

5. ΘΕΩΡΙΑ ΠΛΑΣΤΙΚΗΣ ΡΟΗΣ

5.1 Μια Μικρομηχανική Ερμηνεία του Τανυστή των Τάσεων

Στο εισαγωγικό κεφάλαιο αυτό θα σκιαγραφήσουμε μια μικρομηχανική προσέγγιση στο πρόβλημα της εντάσεως, όπως αυτή απαντάται στη Μηχανική των κοκκωδών μέσων^{1,2}. Από τη σκοπιά της Μικρομηχανικής τα διάφορα μεγέθη, κινηματικά ή στατικά ορίζονται με κάποια στατιστική διαδικασία πάνω στο λεγόμενο *αντιπροσωπευτικό στοιχειώδη όγκο* (REV)³. Για ισότροπες μικροδομές ο (REV) επιλέγεται σφαιρικός, ο οποίος σε πρώτη προσέγγιση συντίθεται από σφαιρικά σωματίδια, τους κόκκους. Αξίζει να σημειώσουμε στο σημείο αυτό ότι κατά τα τελευταία 30 χρόνια έχουν αναπτυχθεί πολλοί υπολογιστικοί κώδικες που μας επιτρέπουν σήμερα να πραγματοποιήσουμε υπολογιστικά πειράματα και να μελετήσουμε τις μηχανικές ιδιότητες των κοκκωδών υλικών στη μικροκλίμακα του κόκκου.

- Αναφορές από το διαδίκτυο:

<http://sic.epfl.ch/SA/publications/SCR96/scr8-page4.html> *Contact forces in the granular medium:*

The model we used was developed by Cundall and Strack (1979). At first, it was mainly used for the analysis of rock mechanics problems and was named distinct element method or discrete element method (DEM). It is capable of handling grains of any shape and size. Here we will use dry two-dimensional circular discs to model the grains. In the distinct element method, every grain in the assembly is identified separately, with its own mass, moment of inertia, and contact properties. Instead of precise grain deformation due to contact, grains are allowed to overlap one another at contact point. The overlaps are small in relation to the particle sizes. We do not want to rewrite the complete Cundall's model. We will just say that contacts are modelled with a system of springs and dash-pots in order to calculate the forces acting at the contact point. Then we calculate the resulting

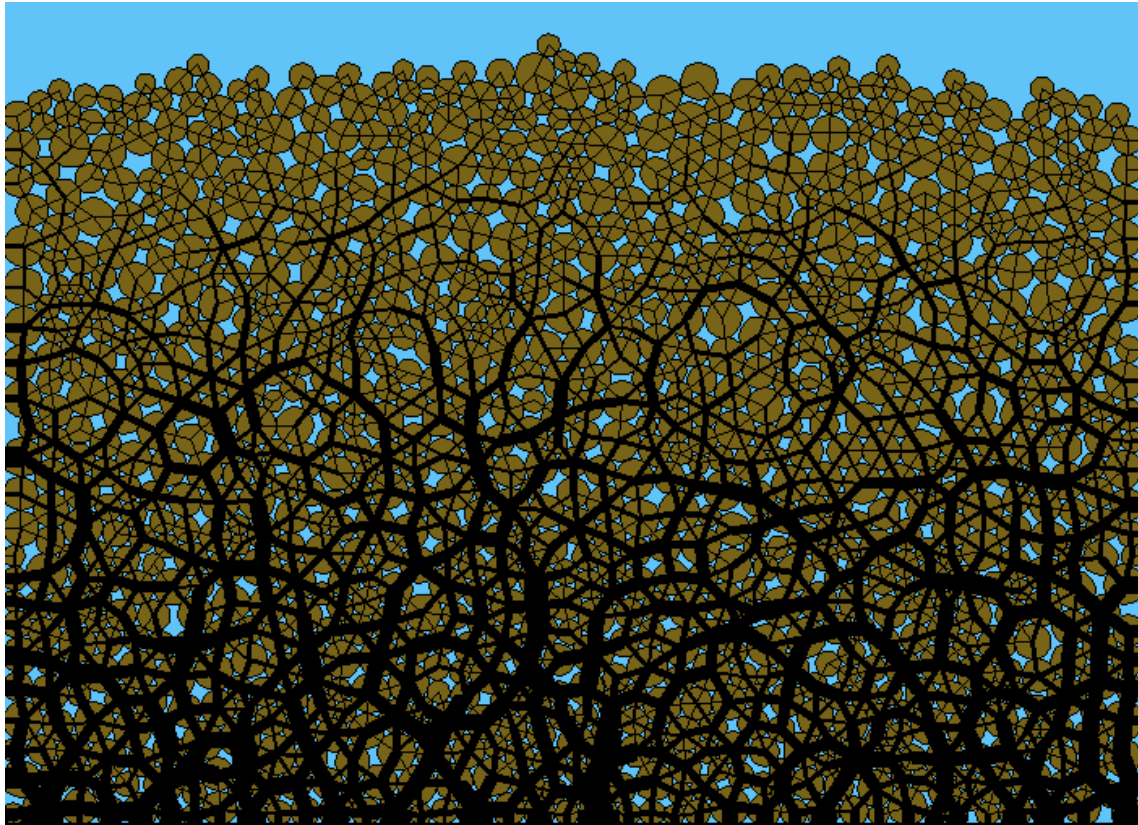
¹ Christoffersen, J., M. M. Mehrabadi, S. Nemat-Nasser (1981), A micromechanical description of granular material behavior, *Journal of Applied Mechanics, ASME*, Vol. 48, pp. 339-344.

² Rothenberg, L., and A. P. S. Selvadurai (1981). Micromechanical definition of the Cauchy stress tensor for particulate media, In: *Mechanics of Structured Media* (edited by A.P.S. Selvadurai), Elsevier, Amsterdam, The Netherlands, pp. 469-486.

³ Αγγλ. Representative Elementary Volume (REV).

force for each grain and find the new velocities by a numerical integration. This method allows the representation of the contact forces between the grains as shown in figure.

Cundall P.A., Strack O.D.L. (1979). A discrete numerical model for granular assemblies, *Géotechnique* 29, No 1, 47-65.



Contact forces in the granular medium [under gravity]

<http://www.cee.princeton.edu/~radu/papers/const/node3.html>

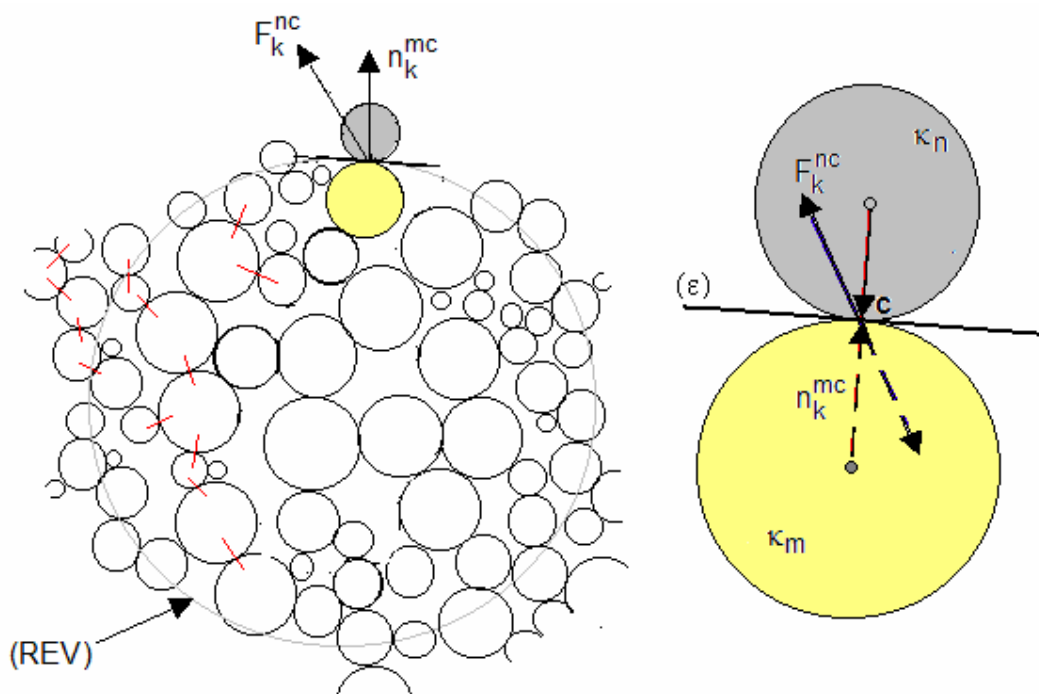
The most popular numerical models, commonly called Distinct Element or Discrete Element Methods, derive from the pioneering work of P.A. Cundall (Cundall1971), Cundall & Strack, 1979) are adopted from the procedures used in numerical Molecular Dynamics for which the book by Allen and Tildesley (1987) is the standard reference.

Cundall, P.A. (1971). A Computer Model for Simulating Progressive Large Scale Movements of Blocky Rock Systems. *Proceedings, ASCE, Symp. Int. Soc. Rock. Mech.*, Nancy, France, Vol. 1,132-150.

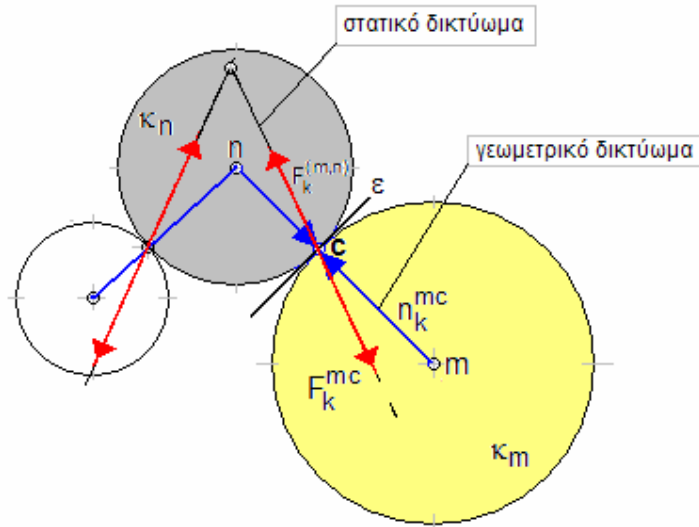
Cundall, P.A. and O.D.L. Strack (1979). A Discrete Numerical Model for Granular Assemblies. *Geotechnique*, Vol. 29, 47-65.

Allen, M.P. and D.J. Tildesley. *Computer Simulation of Liquids*, Clarendon Press, Oxford, 1987.

Το απλό αυτό μικρομηχανικό μοντέλο για ένα σώμα με κοκκώδη μικροδομή μας επιτρέπει να υποθέσουμε ότι ανά πάσα στιγμή οι κόκκοι βρίσκονται σε επαφή με ορισμένους από τους γείτονές τους. Γεωμετρικά η επαφή δύο κόκκων κ_n και κ_m χαρακτηρίζεται από το κοινό σημείο επαφής $c(m,n)$, το κοινό επίπεδο επαφής $\varepsilon(m,n)$ και από τα μοναδιαία κάθετα διανύσματα στο επίπεδο επαφής, $n_k^{nc} = -n_k^{mc}$, που βρίσκονται στην ευθεία που συνδέει τα κέντρα των κόκκων και η οποία περιέχει το σημείο επαφής c . Από στατική σκοπιά η επαφή δύο κόκκων χαρακτηρίζεται από το ζεύγος δυνάμεων επαφής, $F_k^{nc} = -F_k^{mc}$, που ασκούνται στο σημείο επαφής από τον ένα κόκκο στον άλλο.



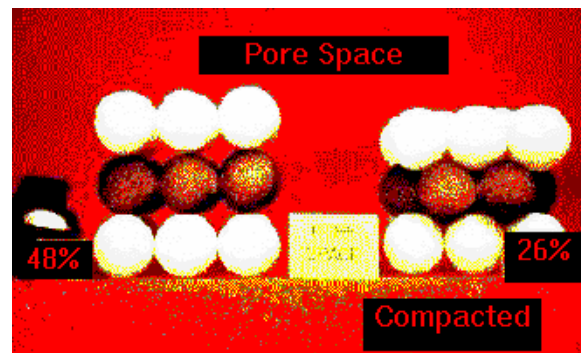
Με βάση την κοκκώδη μικροδομή υποκαθιστούμε το πραγματικό κοκκώδες υλικό από μεν γεωμετρικής σκοπιάς με το χωροδικτύωμα εκείνο που έχει ως κόμβους τα κέντρα των σφαιρικών κόκκων από δε στατικής πλευράς με το χωροδικτύωμα εκείνο που έχει ως τάσεις «ράβδων» το πλέγμα των δυνάμεων επαφής. Σημειώνουμε ότι τα χωροδικτυώματα της γεωμετρικής και της στατικής μικροδομής γενικώς δεν ταυτίζονται. Τα δύο αυτά χωροδικτυώματα ταυτίζονται μόνο στην περίπτωση όπου οι κόκκοι θεωρούνται ότι είναι λείες σφαίρες, οπότε κατά τις επαφές τους μόνο ορθές δυνάμεις μπορούν να ασκηθούν. Επίσης παρατηρούμε ότι οι μεταξύ των κόκκων επαφές είναι μονόπλευροι σύνδεσμοι, οπότε και οι μεταξύ των κόκκων αναπτυσσόμενες δυνάμεις επαφής είναι πάντοτε θλιπτικές.



Σημείωση

Μία βασική ιδιότητα ενός κοκκώδους μέσου είναι και ο αριθμός επαφών ανά κόκκο, N_C , που ονομάζεται *αριθμός συντάξεως*⁴. Π.χ. σφαιρικές συσκευασίες από σωματίδια ίδιας διαμέτρου εμφανίζουν τα εξής πορώδη και αριθμούς συντάξεως:

- χαλαρή-κυβική διάταξη: $n = 0.48$, $N_C = 6$
- ορθορομβική διάταξη: $n = 0.40$, $N_C = 8$
- τετραγωνική-σφηνοειδής διάταξη: $n = 0.30$, $N_C = 10$
- πυκνή-εξαγωνική διάταξη (ρομβοεδρική): $n = 0.26$, $N_C = 12$
- χαλαρή τυχαία διάταξη: $n = 0.40 - 0.50$, $N_C =$ μεταβλητός

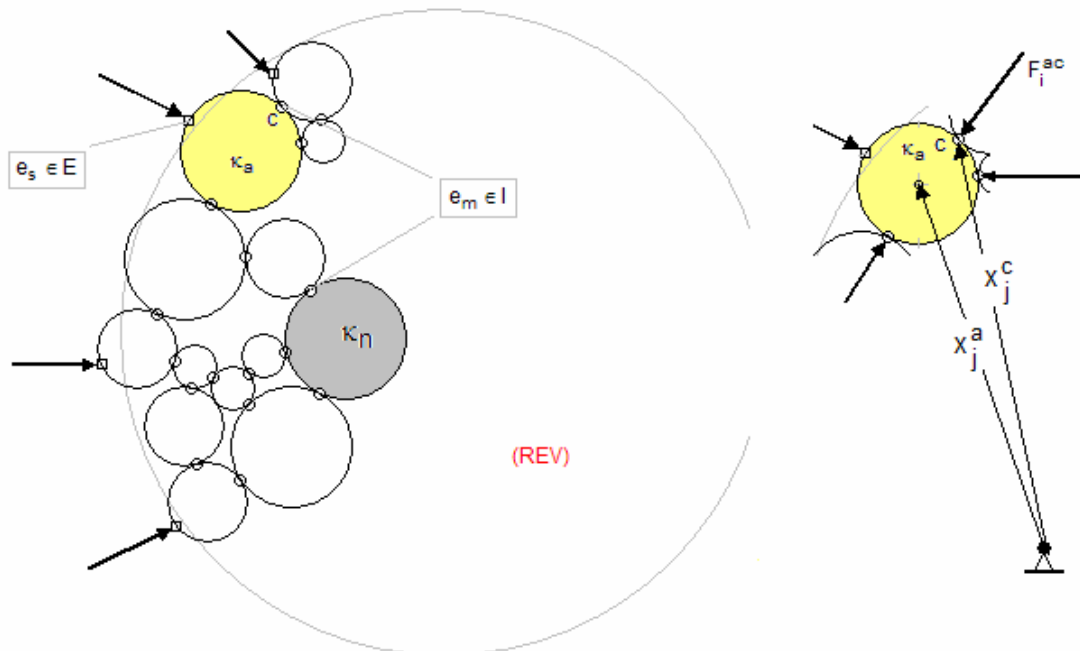


Χαλαρή και πυκνή συσκευασία ομοειδών σφαιρών

⁴ Αγγλ. *coordination number*

• Η Αρχή των Δυνατών Έργων (Α.Δ.Ε.) στα κοκκώδη Μέσα⁵

Θεωρούμε ένα χαρακτηριστικό στοιχειώδη όγκο (REV), ο οποίος περιέχει N τον αριθμό κόκκους, οι οποίοι βρίσκονται σε επαφή μεταξύ τους και ορισμένοι εκ των οποίων φορτίζονται εξ επαφής μέσω εξωτερικών φορτίων στην περιφέρεια του (REV). Στην περίπτωση που ο (REV) είναι μικρός η επίδραση των καθολικών δυνάμεων θεωρείται αμελητέα.



