάτων, όπου επεξηγείται πώς κατασκευάζονται αντιστοιχώς 'κινηματικώς επιτρεπτοί' μηχανισμοί καταρρεύσεως και 'στατικώς επιτρεπτά' πεδία εντάσεως για την εκτίμηση του φορτίου καταρρεύσεως μιας κατασκευής. Τέλος στο 4^ο κεφάλαιο αναπτύσσεται η μέθοδος των 'χαρακτηριστικών γραμμών' (Χ.Γ.) ή μέθοδος των 'γραμμών ολισθήσεως'. Παρουσιάζεται η γενική μεθοδολογία προσδιορισμού των (Χ.Γ.) κατά Collatz για συστήματα δύο, οιονεί-γραμμικών μερικών διαφορικών εξισώσεων 'υπερβολικού τύπου', για δύο άγνωστες συναρτήσεις. Η γενική αυτή μεθοδολογία εφαρμόζεται στο επίπεδο στατικό και κινηματικό πρόβλημα της Ιδεατής Πλαστικότητας.. Διατυπώνονται αντίστοιχα οι λεγόμενες εξισώσεις και θεωρήματα Hencky καθώς και οι εξισώσεις Geiringer της Ιδεατής Πλαστικότητας. Η μέθοδος των (Χ.Γ.) εφαρμόζεται τέλος για την επίλυση επίπεδων προβλημάτων παραμορφώσεως και επεξηγείται σε σειρά χρήσιμων εφαρμογών. Οι 'ακριβείς' λύσεις συγκρίνονται με τα αντίστοιχα φράγματα, που προσδιορίστηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο με την χρήση των θεωρημάτων άνω και κάτω ορίου.

¹ Αγγλ. Slip-Line Method.

II. Βασική Βιβλιογραφία

A. Ιδεατή Πλαστικότητα όλκιμων Υλικών

1. L.M. Kachanov, *Fundamentals of the Theory of Plasticity*, Mir Publishers, 1974.
2. W. Johnson and P.B. Mellor, *Engineering Plasticity*, Van Nostrand , 1973.

Για μία πληρέστερη κάλυψη του περιεχομένου του μαθήματος από τα παραπάνω συγγράματα συστήνουμε ενθέρμως το κλασσικό βιβλίο του καθηγητού L.M. Kachanov. Το βιβλίο των Johnson & Mellor είναι επίσης χρήσιμο, διότι περιέχει πολλά λελυμένα πρακτικά παραδείγματα και εφαρμογές, κυρίως ενδιαφέρουσες για τον Μηχανολόγο και Μεταλλουργό μηχανικό.

B. Μαθηματική Θεωρία της Πλαστικότητας

1. R. Hill, *The Mathematical Theory of Plasticity*, Oxford Univ. Press, 1950.
2. T.Y. Thomas, *Plastic Flow and Fracture in Solids*, Academic Press, 1961.

Το σύγγραμμα του Rodney Hill, αν και θεωρείται κλασσικό και ίσως το πρώτο στο είδος του, είναι μάλλον δυσνόητο. Το βιβλίο του T.Y. Thomas είναι μοναδικό στο είδος του και το συστήνουμε ενθέρμως, λόγω ενός εκπληκτικού συνδυασμού μαθηματικής αυστηρότητας και απλότητας. Στο βιβλίο αυτό ανπτύσσεται πλήρως η θεωρία των λεγόμενων 'ασυνεχών' πεδίων, που παίζουν κεντρικό ρόλο σε όλα τα προβλήματα της Μηχανικής που διέπονται από εξισώσεις 'υπερβολικού' τύπου.