Όλοι οι κόκκοι στον (REV) ομαδοποιούνται σε ένα σύνολο στο οποίο αντιστοιχεί το σύνολο δεικτών αριθμήσεώς τους,

$$B = \{\kappa_1, \dots, \kappa_a, \dots, \kappa_N\} \leftrightarrow B = \{1, \dots, a, \dots, N\}$$

Οι δυνάμεις οι οποίες δρουν στους κόκκους του (REV) είναι συγκεντρωμένα φορτία που ασκούνται σε M τον αριθμό σημεία επαφής,

$$C = \{e_1, \dots, e_s, \dots, e_M\} \leftrightarrow \Gamma = \{1, \dots, s, \dots, M\}$$

Το υποσύνολο $I \subset C$ περιλαμβάνει τα σημεία επαφής των κόκκων στο εσωτερικό του (REV), ενώ το υποσύνολο $E \subset C$ περιλαμβάνει τα σημεία όπου ασκούνται τα στο σύνορο του (REV):

⁵ Bardet, J.-P. and Vardoulakis (2001). The asymmetry of stress in granular media. *Int. J. Solids Struct.*, 38, 353-367.

$$I = \{e_1, \dots, e_{M_I}\} \leftrightarrow I = \{1, \dots, M_I\}$$

$$E = \{e_{M_I+1}, \dots, e_M\} \leftrightarrow E = \{M_I + 1, \dots, M\}$$

$$I \cup E = C, \quad I \cap E = \emptyset$$

Τα υποσύνολα $I_a \leftrightarrow I_a$ και $E_a \leftrightarrow E_a$ αφορούν στα σημεία επαφής του κόκκου κ_a αντιστοίχως με κόκκους στο σωτηρικό του (REV), με κόκκους εξωτερικά του (REV) ενώ το σύνολο και $C_a \leftrightarrow \Gamma_a$ αφορά στα σημεία επαφής του κόκκου συνολικά, οπότε

$$C = \bigcup_{a \in B} C_a, \quad C_a = I_a \cup E_a$$

$$I = \bigcup_{a \in B} I_a, \quad E = \bigcup_{a \in B} E_a$$

όπου για δύο διαφορετικούς κόκκους κ_a και κ_b ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις

$$E_a \cap E_b = \emptyset, \quad I_a \cap I_b = \{e_c\} \quad \forall \kappa_a \neq \kappa_b \in B$$

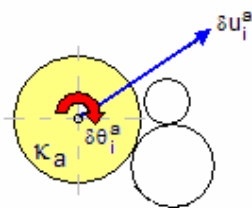
Μια δεδομένη συσκευασία κόκκων είναι σε ισορροπία όταν κάθε κόκκος είναι σε ισορροπία, δηλαδή όταν όλες οι εσωτερικές και εξωτερικές δυνάμεις που δρούν στον κόκκο είναι σε ισορροπία,

- *Ισορροπία δυνάμεων:*
$$\sum_{c \in C_a} F_i^{ac} = 0 \quad (5.1)$$

- *Ισορροπία ροπών:*
$$\sum_{c \in C_a} \varepsilon_{ijk} (x_j^c - x_j^a) F_k^{ac} = 0 \quad (5.2)$$

όπου x_i^a και x_i^c είναι τα διανύσματα θέσεως του κέντρου του κόκκου και του σημείου επαφής του με εσωτερικούς κόκκους ή του σημείου εφαρμογής εξωτερικού φορτίου.

Δεχόμεθα ότι δυναμική κινηματική του τυχόντος κόκκου κ_a (θεωρουμένου ως απολύτως στερεού σώματος) συνοψίζεται σε μία δυνατή μετατόπιση δu_i^a και μία δυνατή στροφή $\delta \theta_i^a$.



Πολλαπλασιάζοντας τις παραπάνω εξισώσεις ισορροπίας (5.1) και (5.2) με τη δυνατή μετατόπιση δu_i^a και τη δυνατή στροφή $\delta \theta_i^a$ και αθροίζοντας τις εξισώσεις που προκύπτουν για όλους τους κόκκους στον (REV), παίρνουμε την εξής έκφραση

$$\sum_{a \in B} \sum_{c \in C_a} \left(F_i^{ac} \delta u_i^a + \varepsilon_{ijk} (x_j^c - x_j^a) F_k^{ac} \delta \theta_i^a \right) = 0 \quad (5.3)$$

Το παραπάνω διπλό άθροισμα πάνω στα σύνολα C_a και B μπορεί να αναλυθεί σε δύο αθροίσματα πάνω στα σύνολα I και E . Λαμβάνοντας δε υπόψη το γεγονός ότι οι εσωτερικές δυνάμεις εμφανίζονται στα αθροίσματα αυτά κατά ζεύγη αντιθέτων δυνάμεων,

$$F_i^c := F_i^{ac} = -F_i^{bc}$$

παίρνουμε τελικά την εξής έκφραση για την Α.Δ.Ε.

$$\underline{\delta W^{(D,ext)} = \delta W^{(D,int)}} \quad (5.4)$$

όπου οι ποσότητες $\delta W^{(D,ext)}$ και $\delta W^{(D,int)}$ συνιστούν αντιστοίχως⁶:

1. Το *δυνατό έργο των εξωτερικών δυνάμεων*, που δρουν στο διακριτό μέσο

$$\delta W^{(D,ext)} = \sum_{e \in E} F_i^e \delta u_i^e \quad (5.5)$$

όπου δu_i^e είναι η δυνατή μετατόπιση του σημείου εφαρμογής e του εξωτερικού φορτίου F_i^e .

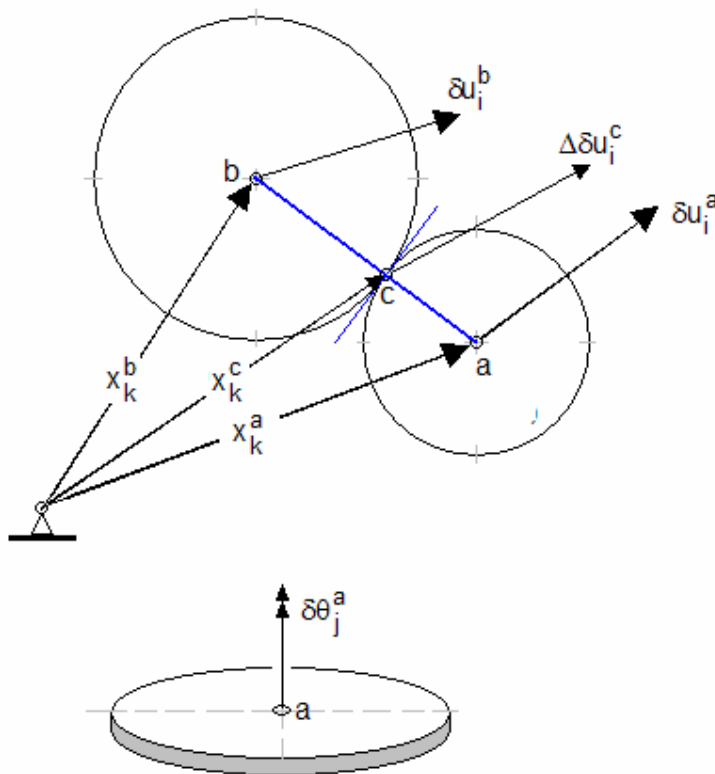
2. Το *δυνατό έργο των εσωτερικών δυνάμεων*:

$$\delta W^{(D,int)} = \sum_{c \in I} F_i^c \Delta \delta u_i^c \quad (5.6)$$

⁶ Ο δείκτης D συμβολίζει ότι οι εκφράσεις αυτές αντιστοιχούν σε δυνατά έσορα για το διακριτό σύστημα των κόκκων.

όπου $\Delta\delta u_i^c$ είναι η μετατόπιση το σημείου επαφής c των κόκκων κ_a και κ_b ,

$$\Delta\delta u_i^c = \delta u_i^b - \delta u_i^a + \varepsilon_{ijk} (\delta\theta_j^b (x_k^c - x_k^b) - \delta\theta_j^a (x_k^c - x_k^a))$$



Οι δυνατές μετατοπίσεις και στροφές μπορούν να επιλεγούν τυχαία. Ειδικότερα μπορούν να επιλεγούν ως συναρτήσεις του διανύσματος θέσεως του κέντρου του κόκκου:

$$\delta u_i^a = a_i + b_{ij} x_j^a + \dots, \quad \delta\theta_j^a = \alpha_j + \beta_{ij} x_j^a + \dots$$

για τυχαίους συντελεστές a_i , b_{ij} και α_j , β_{ij} , οπότε:

$$\Delta\delta u_i^c = b_{ij} (x_j^b - x_j^a) - \alpha_j \varepsilon_{ijk} (x_k^b - x_k^a) + \beta_{jl} \varepsilon_{ijk} (x_l^b (x_k^c - x_k^b) - x_l^a (x_k^c - x_k^a)) + \dots$$

και

$$\begin{aligned}\delta u_i^e &= \delta u_i^a + \varepsilon_{ijk} \delta \theta_j^a (x_k^e - x_k^{ae}) + \dots \\ &= a_i + b_{ij} x_j^{ae} + \varepsilon_{ijk} \alpha_j (x_k^e - x_k^{ae}) + \varepsilon_{ijk} \beta_{jl} x_l^{ae} (x_k^e - x_k^{ae}) + \dots\end{aligned}$$

όπου το **διάνυσμα** x_k^{ae} **δίνει τη θέση του κέντρου** a **του κόκκου** κ_a **με την εξωτερική επαφή** e .

Με τις παραπάνω παραδοχές παίρνουμε τις εξής εκφράσεις για τα έργα των εξωτερικών και εσωτερικών δυνάμεων:

$$\delta W^{(D,int)} = b_{ij} \sum_{c \in I} F_i^c (x_j^b - x_j^a) - \alpha_j \sum_{c \in I} \varepsilon_{ijk} F_i^c (x_k^b - x_k^a) + \dots$$

$$\delta W^{(D,ext)} = a_i \sum_{e \in E} F_i^e + b_{ij} \sum_{e \in E} F_i^e x_j^{ae} + \alpha_j \sum_{e \in E} \varepsilon_{ijk} F_i^e (x_k^e - x_k^{ae}) + \dots$$

Από την Α.Δ.Ε., Εξ. (5.10) παίρνουμε διαδοχικά τις εξής εξισώσεις ισορροπίας:

$$1) \quad b_{ij} = 0 \quad , \quad \alpha_i = 0 \quad , \dots \Rightarrow a_i \sum_{e \in E} F_i^e = 0 \quad \forall a_i \Leftrightarrow$$

$$\underline{\sum_{e \in E} F_i^e = 0} \quad (5.7.1)$$

Η Εξ. (5.7.1) εκφράζει την **ισορροπία των εξωτερικών δυνάμεων** που ασκούνται στον (REV).

$$2) \quad a_i = 0 \quad , \quad \alpha_i = 0 \quad , \dots \Rightarrow b_{ij} \sum_{c \in I} F_i^c (x_j^b - x_j^a) = b_{ij} \sum_{e \in E} F_i^e x_j^{ae} \quad \forall b_{ij} \Leftrightarrow$$

$$\underline{\sum_{c \in I} F_i^c (x_j^b - x_j^a) = \sum_{e \in E} F_i^e x_j^{ae}} \quad (5.7.2)$$

$$3) \quad a_i = 0 \quad , \quad b_{ij} = 0 \quad , \dots \Rightarrow -\alpha_j \sum_{c \in I} \varepsilon_{ijk} F_i^c (x_k^b - x_k^a) = \alpha_j \sum_{e \in E} \varepsilon_{ijk} F_i^e (x_k^e - x_k^{ae}) \quad \forall \alpha_j \Leftrightarrow$$

$$-\sum_{c \in I} \varepsilon_{ijk} F_i^c (x_k^b - x_k^a) = \sum_{e \in E} \varepsilon_{ijk} F_i^e (x_k^e - x_k^{ae})$$

Αν δεχθούμε τώρα ότι η ποσότητες $(x_k^e - x_k^{ae})$ είναι της τάξεως μεγέθους της ακτίνας του κόκκου.

$$|x_k^e - x_k^{ae}| = O(R_g)$$

τότε η παραπάνω εξίσωση ισοροπίας ροπών δίνει κατά προσέγγιση τη εξής σχέση:

$$\underline{\varepsilon_{ijk} \sum_{c \in I} F_i^c (x_k^b - x_k^a) = 0} \quad (5.7.3)$$

• **Ο μικρομηχανικός ορισμός της τάσεως**

Για τη μετάβαση από το Διακριτό στο Συνεχές Μέσο παρατηρούμε ότι ο τανυστής των τάσεων κατά Cauchy στο Συνεχές ικανοποιεί τις εξισώσεις ισοροπίας. Όπως αναφέρμε στην περίπτωση που ο (REV) είναι μικρός η επίδραση των καθολικών δυνάμεων θεωρείται αμελητέα, οπότε έχουμε τις εξής εξισώσεις ισοροπίας,

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} = 0 \quad \forall x_k \in V_{REV} \quad (5.8.1)$$

$$\sigma_{ij} n_i = t_j \quad \forall x_k \in \partial V_{REV} \quad (5.8.2)$$

Ορίζουμε τώρα τη μέση τάση

$$\bar{\sigma}_{ij} = \frac{1}{V_{REV}} \int_{V_{REV}} \sigma_{ij} dV \quad (5.9)$$

Λόγω της εξισώσεως ισοροπίας Εξ. (5.8.1) , ο παραπάνω ορισμός, Εξ. (5.9), δίδει

$$\bar{\sigma}_{ij} = \frac{1}{V_{REV}} \int_{V_{REV}} \frac{\partial}{\partial x_k} (x_i \sigma_{kj}) dV$$

η οποία λόγω του θεωρήματος αποκλίσεως γίνεται,

$$\bar{\sigma}_{ij} = \frac{1}{V_{REV}} \int_{\partial V_{REV}} x_i \sigma_{kj} n_k dS$$

ή λόγω της εξισώσεως ισοροπίας (5.8.2)

$$\underline{\bar{\sigma}_{ij} = \frac{1}{V_{REV}} \int_{\partial V_{REV}} x_i t_j dS} \quad (5.10)$$

Αντιπαραβάλλοντας τις Εξ. (5.10) και (5.7.2) και θέτοντας

$$t_j dS \approx F_j^e$$

οδηγούμεθα σε μία έκφραση που μας επιτρέπει τον υπολογισμό της μέσης τάσεως από τις δυνάμεις επαφής και τη θέση των επαφών των κόκκων που βρίσκονται στο σύνορο του (REV)

$$\bar{\sigma}_{ij} \approx \frac{1}{V_{REV}} \sum_{e \in E} x_i^{ae} F_j^e = \frac{1}{V_{REV}} \sum_{c \in I} (x_i^b - x_i^a) F_j^c \quad (5.11)$$

ή

$$\bar{\sigma}_{ij} \approx \frac{1}{V_{REV}} \sum_{c \in I} \ell_i^c F_j^c \quad (5.12)$$

όπου

$$\ell_i = x_i^b - x_i^a$$

είναι το διάνυσμα που ενώνει τα κέντρα των εκάστοτε δύο κόκκων σε επαφή. Η παραπάνω σχέση, Εξ. (5.12) για τον υπολογισμό της τάσεως αποδίδεται στον Love⁷.

Τέλος παρατηρούμε ότι από τις Εξ. (5.7.3) και (5.12) προκύπτει (πρσεγγιστικά) η συμμετρία της μέσης τάσεως

$$\varepsilon_{ijk} \sum_{c \in I} F_i^c \ell_k^c \approx 0 \Rightarrow \varepsilon_{ijk} \bar{\sigma}_{ki} \approx 0$$

οπότε για

$$j=1: \varepsilon_{312} \bar{\sigma}_{23} + \varepsilon_{213} \bar{\sigma}_{32} \approx 0 \Rightarrow \bar{\sigma}_{23} \approx \bar{\sigma}_{32}, \text{ κ.ο.κ.}$$

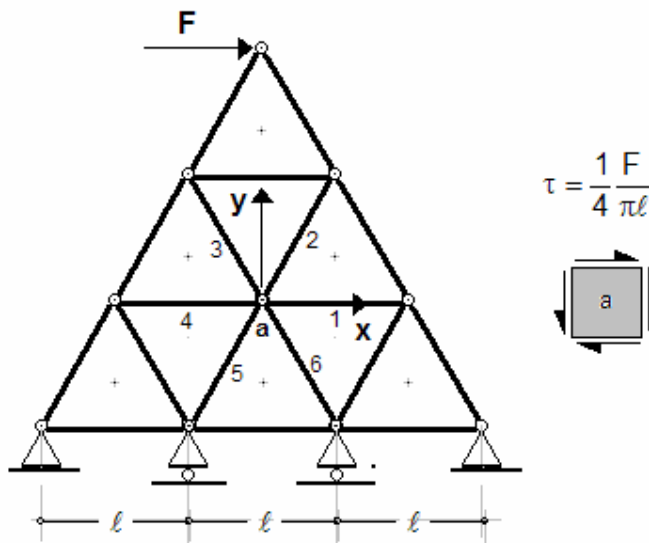
ή

$$\bar{\sigma}_{ij} \approx \bar{\sigma}_{ji} \quad (5.13)$$

⁷ A.E.H. Love, *A Treatise of the Mathematical Theory of Elasticity*, Cambridge University Press, 1927.

• **Παράδειγμα**

Για την επεξήγηση του παραπάνω τύπου του Love για τον υπολογισμό της μέσης τάσεως σε ένα διακριτό μέσο θα θεωρήσουμε το εξής απλό παράδειγμα: Έστω ένα απλό επίπεδο τριγωνικό δικτύωμα, αποτελούμεο από ράβδους του ίδιου μήκους και της ίδιας στιβαρότητας, φορτιζόμενο στην κορυφή του από οριζόντιο φορτίο F [kN/m], όπως φαίνεται στο σχήμα.



Θεωρούμε τον κεντρικό κόμβο (a) και τους γειτονικούς του, με τους οποίους αυτός συνδέεται μέσω των ράβδων (1) ως (6). Επιλύοντας τον φορέα βρίσκουμε τις τάσεις των ράβδων αυτών και εφαρμόζουμε τον τύπο του Love ως εξής:

$$\bar{\sigma}_{ij} \approx \frac{1}{\pi \ell^2} \sum_{c=1}^6 \ell_i^c S_j^c$$

Ράβδος	S/F	φ	l_x	l_y	S_x	S_y	sigmaxx	sigmaxy	sigmayx	sigmayy
							$l_x^c S_x^c$	$l_x^c S_y^c$	$l_y^c S_x^c$	$l_y^c S_y^c$
1	0.143	0	1.000	0.000	0.143	0.000	0.143	0.000	0.000	0.000
2	0.000	60	0.500	0.866	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
3	0.000	120	-0.500	0.866	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
4	-0.143	180	-1.000	0.000	0.143	0.000	-0.143	0.000	0.000	0.000
5	0.286	240	-0.500	-0.866	-0.143	-0.247	0.071	0.124	0.124	0.214
6	-0.286	300	0.500	-0.866	-0.143	0.247	-0.071	0.124	0.124	-0.214
							0.00	0.25	0.25	0.00

Οπότε προκύπτει ότι η εντατική κατάσταση στον κόμβο (a) είναι **απλή διάτμηση**:

$$[\bar{\sigma}] = \begin{bmatrix} 0 & 1/4 \\ 1/4 & 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{F}{\pi \ell}$$

5.2 Οι Αναλλοίωτες του Τανυστή των Τάσεων

Θεωρούμε το συμμετρικό (πραγματικό, Cauchy) τανυστή των τάσεων σε καρτεσιανή μορφή σε σύστημα αξόνων $O(x_1, x_2, x_3)$:

$$[\bar{\sigma}] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

Ο τανυστής αυτός αναλύεται σε ισότροπο ή σφαιρικό και αποκλίνοντα,

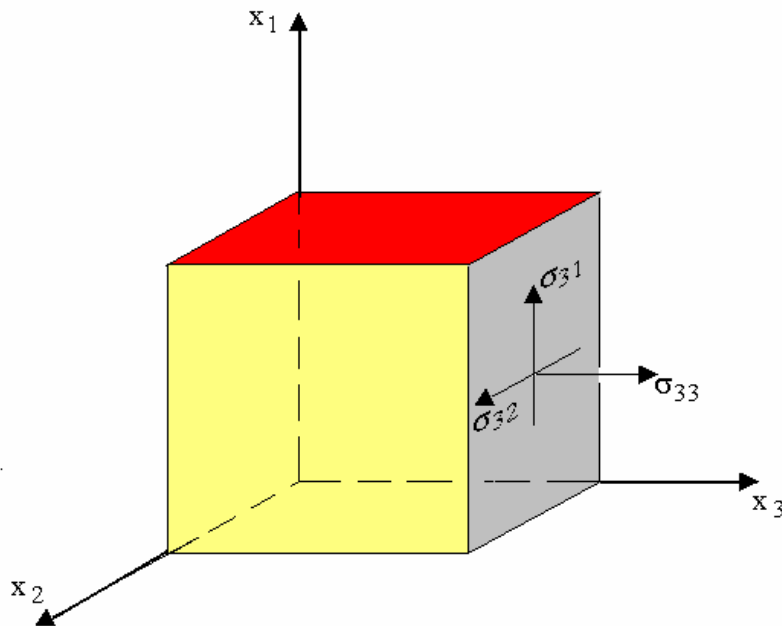
$$\sigma_{ij} = \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij} + s_{ij}$$

όπου

$$\sigma_{kk} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$$

και

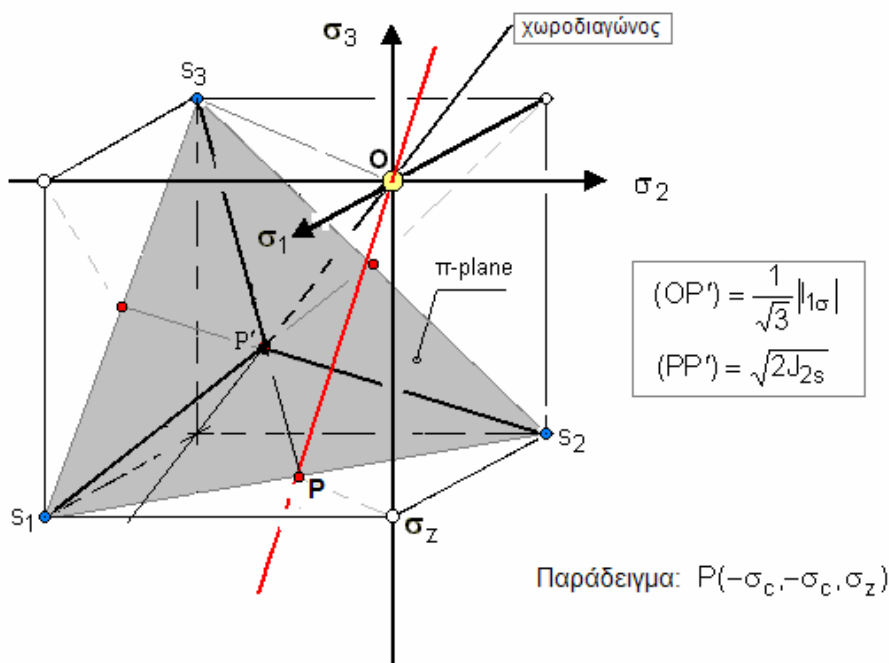
$$s_{11} = \frac{1}{3} (2\sigma_{11} - \sigma_{22} - \sigma_{33}) \quad , \quad s_{12} = \sigma_{12} \quad , \quad \text{κ.ο.κ.}$$



Παρατηρούμε ότι οι κύριοι άξονες του τανυστή σ και του αποκλίνοντα s ταυίζονται (γιατί;). Σε σύστημα κυρίων αξόνων (x_1', x_2', x_3') οι τανυστές αυτοί παρίστανται από τους παρακάτω πίνακες

• $[\bar{\sigma}] = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$ δηλ. $\sigma_{1'1'} = \sigma_1$, $\sigma_{1'2'} = 0$, κ.ο.κ

• $[\bar{s}] = \begin{bmatrix} s_1 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 \\ 0 & 0 & s_3 \end{bmatrix}$ δηλ. $s_{1'1'} = s_1$, $s_{1'2'} = 0$, κ.ο.κ



Όταν η εντατική κατάσταση αναφέρεται σε σύστημα κυρίων αξόνων, τότε παρίσταται αυτή γεωμετρικά σε ένα καρτεσιανό χώρο, το λεγόμενο χώρο των κυρίων τάσεων κατά Haigh-Westergaard. Στο χώρο αυτό η εντατική κατάσταση παρίσταται με το

διάνυσμα θέσεως \vec{OP} . Το διάνυσμα αυτό προβάλλεται αντιστοίχως στη λεγόμενη χωροδιαγώνιο⁸ και στο κάθετο προς αυτή αποκλίνον επίπεδο⁹ (π). Πάνω στη χωροδιαγώνιο απεικονίζονται όλες οι ισότροπες εντατικές καταστάσεις, δηλαδή οι εντατικές καταστάσεις με

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$$

⁸ Αγγλ. *space diagonal*

⁹ Αγγλ. *deviatoric plane*

ενώ πάνω στο αποκλίνον επίπεδο απεικονίζονται όλες οι καθαρώς αποκλίνουσες από την ισότροπη εντατικές καταστάσεις, δηλ. οι εντατικές καταστάσεις με

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \text{σταθ.}$$

Έστω

$$I_{1\sigma} = \sigma_{kk} = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$$

η 1^η αναλλοίωτος του σ . Οπότε,

$$\sigma_1 = s_1 + \frac{1}{3} I_{1\sigma} \quad , \quad \text{κ.ο.κ.}$$

Παρατηρούμε ότι η 1^η αναλλοίωτος του αποκλίνοντα \mathbf{s} μηδενίζεται,

$$J_{1s} = s_{kk} = s_1 + s_2 + s_3 = 0$$

Άρα για τον υπολογισμό των κυρίων τάσεων σ_i ($i = 1,2,3$) αρκεί να υπολογίσουμε τις κύριες τάσεις s_i ($i = 1,2,3$). Αυτές δίδονται από την εξής χαρακτηριστική εξίσωση (γιατί):

$$\underline{s^3 - J_{2s}s - J_{3s} = 0}$$

οι συντελεστές της οποίας είναι αντιστοίχως η 2^η και 3^η αναλλοίωτος του αποκλίνοντα τανυστή των τάσεων,

$$J_{2s} = \frac{1}{2} s_{ij}s_{ji} = \frac{1}{2} (s_1^2 + s_2^2 + s_3^2) \quad (5.14)$$

$$J_{3s} = \frac{1}{3} s_{ij}s_{jk}s_{ki} = \frac{1}{3} (s_1^3 + s_2^3 + s_3^3) \quad (5.15)$$

Επειδή ο τανυστής των τάσεων είναι συμμετρικός, έχει πραγματικές ιδιοτιμές, οπότε η λύση της παραπάνω κυβικής εξίσωσης για τις ιδιοτιμές του αποκλίνοντα δίδεται με τη βοήθεια τριγωνομετρικών συναρτήσεων μιας βοηθητικής γωνίας α_s ως εξής:

$$s_1 = \frac{2}{\sqrt{3}} T \cos \alpha_s \quad , \quad s_2 = -\frac{2}{\sqrt{3}} T \cos \left(\frac{\pi}{3} - \alpha_s \right) \quad , \quad s_3 = -\frac{2}{\sqrt{3}} T \cos \left(\frac{\pi}{3} + \alpha_s \right) \quad (5.16)$$

όπου:

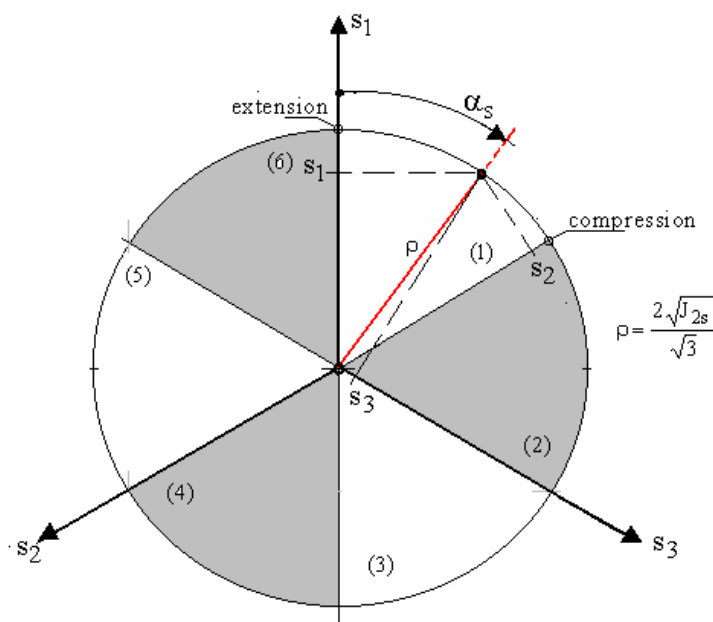
$$T = \sqrt{J_{2s}} \quad (5.17)$$

- (1) $0 \leq \alpha_s \leq \pi/3$ ($s_2 \leq s_3 \leq s_1$) : $\alpha_s = \alpha_{s0}$
 - (2) $\pi/3 \leq \alpha_s \leq 2\pi/3$ ($s_2 \leq s_1 \leq s_3$) : $\alpha_s = -\alpha_{s0} + 2\pi/3$
 - (3) $2\pi/3 \leq \alpha_s \leq \pi$ ($s_1 \leq s_2 \leq s_3$) : $\alpha_s = \alpha_{s0} + 2\pi/3$
 - (4) $\pi \leq \alpha_s \leq 4\pi/3$ ($s_1 \leq s_3 \leq s_2$) : $\alpha_s = -\alpha_{s0} + 4\pi/3$
 - (5) $4\pi/3 \leq \alpha_s \leq 5\pi/3$ ($s_3 \leq s_1 \leq s_2$) : $\alpha_s = \alpha_{s0} + 4\pi/3$
 - (6) $5\pi/3 \leq \alpha_s \leq 2\pi$ ($s_3 \leq s_2 \leq s_1$) : $\alpha_s = -\alpha_{s0} + 2\pi$
- (5.18)

Η γωνία α_{s0} καλείται *αναλλοίωτη τασική γωνία ομοιότητας*¹⁰ η οποία ορίζεται ως εξής

$$\cos 3\alpha_{s0} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{J_{3s}}{J_{2s}^{3/2}}, \quad 0 \leq \alpha_{s0} \leq \pi/3 \quad (5.19)$$

Στο παρακάτω διάγραμμα σημειώνονται στο αποκλίνον οι διάφορες περιοχές διατάξεως των κυρίων τάσεων, συμφώνως προς τις σχέσεις (5.16).