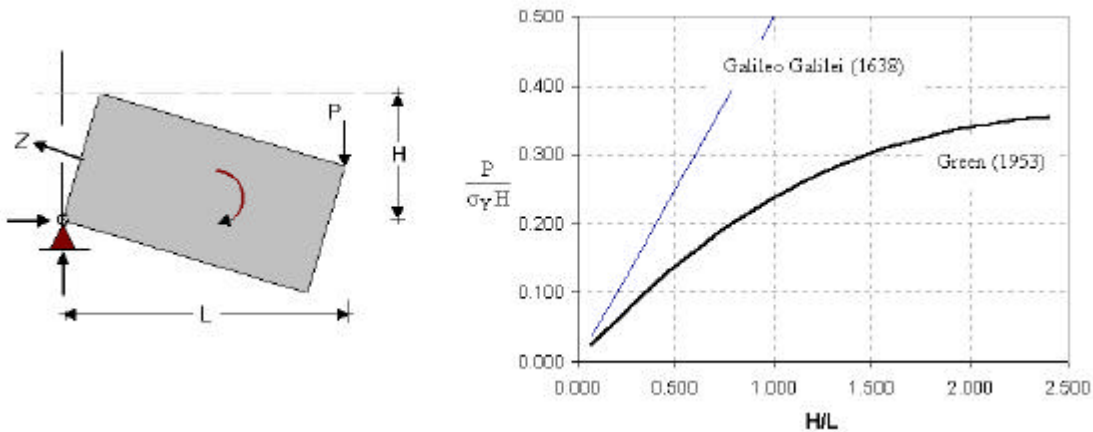
Γ. Πλαστικότητα Γεωυλικών

1. W. F. Chen, *Limit Analysis and Soil Plasticity*, Elsevier, 1975.
2. W.F. Chen and D.J. Han, *Plasticity for Structural Engineers*, Springer, 1988.
3. V.V. Sokolovskii, *Statics of Granular Media*, Pergamon Press, 1965.

Από τα παραπάνω κλασσικά συγγράμματα συστήνουμε ενθέρμως το βιβλίο των Chen & Han, το οποίο καλύπτει πλήρως την θεωρία πλαστικότητας για Δομοστατικούς Μηχανικούς Το βιβλίο αυτό καλύπτει την αντίστοιχη θεωρία για όλκιμα και ψαθυρά υλικά (υλικά με 'εσωτερική τριβή') και περιλαμβάνει επιπλέον την θεωρία 'κρατυνόμενης' πλαστικότητας. Το βιβλίο του W.F. Chen περιέχει ένα θησαυρό από χρήσιμα λελυμένα προβλήματα από την περιοχή της Γεωμηχανικής. Τέλος στο κλασσικό βιβλίο του V.V. Sokolovskii θα βρεί κανείς μια πλήρη παρουσίαση της μεθόδου των γραμμών ολισθήσεως, όπως αυτή εφαρμόζεται στην Εδαφομηχανική των κοκκωδών υλικών.

III. Εισαγωγικό Σημείωμα

Από το βιβλίο του H. M. Westergaard², "*Theory of Elasticity and Plasticity*"³, παραθέτουμε την εξής αναφορά: "...Κανείς άλλος παρά ο Γαλιλέος (1564-1642), ιδρυτής της σύγχρονης εισημης, ξεκίνησε με μια απο τς εργασίες του την Μηχανική των Υλικών. Στην τελευταία του δημοσίευση με τίτλο, **Δύο νέες επιστήμες**, που ολοκληρώθηκε το 1636 και δημοσιεύθηκε το 1638, συμπεριέλαβε και μια πραγματεία επι του θέματος της αστοχίας ενός προβόλου δια θραύσεως της διατομής του στην θέση της πακτώσεως. Ο Γαλιλέος υπέθεσε ότι το υλικό είναι στερεό. Η υπόθεσή του ότι θληπτική περιοχή εντοπίζεται στο κατώτερο άκρο της διατομής αστοχίας και ότι ο εφελκυσμός είναι ομοιόμορφα κατανεμημένος καθ' ύψος της διατομής αντίκειται στο νόμο του Hooke αλλά θα μπορούσε να είναι ορθή κάτω από κάποιο υποθετικό νόμο για την πλαστική φάση..."



Η πρώτη αυτή θεωρία Αντοχής του Γαλιλεού έδωσε λοιπόν την εξής λύση για το φορτίο καταρρεύσεως του προβόλου⁴,

$$P \cdot L = Z \cdot \frac{H}{2} \Rightarrow \frac{P}{\sigma_Y H} = \frac{1}{2} \frac{H}{L}$$

Όπως θα δούμε στο τελευταίο κεφάλαιο του παρόντος συγγράμματος, η μαθηματική θεωρία της Πλαστικότητας, ανάμεσα στ' άλλα, θα μας επιτρέψει τελικά να δώσουμε μια σημαντικά πιο ασφαλή εκτίμηση για το κρίσιμο φορτίο καταρρεύσεως του προβόλου.

² H.M. Westerggaard Gordon McKay Professor of Civil Engineering, Harvard University.

³ H. M. Westerggaard³, "*Theory of Elasticity and Plasticity*", Harvard Univ. Press, 1952.

⁴ Με σ_Y συμβολίζουμε την αντοχή του υλικού σε εφελκυσμό.