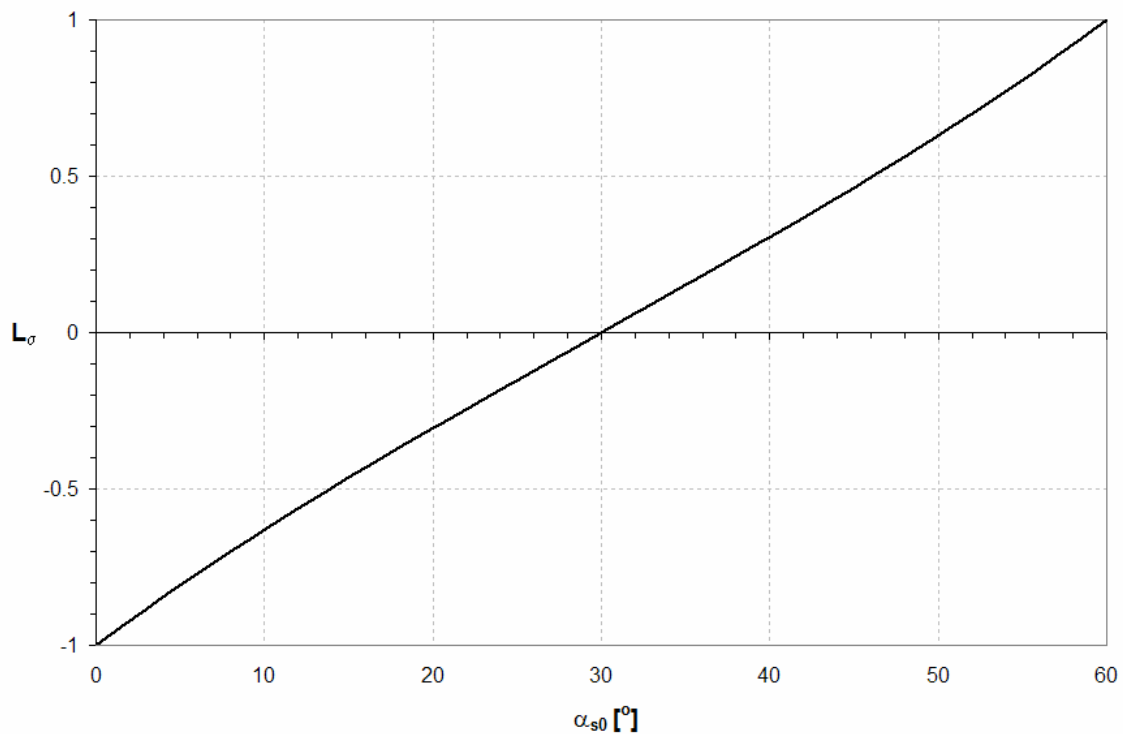


¹⁰ Αγγλ. *stress invariant angle of similarity or Lode angle*

Στη βιβλιογραφία συχνά αντί της γωνίας α_{s0} χρησιμοποιείται η λεγόμενη παράμετρος $Lode$ ¹¹ ή η λεγόμενη παράμετρος¹² b , οι οποίες στο 1^ο εκτιμόριο ορίζονται ως εξής:

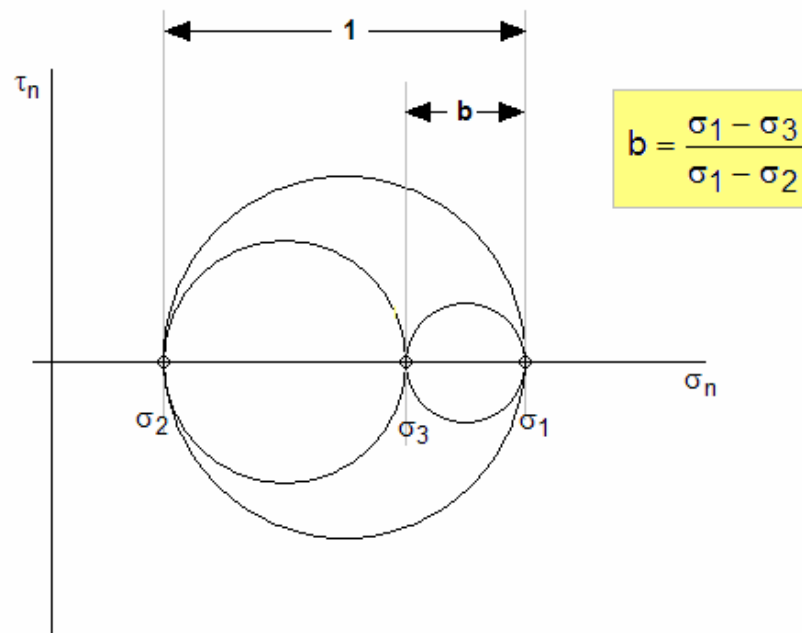
$$L_{\sigma} = 2 \frac{\sigma_3 - \sigma_2}{\sigma_1 - \sigma_2} - 1 = 2 \frac{\sin \alpha_{s0}}{\sin(\pi/3 + \alpha_{s0})} - 1, \quad \sigma_2 \leq \sigma_3 \leq \sigma_1$$

$$b = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_2} = 1 - \frac{1}{2}(L_{\sigma} + 1) = 1 - \frac{\sin \alpha_{s0}}{\sin(\pi/3 + \alpha_{s0})} \quad (\sigma_2 \leq \sigma_3 \leq \sigma_1)$$



¹¹ W. Lode (1926). Versuche über den Einfluss der mittleren Hauptspannung auf das Fließen der Metalle Eisen, Kupfer und Nickel. *Z. Physik*, Vol. 36, 913-939.

¹² Η παράμετρος b χρησιμοποιείται συνήθως στην Εδαφομηχανική, πρβλ. Reads & Green, *Géotechnique*, 26(4), 551-576, 1976. Parry RHG. Ed. Stress-strain behaviour of soils. *Proceedings of the Roscoe Memorial Symposium*. Cambridge University, March, 1971.



5.3 Αξονοσυμμετρικές Εντατικές Καταστάσεις

Οι αξονοσυμμετρικές εντατικές καταστάσεις χαρακτηρίζονται από το γεγονός ότι δύο κύριες τάσεις είναι ίσες:

$$[\bar{\sigma}] = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma_c & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma_c \end{bmatrix},$$

οπότε

$$J_{2s} = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_c), \quad J_{3s} = \frac{2}{27}(\sigma_1 + \sigma_c)^3$$

$$\cos 3\alpha_s = \frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{(2/3^3) (\sigma_1 + \sigma_c)^3}{(1/3)^{3/2} |\sigma_1 + \sigma_c|^3} = \text{sgn}(\sigma_1 + \sigma_c)$$

Ειδικότερα διακρίνουμε ανάμεσα στον *αξονοσυμμετρικό εφελκυσμό*¹³

$$-\sigma_c < \sigma_1 \Rightarrow \cos 3\alpha_s = +1 \quad (L_\sigma = -1, b = 1)$$

$$\alpha_{s0} = 0, \quad \alpha_{s1} = \frac{2\pi}{3}, \quad \alpha_{s2} = \frac{4\pi}{3}$$

¹³ Αγγλ. *axisymmetric extension*

και την αξονοσυμμετρική θλίψη¹⁴

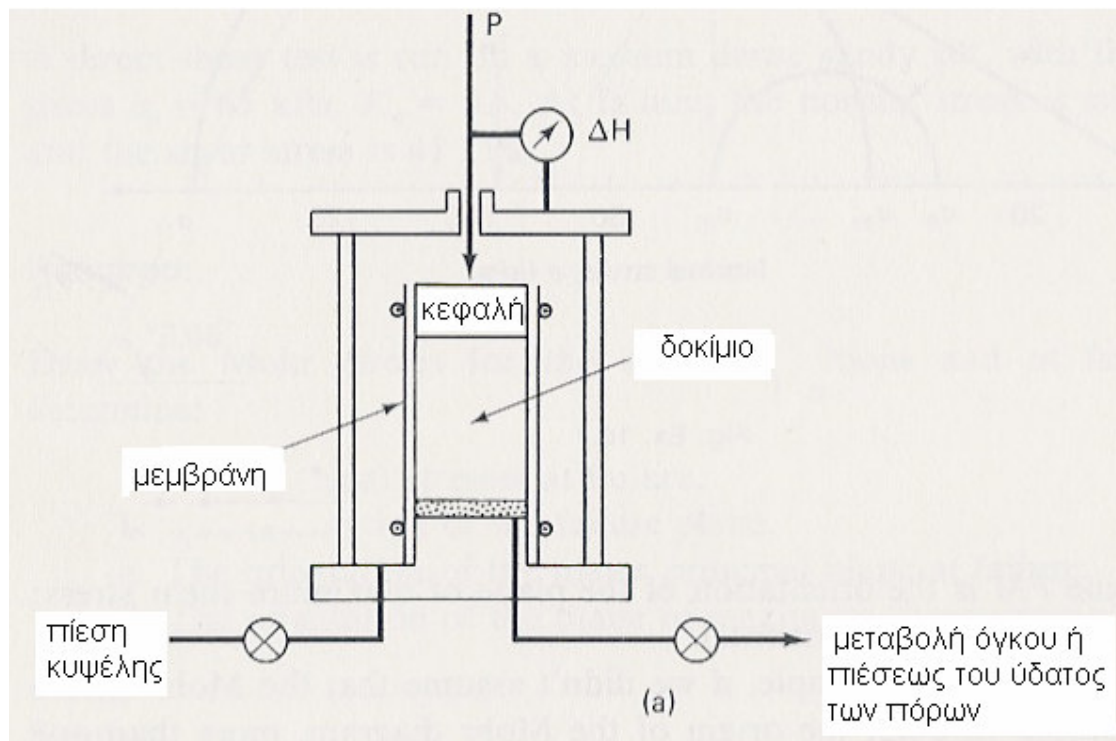
$$\sigma_1 < -\sigma_c \Rightarrow \cos 3\alpha_s = -1 \quad (L_\sigma = +1, b = 0)$$

$$\alpha_{s0} = \frac{\pi}{3}, \quad \alpha_{s1} = \pi, \quad \alpha_{s2} = \frac{5\pi}{3}$$

Οι εντατικές κατάστασεις αυτές υλοποιούνται εύκολα στο εργαστήριο μέσω της λεγόμενης τριαξονικής συσκευής, η οποία επιτρέπει την άσκηση επί του δοκιμίου ολόπλευρης πίεσεως σ_c και αξονικής τάσεως σ_1 , η οποία με τη σειρά της εξαρτάται από το επιβαλλόμενο αξονικό φορτίο P και από την επιφάνεια A της ορθής προς το άξονα διατομής του δοκιμίου¹⁵:

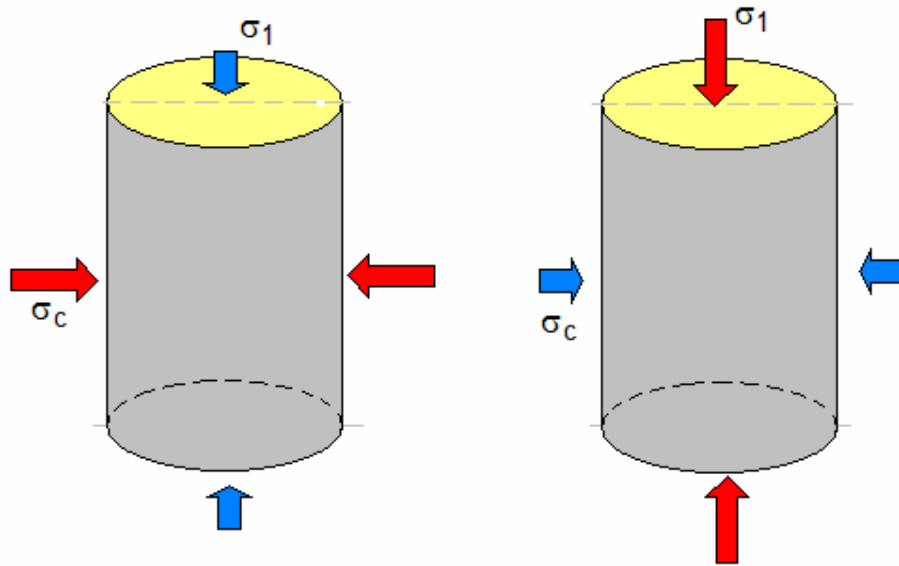
$$\sigma_1 = -\sigma_c + \frac{P}{A}$$

Είναι φανερό ότι στη περίπτωση της τριαξονικής θλίψεως το αξονικό φορτίο είναι θλιπτικό ($P < 0$), όποτε $\sigma_1 < -\sigma_c < 0$, ενώ στην περίπτωση του τριαξονικού εφελκυσμού το αξονικό φορτίο είναι εφελκυστικό ($P > 0$) και $-\sigma_c < \sigma_1 < 0$.



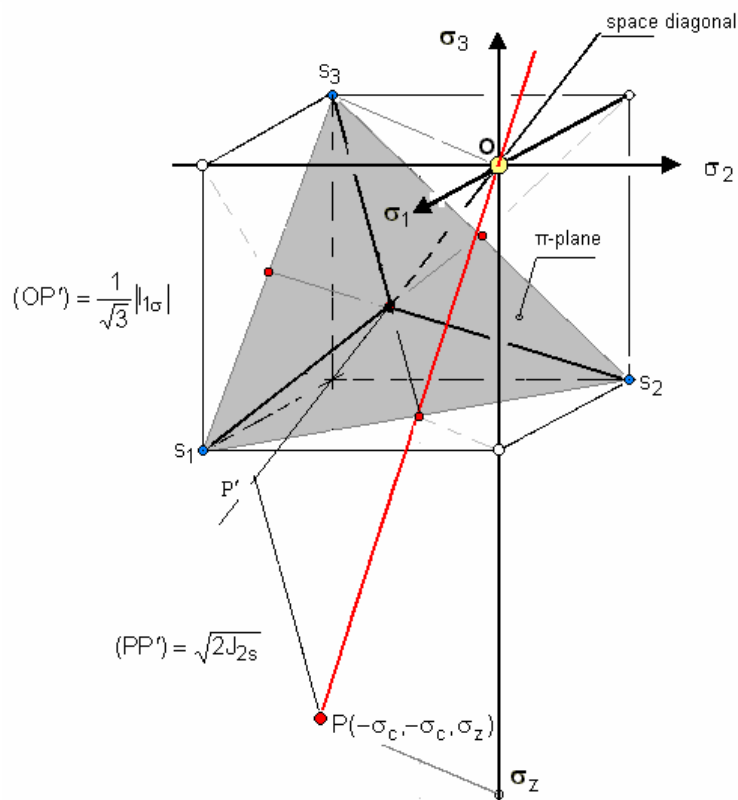
¹⁴ Αγγλ. *axisymmetric compression*

¹⁵ Πρβλ. Ι. Βαρδουλάκη, *Γεωτεχνική Μηχανική*, Κεφ. 3.5, www.geolab.mechan.ntua.gr



Αξονοσυμμετρικός «εφελκυσμός»

Αξονοσυμμετρική «θλίψη»



Για παράδειγμα ας θεωρήσουμε την απεικόνιση μιας αξονοσυμμετρικής θλίπτικής εντατικής καταστάσεως στο χώρο κυρίων τάσεων Haigh-Westergaard. Όπως

αναφέραμε και πιο πάνω οι προβολές του διανύσματος θέσεως της προκείμενης εντατικής καταστάσεως \vec{OP} πάνω στη χωρδιαγώνιο και στο αντίστιχο αποκλίνον επίπεδο συνδέονται άμεσα με τη 1^η και τη 2^η αναλλοίωτη του τανυστή των τάσεων και του αποκλίνοντά του αντιστοιχως, $(OP') = |I_{1\sigma}|/\sqrt{3}$ και $(PP') = \sqrt{2J_{2s}}$. Στη θεωρούμενη περίπτωση της τριαξονικής θλίψεως επιλέγουμε τους εξής συμβολισμούς,

$$\sigma_3 = \sigma_2 \leq \sigma_1 = \sigma_2 = -\sigma_c \quad , \quad \alpha_s = 5\pi/3$$

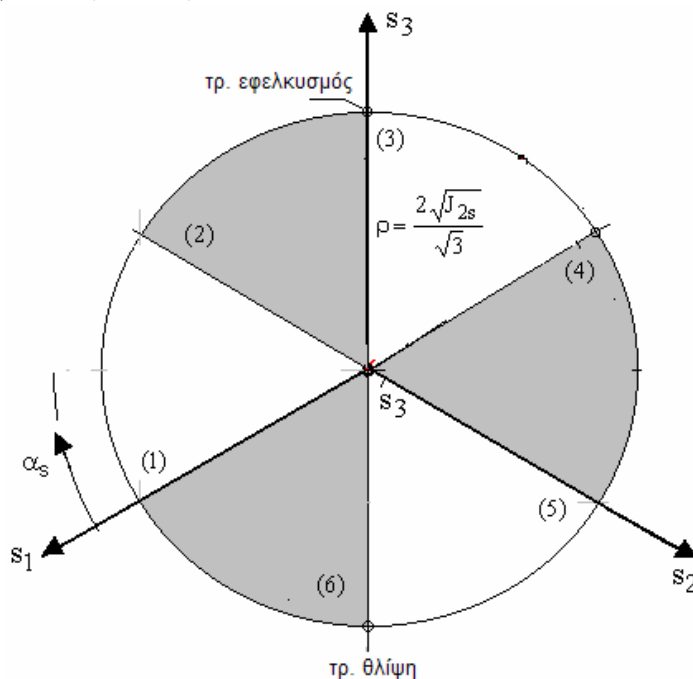
οπότε έχουμε αντιστοιχως τις εξής εκφράσεις για τις αναλλοιώτες:

$$\rho = \frac{1}{3} I_{1\sigma} = \frac{1}{3} (2\sigma_1 + \sigma_3) \quad , \quad T = \sqrt{J_{2s}} = \sqrt{\frac{1}{2} (s_1^2 + s_2^2 + s_3^2)} = \frac{1}{\sqrt{3}} |\sigma_3 - \sigma_1|$$

$$s_1 = \frac{2T}{\sqrt{3}} \cos\left(5\frac{\pi}{3}\right) = \frac{T}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3} |\sigma_3 - \sigma_1|$$

$$s_2 = -\frac{2T}{\sqrt{3}} \cos\left(\frac{\pi}{3} - 5\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{3} |\sigma_3 - \sigma_1|$$

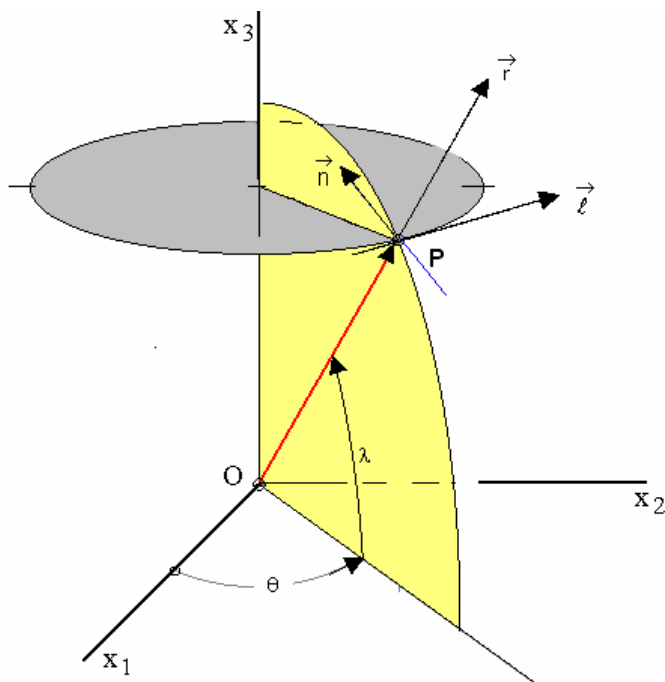
$$s_3 = -\frac{2T}{\sqrt{3}} \cos\left(\frac{\pi}{3} + 5\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{2}{3} |\sigma_3 - \sigma_1|$$



$$(5): 4\pi/3 \leq \alpha_s \leq 5\pi/3 \quad (s_3 \leq s_1 \leq s_2)$$

$$(6): 5\pi/3 \leq \alpha_s \leq 2\pi \quad (s_3 \leq s_2 \leq s_1)$$

Για τη γεωμετρική παράσταση των τριαξονικών εντατικών καταστάσεων εισάγουμε τις αντίστοιχες σφαιρικές συντεταγμένες¹⁶ του διανύσματος θέσεως \vec{OP} της θεωρούμενης εντατικής καταστάσεως.



Συγκεκριμένα οι τριαξονικές θλίψεις παρίστανται στο λεγόμενο επίπεδο *Rendulic*, που είναι εκείνο το επίπεδο που περιέχει την τασική διαγώνιο $\sigma_1 = \sigma_2$ στο επίπεδο $\sigma_3 = 0$ καθώς και τον άξονα $O\sigma_3$. Στο επίπεδο αυτό το γεωγραφικό πλάτος του διανύσματος θέσεως της εντατικής καταστάσεως ορίζεται ως εξής:

$$\lambda_\sigma = \lambda_0 + \eta_\sigma$$

όπου

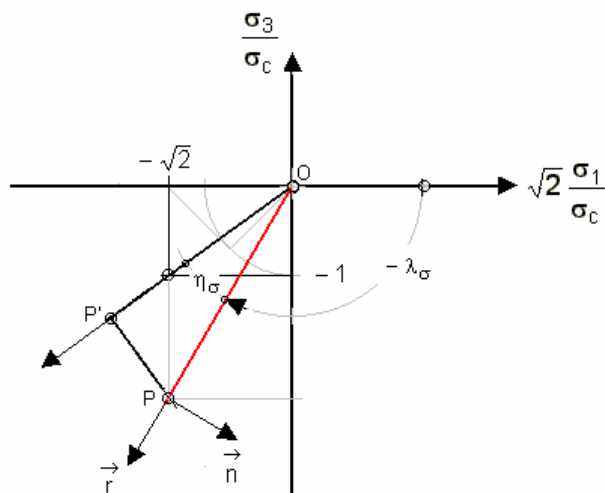
$$\tan \eta_\sigma = \frac{PP'}{OP'} = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{T}{|\rho|}$$

και

$$\lambda_0 = -\frac{\pi}{2} - a \tan \sqrt{2} \quad (\lambda_0 \approx -144.74^\circ)$$

¹⁶ Η γωνία λ , καλείται «γεωγραφικό πλάτος» και η γωνία θ καλείται «γεωγραφικό μήκος». Το τυχόν σημείο P πάνω στη σφαίρα βρίσκεται στην τομή ενός «παράλληλου κύκλου», $\lambda = \text{σταθ.}$ και ενός «μεσημβρινού», $\theta = \text{σταθ.}$ Οι τιμές αυτές των γωνιών λ και θ συνιστούν εν προκειμένω τις «καμπυλόγραμμες» (και δη τις σφαιρικές) συντεταγμένες του σημείου P.

είναι το γεωγραφικό πλάτος της χωροδιαγωνίου.



Αντιστοίχως σε ορισμένες εφαρμογές θα χρειασθεί να κάνουμε χρήση του μοναδιαίου διανύσματος \vec{r} στη κατεύθυνση το διανύσματος θέσεως της εντατικής \vec{OP} ,

$$\vec{r} = \frac{\vec{OP}}{(OP)} \quad , \quad \begin{aligned} r_1 &= \cos \lambda_\sigma \cos \theta_\sigma \\ r_2 &= \cos \lambda_\sigma \sin \theta_\sigma \\ r_3 &= \sin \lambda_\sigma \end{aligned}$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι το γεωγραφικό μήκος του επίπεδου Rendulic είναι

$$\theta = \pi/4$$

παίρνουμε εμπροκειμένω ότι

$$r_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \lambda_\sigma \quad , \quad r_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \lambda_\sigma \quad , \quad r_3 = \sin \lambda_\sigma$$

Π.χ. μία αναλογική¹⁷ συνέχιση της θλιπτικής τριαξονικής καταπόνησεως χαρακτηρίζεται από την εξής απλή συνθήκη

$$\Delta \sigma_i = r_i \Delta \sigma$$

Στο επίπεδο Rendulic θα ορίσουμε επίσης και το μοναδιαίο διάνυσμα \vec{n} , που είναι κάθετο στο διάγραμμα \vec{r} και που δείχνει προς τα «έξω»,

¹⁷ Αγγλ. *proportional loading*

$$n_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \sin \lambda_\sigma, \quad n_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \sin \lambda_\sigma, \quad n_3 = \cos \lambda_\sigma$$

Παρατηρούμε ότι για τη τιμή for $\lambda_\sigma = \lambda_0$ παίρνουμε από τους παραπάνω τύπους τις καρτεσιές συνιστώσες των μοναδιαίων εκείνων διανυσμάτων που είναι αντιστοίχως παρράλληλα και κάθετα προς τη χωροδιαγώνιο.

Μια συνέχιση της φορτίσεως κατά τη κατεύθυνση του \vec{n} , θα κληθεί μιά *εφαπτομενική*¹⁸ φόρτιση,

$$\Delta\sigma_i = n_i \Delta\sigma$$

Τέλος θα ορίσουμε και το μοναδιαίο διάνυσμα $\vec{\ell}$, που είναι κάθετο στο επίπεδο Rendulic, έτσι ώστε το σύστημα $\left\{ \vec{r}, \vec{\ell}, \vec{n} \right\}$ να είναι δεξιόστροφο:

$$\vec{\ell} = -\vec{r} \times \vec{n} = - \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ r_1 & r_2 & r_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{vmatrix} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{j}$$

Με τη βοήθεια των παραπάνω ορισμών μπορούμε π.χ. να περιγράψουμε την συνέχιση μιάς τριαξονικής θλίψεως έξω από το επίπεδο Rendulic, έτσι ώστε οι μόν κύριοι άξονες του ταυστή των τάσεων να μη στρέφονται αλλά να εγκταλείπεται η συνθήκη αξονικής συμμετρίας. Μιά τέτοια φόρτιση λέγεται *ομοαξονική πλάγια φόρτιση*¹⁹ της εντάσεως

$$\Delta\sigma_i = \Delta\sigma \ell_i \quad (\Delta\sigma > 0)$$

ή

$$\Delta\sigma_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Delta\sigma, \quad \Delta\sigma_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \Delta\sigma, \quad \Delta\sigma_3 = 0$$

¹⁸ Αγγλ. *tangential loading*

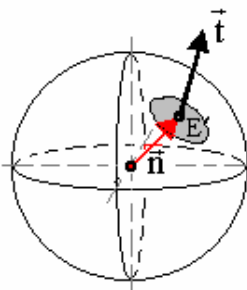
¹⁹ Αγγλ. *coaxial loading to the side*

5.4 Η Φυσική Ερμηνεία των Αναλλοίωτων του Τανυστή των Τάσεων

Θεωρούμε τη σχέση που συνδέει την τάση με τον ελκυστή t_j , που δρά σε επίπεδο με μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα n_i , διερχόμενου δια του εν λόγω σημείου έχουμε

$$t_j = \sigma_{ij}n_i$$

Οι παραπάνω έκφραση μας επιτρέπει να υπολογίσουμε τον ελκυστή των τάσεων για κάθε επιλογή του μοναδιαίου διανύσματος n_i . Για να επεξηγήσουμε το φυσικό νόημα της θεμελιώδους αυτής της διαδικασίας μεταφέρουμε νοερά σε μία κοινή αρχή στον R^3 όλα τα διανύσματα n_k που ορίζουν ως εκ τούτου μία μοναδιαία σφαίρα. Η ακτίνα θέσεως n_k ορίζει στη σφαίρα το εκάστοτε σημείο E' . Στο σημείο αυτό E' προσάπτουμε τον ελκυστή t_j . Άρα σε κάθε δεδομένη εντακτική κατάσταση θα αντιστοιχεί μία κατανομή των διανυσμάτων t_j πάνω στη μοναδιαία σφαίρα.



Με αυτό το σκεπτικό μπορεί κανείς να αναρωτηθεί π.χ. ποιά να είναι άραγε η τιμή του μέσου ορθού ελκυστή πάνω στη μοναδιαία σφαίρα ή ποια να είναι η τιμή του μέσου διαμηθικού ελκυστή, που αντιστοιχεί σ' όλες τις πιθανές κατευθύνσεις n_i . Για να απαντήσουμε στα ερωτήματα αυτά υπολογίζουμε κατ' αρχήν ένα **βαθμωτό** μέγεθος

$$t^n = t_i n_i$$

που αντιστοιχεί στην ορθή συνιστώσα του ελκυστή στο σημείο E' , που με τη σειρά του αντιστοιχεί στο μοναδιαίο διάνυσμα n_i . Ας υπολογίσουμε τώρα τη μέση ορθή τάση για όλες τις κατευθύνσεις n_i ,

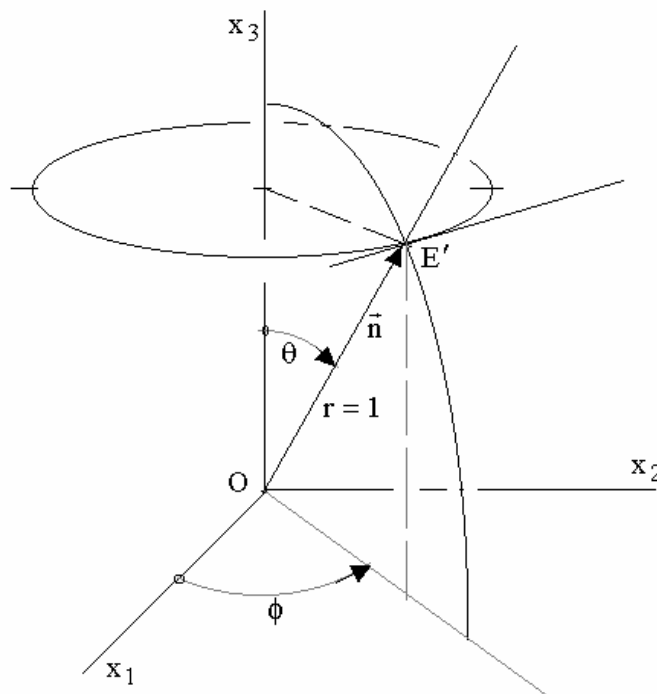
$$p = \langle t^n \rangle$$

όπου η μέση τιμή υπολογίζεται πάνω στη μοναδιαία σφαίρα ως εξής:

$$\langle t^n \rangle = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi t^n \sin\theta d\theta d\phi$$

$r = 1, \theta$ και ϕ είναι σφαιρικές συντεταγμένες του σημείου E' . Παρατηρούμε ότι οι καρτεσιανές συντεταγμένες του τυχόντος διανύσματος $\vec{OE}' = \vec{n}$ πάνω στη μοναδιαία σφαίρα μπορούν να εκφραστούν ως συναρτήσεις των σφαιρικών συντεταγμένων του σημείου E'

$$n_1 = \sin\theta \cos\phi, \quad n_2 = \sin\theta \sin\phi, \quad n_3 = \cos\theta$$



Ισχύουν δε οι παρακάτω σχέσεις (γιατί):

$$\langle n_i n_j \rangle = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi n_i n_j \sin\theta d\theta d\phi = \frac{1}{3} \delta_{ij}$$

$$\langle n_i n_j n_k \rangle = 0$$

$$\langle n_i n_j n_k n_l \rangle = \frac{1}{3 \cdot 5} (\delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) = \frac{1}{3 \cdot 5} \delta_{ijkl}$$

$$\langle n_i n_j n_k n_l n_m \rangle = 0$$

$$\langle n_i n_j n_k n_l n_m n_n \rangle = \frac{1}{3 \cdot 5 \cdot 7} (\delta_{in} \delta_{jklm} + \delta_{jn} \delta_{klmi} + \delta_{kn} \delta_{lmij} + \delta_{ln} \delta_{mijk} + \delta_{mn} \delta_{ijkl}) = \frac{1}{3 \cdot 5 \cdot 7} \delta_{ijklmn}$$

Άρα

$$\rho = \langle t^n \rangle = \langle \sigma_{ji} n_j n_i \rangle = \sigma_{ji} \langle n_j n_i \rangle = \frac{1}{3} \sigma_{ij} \delta_{ij} = \frac{1}{3} \sigma_{kk}$$

Ο παραπάνω υπολογισμός δείχνει ότι: η 1^η αναλλοίωτος του τανυστή των τάσεων συνδέεται με την μέση ορθή τάση,

$$\underline{\rho = \langle t^n \rangle = \frac{1}{3} I_{1\sigma}}$$

Στη συνέχεια ορίζουμε ένα **διανυσματικό** μέγεθος,

$$t_i^t = t_i - t^n n_i$$

το **διατμητικό ελκυστή**, που ασκείται στη στοιχειώδη επιφάνεια με κέντρο το σημείο Ε' και με μοναδιαίο εξωτερικό διάνυσμα n_i .

Αναλόγως με τον παραπάνω υπολογισμό βρίσκουμε ότι η 2^η αναλλοίωτος του αποκλίνοντα τανυστή των τάσεων, συνδέεται με τη μέση διατμητική τάση

$$\tau_{\text{mean}} = \sqrt{\langle t_i^{(t)} t_i^{(t)} \rangle} = \sqrt{\frac{2}{5} J_{2s}}$$

Για το λόγο αυτό στη βιβλιογραφία η ποσότητα,

$$\underline{T = \sqrt{J_{2s}} \Rightarrow T = \sqrt{\frac{5}{2}} \tau_{\text{mean}}}$$

ονομάζεται **ένταση διατμητικής τάσεως**²⁰.

Παρατηρούμε ότι η 3^η τρίτη αναλλοίωτος του τανυστή των τάσεων δεν έχει απλή στατιστική ερμηνεία²¹. Στη συνέχεια θα δώσουμε μια εναλλακτική προσέγγιση για τη φυσική σημασία της 3^{ης} αναλλοίωτης του τανυστή των τάσεων.

²⁰ Αγγλ. *shearing stress intensity*

²¹ Πρβλ. Ι. Vardoulakis and J. Sulem, *Bifurcation Analysis in Geomechanics*, Blackie Academic and Professional, Sect. 6.3.1, 1995.

Η γωνία Lode α_s ή η ισοδύναμη προς αυτή παράμετρος Lode L_σ , εκφράζουν την απόκλιση της μέγιστης διατμητικής τάσης από τη μέση διατμητική τάση,

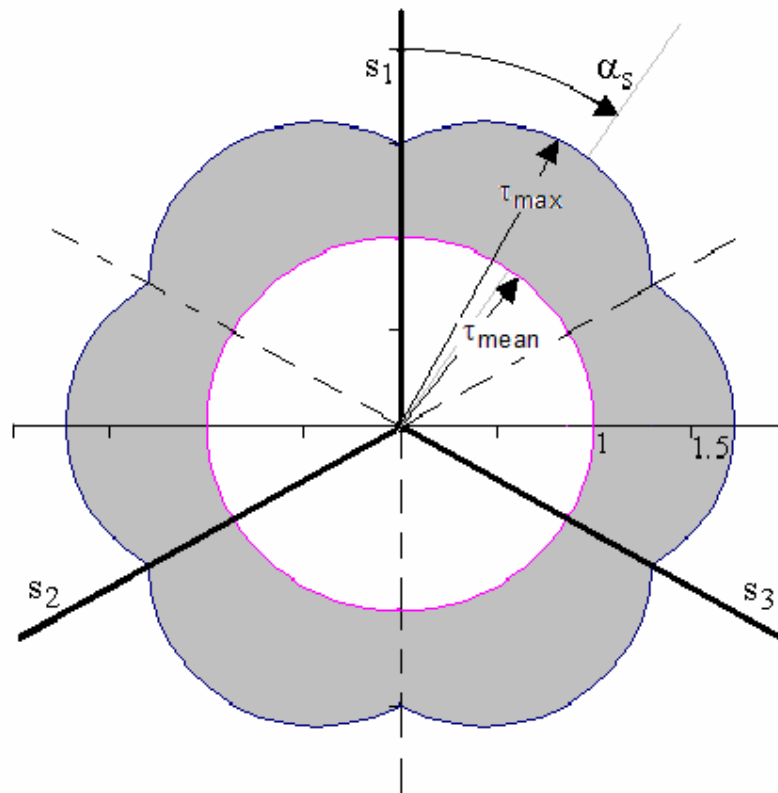
$$\frac{\tau_{1,\max}}{\tau_{\text{mean}}} = \frac{|\sigma_2 - \sigma_3|/2}{\tau_{\text{mean}}} = \sqrt{\frac{5}{2}} |\sin(\alpha_s)|$$

$$\frac{\tau_{2,\max}}{\tau_{\text{mean}}} = \frac{|\sigma_3 - \sigma_1|/2}{\tau_{\text{mean}}} = \sqrt{\frac{5}{2}} |\sin(\pi/3 - \alpha_s)|$$

$$\frac{\tau_{3,\max}}{\tau_{\text{mean}}} = \frac{|\sigma_1 - \sigma_2|/2}{\tau_{\text{mean}}} = \sqrt{\frac{5}{2}} |\sin(\pi/3 + \alpha_s)|$$

όπου

$$\tau_{\text{mean}} = \sqrt{\frac{2}{5}} J_{2s} = \sqrt{\frac{2}{5}} T$$



Απο τις εκφράσεις αυτές προκύπτει ότι η απόκλιση μεταξύ μέγιστης και μέσης διατμητικής τάσης είναι συνάρτηση της γωνίας α_s στο αποκλίνον επίπεδο. Παρατηρούμε ότι η ελάχιστη απόκλιση μεταξύ μέγιστης και μέσης διατμητικής τάσης παρατηρείται στις πρίπτωσεις του τριαξονικού εφελκυσμού και της τριαξονικής θλίψεως:

$$\left. \frac{\tau_{\max}}{\tau_{\text{mean}}} \right|_{\min} = \sqrt{\frac{5}{2}} \sin(\pi/3) = \sqrt{\frac{5}{2}} \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{\frac{15}{8}} \approx 1.37$$

Η μέγιστη απόκλιση παρατηρείται π.χ. στο 1° εκτιμόριο για τη τιμή $\alpha_{s0} = \pi/6$:

$$\left. \frac{\tau_{\max}}{\tau_{\text{mean}}} \right|_{\max} = \sqrt{\frac{5}{2}} \sin(\pi/3 + \pi/6) = \sqrt{\frac{5}{2}} \approx 1.58$$

Στην περίπτωση αυτή έχουμε ότι η ενδιάμεση κύρια τάση ισούται με τη μέση τιμή των δύο άλλων κύριων τάσεων:

$$L_\sigma = 2 \frac{\sigma_3 - \sigma_2}{\sigma_1 - \sigma_2} - 1 = 0 \Rightarrow \sigma_3 = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) \quad (\sigma_2 \leq \sigma_3 \leq \sigma_1)$$

Παρατηρούμε ότι η τιμή $\alpha_{s0} = \pi/6$ χαρακτηρίζει κατά προσέγγιση τις λεγόμενες επίπεδες παραμορφώσεις.

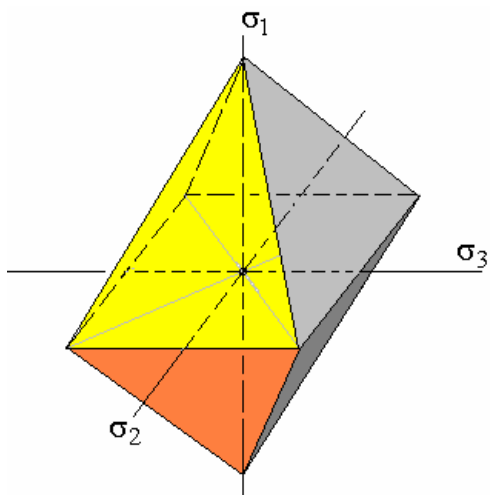
Ασκήσεις

1. Να αποδειχθεί ότι σε σύστημα κυρίων αξόνων η ορθή και διατμητική συνιστώσα του ελκυστή των τάσεων σε ένα επίπεδο με μοναδιαίο εξωτερικό διάνυσμα n_i υπολογίζονται από τις παρακάτω σχέσεις:

$$t^n = \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2$$

$$t^t = \sqrt{\sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2 - (\sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2)^2}$$

2. Το *οκταεδρικό επίπεδο* είναι εκείνο το επίπεδο, το οποίο σχηματίζει ίσες γωνίες με τους άξονες των κυρίων τάσεων. Σε σύστημα κυρίων αξόνων αναγνωρίζουμε 8 τέτοια επίπεδα:



5.

$$\{\bar{n}^{(1)}\}^T = \frac{1}{\sqrt{3}} \{1,1,1\} \quad , \quad \{\bar{n}^{(2)}\}^T = \frac{1}{\sqrt{3}} \{1,1,-1\} \quad , \dots$$

Η ορθή και διαμητική συνιστώσα του ελκυστή των τάσεων σε ένα οκταεδρικό επίπεδο

$$\sigma_{\text{oct}} = \mathbf{t}_{\text{oct}}^n \quad , \quad \tau_{\text{oct}} = \mathbf{t}_{\text{oct}}^t$$

Να αποδειχθεί ότι η σ_{oct} ισούται με το αριθμητικό μέσο των ορθών τάσεων

$$\sigma_{\text{oct}} = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{1}{3}I_{1\sigma} = p \quad \text{ή} \quad \underline{\underline{\sigma_{\text{oct}} = \frac{1}{3}I_{1\sigma} = p}}$$

και ότι τ_{oct} ισούται με το γεωμετρικό μέσο των μέγιστων διαμητικών τάσεων

$$\begin{aligned} \tau_{\text{oct}} &= \sqrt{\frac{1}{3}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - \frac{1}{3^2}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2} \\ &= \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \end{aligned}$$

ή

$$\underline{\underline{\tau_{\text{oct}} = \sqrt{\frac{2}{3}}J_{2s} = \sqrt{\frac{5}{3}}\tau_m}}$$

3. Για την εντατική κατάσταση,

$$[\bar{\sigma}] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix} \text{ [MPa]}$$

Να υπολογισθούν :

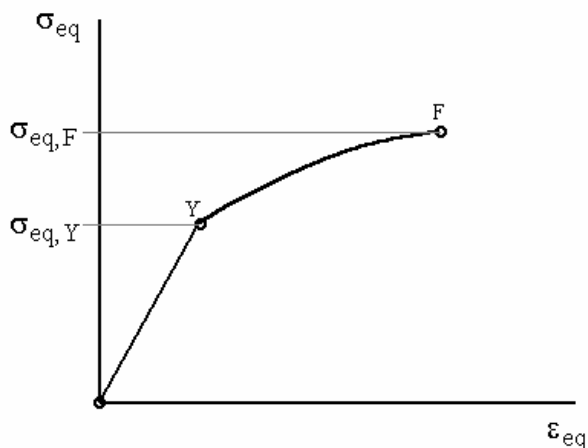
- i. Οι κύριες τάσεις και κατευθύνσεις.
- ii. Η μέση ορθή και μέση διατμητική τάση.
- iii. Οι οκτεδρικές τάσεις και τα αντίστοιχα διανύσματα $\bar{n}^{(\alpha)}$ ($\alpha=1, \dots, 8$),
- iv. Η μέγιστη διατμητική τάση και το επίπεδο πάνω στο οποίο αυτή δρα.
- v. Η αναλλοίωτη γωνία α_s

Να επαληθευθεί στο αντίστοιχο διάγραμμα στο επίπεδο (π) η σχέση

$$\tau_{\max} = f(\alpha_s)\tau_m$$

5.5 Τα Κριτήρια Αστοχίας κατά Tresca και v. Mises

Στη βάση των παραπάνω ορισμών ανευρίσκουμε στη βιβλιογραφία μια σειρά κριτηρίων για τη διαρροή²² ή την αστοχία²³ των υλικών. Αν και οι έννοιες της διαρροής και αστοχίας συνήθως δεν επεξηγούνται ικανοποιητικά, συναρτώνται συνήθως με το τέλος της ελαστικής συμπεριφοράς και την αντοχή ενός υλικού, όπως αυτά προσδιορίζονται πειραματικά σε δοκίμια από το ίδιο το υλικό.



Π.χ. σε ένα μονοαξονικό πείραμα θλίψεως οι τάσεις διαρροής και αστοχίας σ_Y και σ_F ταυτίζονται με τις αντίστοιχες τιμές της αξονικής τάσεως στο σημείο διαρροής (Y)

²² Αγγλ. *yield*

²³ Αγγλ. *failure*

και στο σημείο αστοχίας (F), στο διάγραμμα τάσεων-τροπών. Για τη γενίκευση των εννοιών αυτών σε δι- ή τριδιάστατες εντατικές καταστάσεις, οι τάσεις αστοχίας μεταφράζονται σε αντίστοιχες αναλλοίωτες του τανυστή των τάσεων, που συνήθως καλούνται *ισοδύναμες τάσεις*²⁴. Για όλκιμα υλικά (π.χ. μέταλλα) έχουν προταθεί τα κάτωθι κριτήρια:

- **Κριτήριο Tresca:** Η ισοδύναμη τάση ταυτίζεται με τη μέγιστη διατμητική τάση

$$\sigma_{eq}^T = \tau_{max}$$

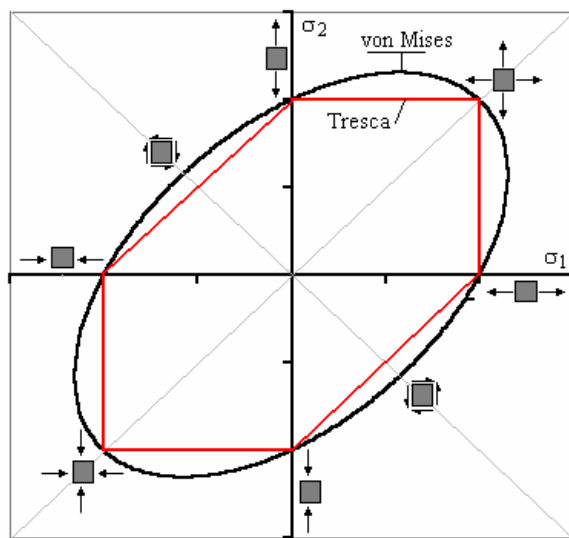
- **Κριτήριο von Mises:** Η ισοδύναμη τάση ταυτίζεται με την οκταεδρική διατμητική τάση (δηλ. με τη μέση διατμητική τάση)

$$\sigma_{eq}^M = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$$

Στην ειδική περίπτωση επίπεδης εντατικής κατάστασης ($\sigma_3 = 0$, π.χ. σε ελάσματα) έχουμε αντιστοίχως

$$\sigma_{eq}^T = \max\left(\frac{1}{2}|\sigma_1 - \sigma_2|, \frac{1}{2}|\sigma_1 - 0|, \frac{1}{2}|\sigma_2 - 0|\right)$$

$$\sigma_{eq}^M = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22} + 3\sigma_{12}^2}$$



²⁴ Αγγλ. *equivalent stresses*

Άσκηση

Δίδονται οι εντατικές καταστάσεις

$$\left[\bar{\sigma}^{(1)} \right] = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ [MPa]}$$

$$\left[\bar{\sigma}^{(2)} \right] = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \text{ [MPa]}$$

Να προσδιοριστεί ποία από αυτές τις καταστάσεις είναι πιο «κρίσιμη», αν ισχύουν διαδοχικά τα κάτωθι κριτήρια διαρροής (ή αστοχίας):

Μια εντατική κατάσταση (1) είναι κρισιμότερη μίας άλλης (2) εφόσον,

1. Η ορθή οκταεδρική τάση, $\left| \sigma_{\text{oct}}^{(1)} \right| > \left| \sigma_{\text{oct}}^{(2)} \right|$.
2. Η διατμητική οκταεδρική τάση, $\tau_{\text{oct}}^{(1)} > \tau_{\text{oct}}^{(2)}$.
3. Η μέγιστη διατμητική τάση, $\tau_{\text{max}}^{(1)} > \tau_{\text{max}}^{(2)}$.

5.6 Η Πλαστική Συμπεριφορά Υλικών

5.6.1 Διαχωρισμός της τροπής

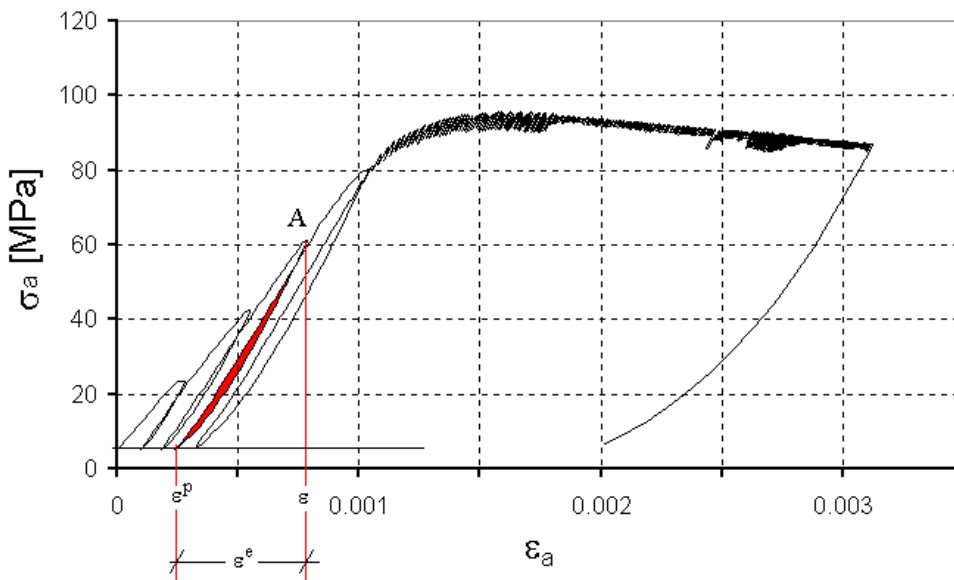
Από φαινομενολογική σκοπιά τα πραγματικά υλικά εμφανίζουν κατ' εξοχήν μη-γραμμική συμπεριφορά καθώς και μη-αντιστρεπτές παραμορφώσεις, γεγονός που αναγνωρίζεται στο πείραμα φόρτισης–αποφόρτισης. Όπως φαίνεται και στο παρακάτω γράφημα η συμπεριφορά του υλικού (μαρμάρου εν προκειμένω) είναι ριζικά διαφορετική στον κλάδο φόρτισης από ότι είναι στον κλάδο αποφόρτισης/επαναφόρτισης. Επίσης οι τροπές κατά την αποφόρτιση υστερούν εκείνων κατά την φόρτιση, δηλαδή το υλικό δεν είναι ελαστικό. Αν ε είναι η ολική τροπή μέχρι κάποιο σημείο A στη καμπύλη φόρτισης, τότε το πείραμα αποφόρτισης μας δείχνει ότι μόνο ένα μέρος αυτής της τροπής, έστω ε^e η λεγόμενη και *ελαστική τροπή*²⁵, είναι αντιστρεπτή. Η *παραμένουσα τροπή* ε^p καλείται και *πλαστική τροπή*²⁶,

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p$$

²⁵ Αγγλ. *elastic*

²⁶ Πλάσσω (αρχ.): μορφώνω, διαπλάθω, σχηματίζω (Liddle and Scott's, *Greek-English Lexicon*, Calendron Press 1889: *πλάσσω*= to form, mould, shape). (αρχ.) επιθ.: πλαστικός. Αγγλ. *plastic*.

MT2: Μάρμαρο Διονύσου. Τριαξονική θλίψη
 (αξονική τάση - αξονική τροπή, $\sigma_c=5$. MPa)



Η θεωρία πλαστικής ροής²⁷ βασίζεται στην υπόθεση ότι δεν μπορούμε να διατυπώσουμε καταστατικές εξισώσεις που να αφορούν πεπερασμένες παραμορφώσεις, όπως κάναμε στη περίπτωση ελαστικών και υπερ-ελαστικών υλικών. Πράγματι, η συμπεριφορά ενός πραγματικού υλικού δεν εξαρτάται μόνο από την τρέχουσα τιμή της τάσεως, όπως υποθέτουμε ότι συμβαίνει στα ελαστικά υλικά, αλλά εξαρτάται και από την «ιστορία» της παραμορφώσεως. Για το λόγο αυτό οι εξισώσεις της θεωρίας πλαστικής ροής θα διατυπωθούν ως σχέσεις μεταξύ των ρυθμών τάσεων και τροπών, και θα έχουν τη μορφή *εξελικτικών εξισώσεων*^{28,29}

$$\dot{\sigma} = f(\sigma, \dots, \mathbf{D})$$

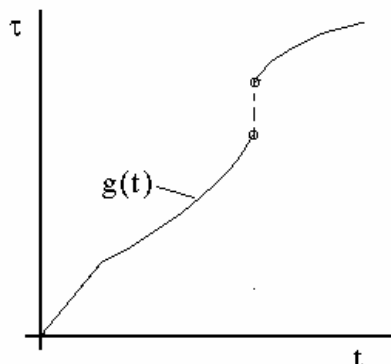
Θα περιορισθούμε εδώ σε υλικά που συμπεριφέρονται αμιγώς ανεξάρτητα της ταχύτητας παραμορφώσεως³⁰. Στην περίπτωση αυτή η οποιαδήποτε αλλαγή στη ταχύτητα φορτίσεως, που αντιστοιχεί σε κάποιο μετασχηματισμό της χρονικής μεταβλητής της μορφής, $\tau = g(t)$, αφήνει αναλλοίωτη την παραπάνω καταστατική εξίσωση για το ρυθμό της τάσης.

²⁷ Αγγλ. *theory of plastic flow*.

²⁸ Αγγλ. *evolution equations*

²⁹ Οι τελείες στη λίστα των μεταβλητών σημαίνουν εξάρτηση του ρυθμού της τάσεως και από μία σειρά παραμέτρων (εσωτερικών μεταβλητών), που περιγράφουν την «ιστορία» της παραμορφώσεως.

³⁰ Αγγλ. *rate independent materials*. Τα ανεξάρτητα της ταχύτητας παραμορφώσεως υλικά συνιστούν μία μαθηματική εξιδανίκευση και μία οριακή συμπεριφορά. Γενικώς πραγματικά υλικά συμπεριφέρονται διαφορετικά όταν η ταχύτητα παραμορφώσεως αλλάζει. Μια τέτοια συμπεριφορά καλείται ιξοδοελαστική ή «ιξοδοπλαστική» (*visco-elastic, visco-plastic*). Πρβλ. P.Perzyna (1963). The constitutive equations for rate sensitive plastic materials. *Q. Appl. Math.*, Vol. 20, 321-332).



Αυτό όμως σημαίνει ότι η $\dot{\sigma}$ θα είναι μια ομογενής 1^{ου} βαθμού γραμμική ή μη-γραμμική συνάρτηση του ρυθμού παραμορφώσεως, π.χ. μια συνάρτηση της μορφής,

$$\dot{\sigma} = \mathbf{C} : \mathbf{D} + \mathbf{A} \|\mathbf{D}\| + \dots$$

Ένας τέτοιος γενικός νόμος καλείται *υπο-πλαστικός*³¹ και αφορά γενικώς σε μια μη-γραμμική εξάρτηση του ρυθμού της τάσεως από τον ρυθμό της παραμορφώσεως. Λόγω της ανεξαρτησίας από την ταχύτητα παραμορφώσεως, στη συνέχεια θα χρησιμοποιούμε αδιακρίτως είτε το ρυθμό μεταβολής μιας ποσότητας είτε την απειροστική της μεταβολή. Έτσι ο παραπάνω διαχωρισμός της τροπής σε ελαστικό και πλαστικό μέρος θα γραφεί είτε για τον ρυθμό παραμορφώσεως είτε για τη μεταβολή της απειροστικής τροπής,

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}^e + \mathbf{D}^p \quad , \quad \Delta \varepsilon = \Delta \varepsilon^e + \Delta \varepsilon^p$$

Παρατηρούμε τέλος ότι για τις ελαστικές τροπές θα δεχθούμε γενικώς ότι ισχύει ένας *υπο-ελαστικός* νόμος, της μορφής,

$$\dot{\sigma} = \mathbf{C}^e : \mathbf{D}^e$$

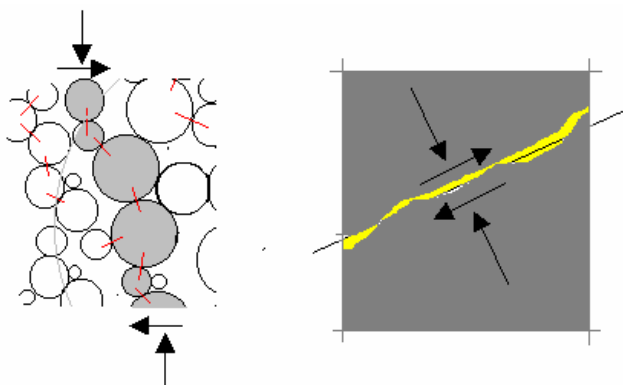
5.6.2 Συνθήκη διαρροής

Η ιδιότητα η οποία διακρίνει τα λεγόμενα *γεωυλικά*³², όπως π.χ. τα εδάφη, τα πετρώματα και τα σκυροδέματα, από άλλα υλικά, όπως π.χ. τα μέταλλα, είναι η προεξάρχουσα ευαισθησία τους στην επιβαλλόμενη μέση ορθή τάση³³, η οποία αποδίδεται στην ύπαρξη εσωτερικής τριβής. Η εσωτερική τριβή αναπτύσσεται σε μικρο-δομικό επίπεδο είτε μεταξύ κόκκων είτε στα χείλη εσωτερικών μικρορωγμών, τυχαία κατανεμημένων μέσα στον (REV).

³¹ W. Wu, E. Bauer and D. Kolymbas (1996). Hypoplastic constitutive model with critical state for granular materials. *Mechanics of Materials*, Vol. 23, 45-69.

³² Αγγλ. *geomaterials*

³³ Αγγλ. *pressure sensitivity*



Για υλικά ευαίσθητα στη μέση ορθή τάση³⁴ και υπό καθεστώς συνεχιζόμενης φόρτισης η ένταση διατμητικής τάσης $T = \sqrt{J_{2s}}$ συναρτάται με τη μέση ορθή θλιπτική τάση $p = I_{1\sigma} / 3$. Υπο μορφή καταστατικής εξισώσεως προτείνουμε αντίστοιχα ένα περιορισμό, που θα ονομάσουμε *συνθήκη διαρροής*³⁵, π.χ. μία σχέση της μορφής³⁶

$$T + f p = 0$$

όπου

$$f = \frac{c}{|p|} + f_C [1 + c_1 |p| + \dots] \quad (5.20)$$

c είναι η *συνεκτικότητα*³⁷ και f_C είναι συντελεστής *εσωτερικής τριβής*³⁸ του υλικού. Σε πρώτη προσέγγιση για ένα υλικό τύπου *Coulomb* έχουμε ότι η συνθήκη διαρροής είναι γραμμική ως προς p

$$T \approx c - f_C p$$

Από την παραπάνω καταστατική Εξ. (5.20) προκύπτει ότι κάτω από αρκετά μεγάλες πιέσεις τα γεωυλικά συμπεριφέρονται ως αμιγώς μη-συνεκτικά υλικά,

$$T \approx -f_C p \quad (p < 0, c \ll |p|)$$

Ένα κοκκώδες υλικό, όπως η άμμος, είναι ένα τυπικό παράδειγμα ενός μη-συνεκτικού υλικού (*τριβώδους*³⁹). Παρατηρούμε τέλος ότι πολλά προσομοιώματα τεκτονικών μακρο-δομών, όπως τα γεωλογικά ρήγματα (όπου στη πραγματικότητα οι γεωστατικές τάσεις είναι πολύ μεγάλες), πραγματοποιούνται στο εργαστήριο

³⁴ Αγγλ. *pressure-sensitive materials*

³⁵ Αγγλ. *yield condition*

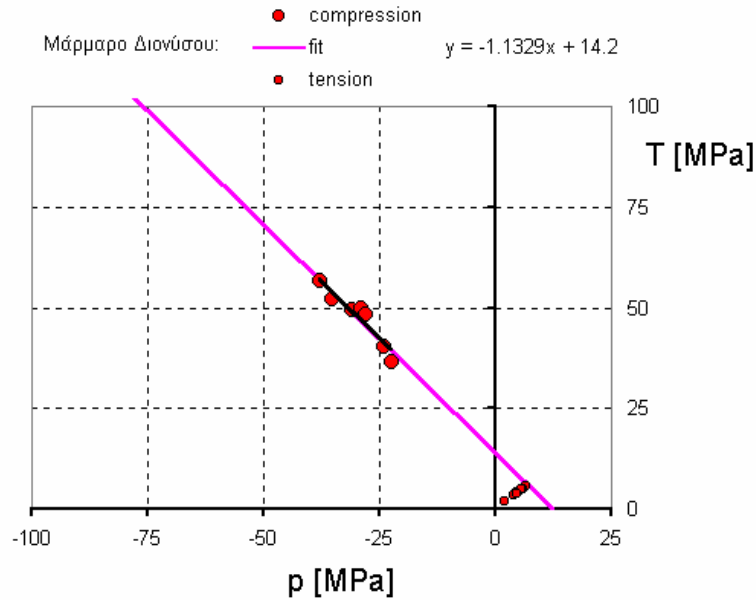
³⁶ Θλιπτικές τάσεις λαμβάνονται με αρνητικό πρόσημο.

³⁷ Αγγλ. *cohesion*

³⁸ Αγγλ. *coefficient of internal friction*

³⁹ Αγγλ. *frictional*

υπό κλίμακα με μη-συνεκτική ή ελαφρώς συνεκτική άμμο κάτω από συνθήκες κανονικής βαρύτητας^{40,41}.



Προσομοίωμα τεκτονικού ρήγματος στο εργαστήριο με τη βοήθεια ξηρής άμμου. Οι λωρίδες χρωματισμένης άμμου δείχνουν καθαρά τη γεωμετρική μορφή των ημικατακόρυφων ρηγμάτων που προκαλούνται από μία έντονη βύθιση της βάσης (μηχανισμός καταπακτής, trap – door mechanism).

⁴⁰ M.K.. Hubbert, *Mechanics of deformation of crustal rocks: Historical development*. In: *Mechanical Behavior of Crustal Rocks-The Handin Volume* (Ed. N.L. Carter et al.) American Geophysical Union, 1981, 1-9.

⁴¹ Exadaktylos, G.E., Vardoulakis, I. Stavropoulou, M.C. and Tsombos, P. (2003). Analogue and numerical modelling of normal fault patterns produced due to slip along a detachment zone. *Tectonophysics* 376, 117–134.

5.6.3 Ο νόμος πλαστικής ροής

Ένας απλός τρόπος να συσχετίσουμε την *πλαστική διαρροή* με την *πλαστική ροή* είναι να δούμε την έκφραση για το στοιχειώδες πλαστικό έργο παραμορφώσεως,

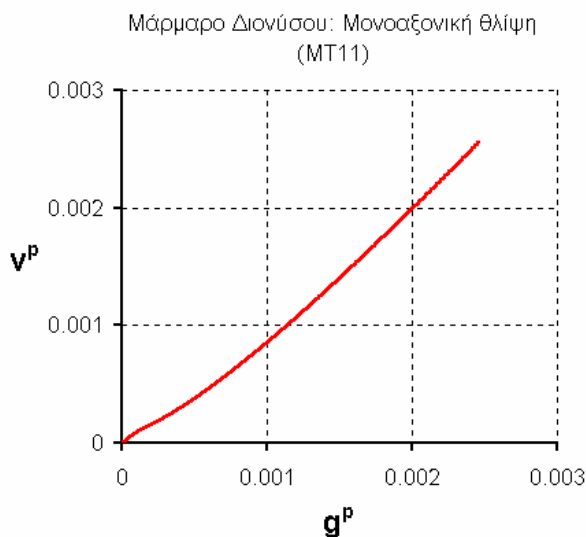
$$\dot{w}^P = \sigma_{ij} D_{ij}^P = \rho \dot{v}^P + T \dot{g}^P$$

Στην έκφραση αυτή \dot{v}^P και \dot{g}^P είναι ο ρυθμός πλαστικής ογκομετρικής παραμορφώσεως και ο ρυθμός πλαστικής διατμητικής παραμορφώσεως, που είναι ενεργειακώς συζυγείς προς την μέση τάση και την ένταση της διατμητικής τάσεως αντιστοίχως.

Στο σημείο αυτό παρατηρούμε ότι τα γεωυλικά εκτός από εσωτερική τριβή, γεωυλικά εμφανίζουν και *πλαστική διασταλτικότητα*⁴², η οποία θεωρείται ως ένας *εσωτερικός περιορισμός* μεταξύ του ρυθμού της πλαστικής ογκομετρικής τροπής $\dot{v}^P = D_{kk}^P$ και του ρυθμού πλαστικής διατμητικής τροπής⁴³ \dot{g}^P

$$\dot{v}^P = d_R \dot{g}^P$$

Ο παραπάνω περιορισμός συνιστά το *νόμο πλαστικής ροής*⁴⁴. Η παράμετρος d_R στη παραπάνω καταστατική εξίσωση καλείται *συντελεστής διασταλτικότητας κατά Reynolds*⁴⁵.



⁴² Αγγλ. *dilatancy*

⁴³ Οι ποσότητα αυτή ορίζεται επακριβώς στο επόμενο κεφάλαιο.

⁴⁴ Αγγλ. *flow rule*

⁴⁵ Αγγλ. *dilatancy coefficient*. Reynolds, O. (1885). On the dilatancy of media composed of rigid particles in contact. With experimental illustrations. *Phil. Mag.* (2) 20, 469-481. Also: Truesdell, C. and Noll, W.: *The Non-Linear Field Theories of Mechanics*, Handbuch der Physik Band III/3, section 119, Springer 1965.

Στην ειδική περίπτωση όπου $d_R = 0$, το υλικό είναι *πλαστικά ασυμπίεστο*,

$$\dot{\nu}^P = 0$$

Γενικώς θα δεχθούμε ότι τόσο οι συντελεστές τριβής και διασταλτικότητας όσο και συνεκτικότητα είναι συναρτήσεις κάποιου παραμέτρου Ψ που εκφράζει τη κατάσταση πλαστικής παραμόρφωσης

$$c = \hat{c}(\dots; \Psi) \quad , \quad f_C = \hat{f}(\dots; \Psi) \quad , \quad d_R = \hat{d}(\dots; \Psi)$$

Λαμβάνοντας υπ' όψη ότι,

$$T \approx c - f_C \rho \quad \text{και} \quad \dot{\nu}^P = d_R \dot{g}^P$$

παίρνουμε

$$\underline{\dot{w}^P = (c + (-\rho)(f_C - d_R))\dot{g}^P}$$

Αυτό σημαίνει ότι από τη σκοπιά της κατανάλωσης έργου παραμορφώσεως, ένα υλικό με εσωτερική τριβή και διασταλτικότητα συμπεριφέρεται ως ένα υλικό με εσωτερική τριβή που παραμορφώνεται ισόχωρα και έχει *ενεργό συντελεστή εσωτερικής τριβής* τη διαφορά

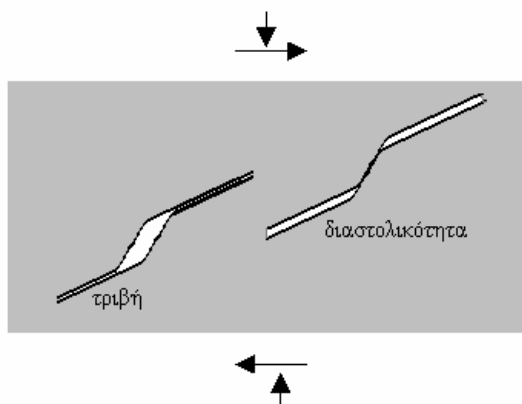
$$\bar{f} = f_C - d_R \quad (5.21)$$

Τα πειραματικά δεδομένα ενισχύουν την υπόθεση ότι ο ενεργοποιημένος συντελεστής τριβής είναι σταθερός

$$\bar{f} = \text{σταθ.} \quad , \quad (5.22)$$

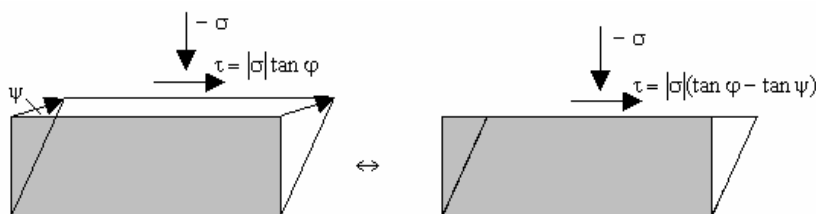
Η παραπάνω σχέση οδηγεί στην γνωστή από την Βραχομηχανική υπόθεση ότι η «αντοχή» ενός πετρώματος εξαρτάται από τη συνεκτικότητα c και την εσωτερική τριβή, που με τη σειρά της συνίσταται σε αντίσταση λόγω τριβής και σε αντίσταση λόγω διαστολικότητας

$$f_C = \bar{f} + d_R$$



Στη περίπτωση απλής, διαστολικής διάτμησης η παραπάνω υπόθεση Εξ. (5.22) εκφράζεται συναρτήσει της γωνίας εσωτερικής τριβής⁴⁶ φ και της γωνίας διαστολικότητας⁴⁷ ψ του υλικού

$$\tan \bar{\varphi} = \tan \varphi - \tan \psi = \text{σταθ.} \quad (5.23)$$



Αυτή η σχέση είναι γνωστή στην Εδαφομηχανική ως η συνθήκη του Taylor⁴⁸. Αξίζει να σημειωθεί ότι τόσο ο Rowe^{49,50} όσο και ο de Josselin de Jong⁵¹ χρησιμοποίησαν την ίδια ιδέα και ονόμασαν την $\bar{\varphi}$ την *πραγματική γωνία τριβής*⁵² και την ταύτισαν με την γωνία τριβής φ_μ μεταξύ των κόκκων ενός κοκκώδους υλικού.

Ένας άλλος τρόπος να δούμε την παραπάνω Εξ. (5.21) είναι να τη λύσουμε ως προς τον συντελεστή διασταλτικότητας,

$$d_R = f_C - \bar{f} \quad (5.24)$$

⁴⁶ Αγγλ. *friction angle*

⁴⁷ Αγγλ. *dilatancy angle*

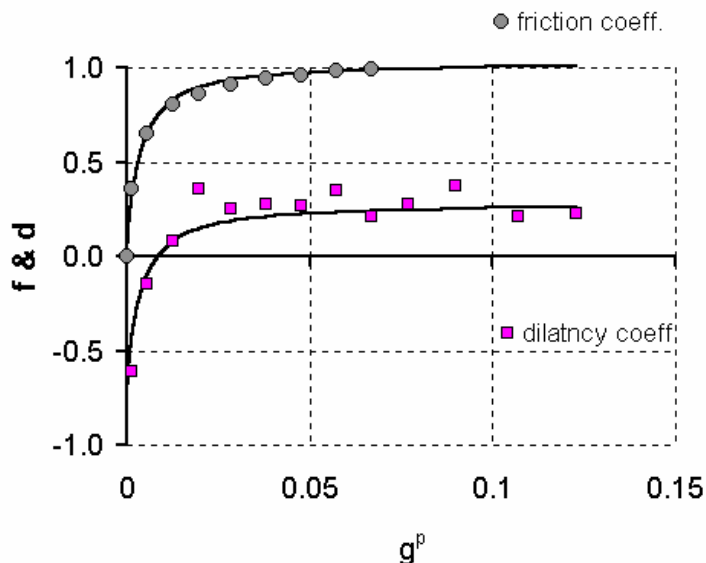
⁴⁸ D.W. Taylor. *Fundamentals of Soil Mechanics*, John Wiley, 1948.

⁴⁹ P.W. Rowe (1962). The stress-dilatancy relation for static equilibrium of an assembly of particles in contact. *Proc. Roy. Soc.*, 269, 500-527.

⁵⁰ P.W. Rowe (1971). Theoretical meaning and observed values of deformation parametrs for soil. *Proc. Roscoe Mem. Symp.*, Cambridge, 143-194.

⁵¹ De Josselin de Jong (1976). Rowe's stress-dilatancy relation based on friction. *Géotechnique*, 26, 527-534.

⁵² Αγγλ. *true angle of friction*



Υπόθεση Taylor: Συντελεστές εσωτερικής τριβής και διαστολικότητας για μία μετρίως πυκνή άμμο σε τριαξονικό πείραμα θλίψης

Η Εξ. (5.24) αποτελεί την απλούστερη γενίκευση της *συνθήκης καθετότητας*⁵³ της κλασικής θεωρίας πλαστικής ροής. Πράγματι σε ένα ισότροπο υλικό οι κύριοι άξονες της τάσεως και του ρυθμού της πλαστικής τροπής συμπίπτουν. Στη περίπτωση αυτή τόσο η συνθήκη διαρροής όσο και ο νόμος πλαστικής ροής παρίστανται στο ίδιο επίπεδο. Στο επίπεδο αυτό και σε κάθε σημείο $\sigma = (p, T)$ της επιφάνειας διαρροής⁵⁴, $F(p, T, \psi) = 0$, προσάπτουμε το αντίστοιχο διάνυσμα ρυθμού πλαστικής παραμόρφωσης⁵⁵. $\dot{\epsilon}^p = (\dot{g}^p, \dot{\nu}^p)^T$. Όταν ισχύει η συνθήκη καθετότητας τότε το διάνυσμα $\dot{\epsilon}^p$ είναι κάθετο στην επιφάνεια διαρροής. Η συνθήκη καθετότητας εκφράζεται εν προκειμένω απλά από την ισότητα συντελεστού τριβής και συντελεστού διαστολικότητας, που οδηγεί σε μηδενικό ενεργό συντελεστή εσωτερικής τριβής,

$$d_R = f_C \Rightarrow \bar{f} = 0$$

Ο νόμος πλαστικής ροής, που αντιστοιχεί στην παραπάνω συνθήκη καθετότητας, συνήθως καλείται *συντηρημένος*⁵⁶. Όταν το διάνυσμα ρυθμού πλαστικής παραμορφώσεως δεν είναι κάθετο προς την επιφάνεια διαρροής

$$d_R < f_C \Rightarrow \bar{f} > 0$$

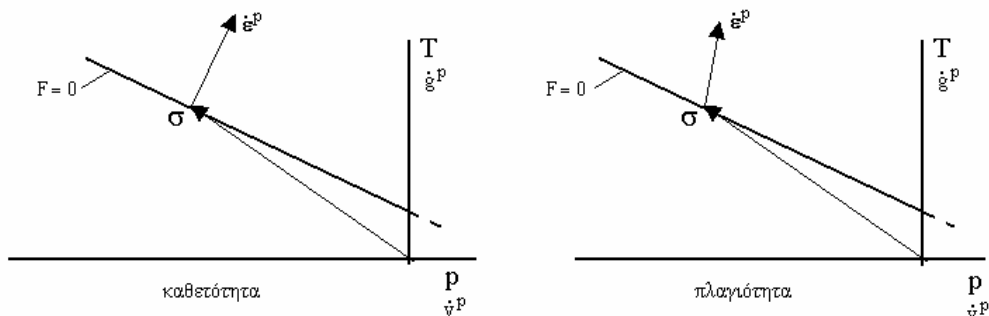
⁵³ Αγγλ. *normality condition*

⁵⁴ Αγγλ. *yield surface*

⁵⁵ Πρβλ. Ι. Βαρδουλάκη. *Τεχνική Μηχανική II*, Κεφ. 10, Εκδ. Συμμετρία, 1999.

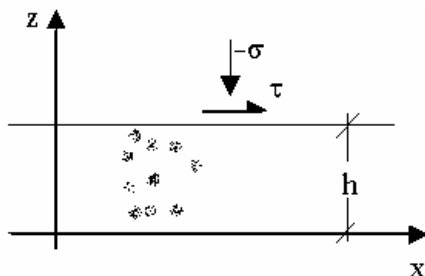
⁵⁶ Αγγλ. *associated flow rule*

τότε ο νόμος πλαστικής ροής καλείται *μη-συντηρημένος*⁵⁷, αν και η συνθήκη του Taylor, Εξ. (5.22), εκφράζει μια απλή συσχέτιση μεταξύ d_R και f_C .



Άσκηση

Θεωρούμε το πρότυπο του Reynolds για ένα κοκκώδες υλικό στο παράδειγμα της απλής διασταλτικής διατμήσεως μιας λεπτής ζώνης πάχους h υπο την επίδραση ορθής τάσεως σ και της διατμητικής τάσεως τ .



Θεωρούμε ότι οι μεταβολές όγκου δίδονται με ικανοποιητική ακρίβεια από την απειροστική ογκομετρική τροπή

$$\Delta \varepsilon = \frac{\Delta h}{h}$$

Η ογκομετρική τροπή διαχωρίζεται σε ελαστική και πλαστική,

$$\Delta \varepsilon = \Delta \varepsilon^e + \Delta \varepsilon^p$$

Υποθέτουμε ότι η ελαστική ογκομετρική τροπή συνδέεται κατ' ευθείαν με την ορθή τάση,

⁵⁷ Αγγλ. *non-associated flow rule*

$$\Delta \varepsilon^e = \frac{\Delta \sigma}{D}, \quad D > 0 \quad (\text{ελαστικό οιδημετρικό μέτρο})$$

Παράλληλα υποθέτουμε ότι πλαστικές ογκομετρικές τροπές προκαλούνται λόγω της διαστολικότητας του κοκκώδους υλικού. Η θεωρία του Reynolds αφορά στην περίπτωση όπου η ορθή τάση είναι σταθερή. Συμφώνως προς τη θεωρία αυτή έχουμε ότι

$$\sigma = \text{const.} \quad : \quad \varepsilon^p = \frac{\tau^2}{\delta} \quad (\delta > 0)$$

1. Να προσδιορισθεί ο συντελεστής εσωτερικής τριβής

$$f = \hat{f}(\sigma), \quad f = \frac{\tau}{|\sigma|}$$

στη περίπτωση όπου το κοκκώδες υλικό αυτό υφίσταται μία ισόχωρη απλή διάτμηση ($\varepsilon = 0$).

2. Να σχεδιασθεί στο χώρο (τ, σ) η αντίστοιχη καμπύλη διαρροής

$$\tau + \sigma \hat{f}(\sigma) = 0$$

5.7 Οι Καταστατικές Εξισώσεις της Θεωρίας Πλαστικής Ροής

Λόγω της μη-γραμμικής συμπεριφοράς ενός ελαστο-πλαστικού υλικού, για δεδομένη αύξηση της τάσεως $\Delta \sigma$ η ολική απειροστική τροπή $\Delta \varepsilon$ προκύπτει μεγαλύτερη από εκείνη που θα προέβλεπε ένας ελαστικός υπολογισμός,

$$\Delta \varepsilon > \Delta \varepsilon^e = \frac{\Delta \sigma}{E}$$

Για να υπολογισθεί σωστά την ολική απειροστική τροπή ο ελαστικός υπολογισμός πρέπει να διορθωθεί προσθέτοντας στην «ελαστική» τροπή την υπολειπόμενη «πλαστική» τροπή

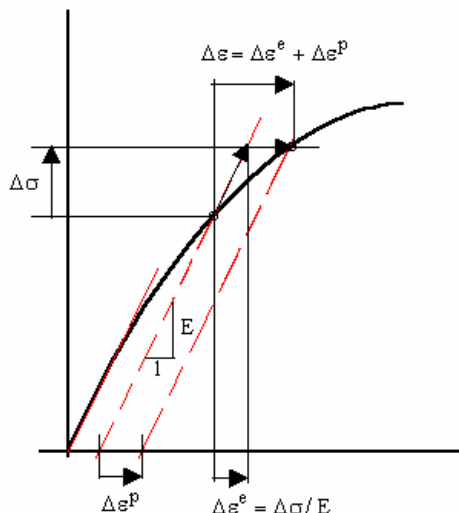
$$\Delta \varepsilon = \Delta \varepsilon^e + \Delta \varepsilon^p$$

Με αυτό το σκεπτικό φτάνουμε μέσα στα πλαίσια της θεωρίας πλαστικής ροής στην γενική υπόθεση ότι ο ρυθμός παραμορφώσεως διαχωρίζεται σε ελαστικό και σε πλαστικό μέρος

$$D_{ij} = D_{ij}^e + D_{ij}^p \quad (5.25)$$

Υπενθυμίζουμε ότι ο D_{ij} είναι το συμμετρικό μέρος της βαθμίδας της ταχύτητας στη τρέχουσα απεικόνιση του Συνεχούς,

$$D_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_i v_j + \partial_j v_i)$$



Ο διαχωρισμός αυτός, Εξ. (5.25), εισάγει γενικώς στο πρόβλημα 6 νέες αγνώστους, τις συνιστώσες του ρυθμού πλαστικής παραμορφώσεως. Η άρση της κινηματικής αοριστίας γίνεται εν προκειμένω με την υιοθέτηση μιας σειράς καταστατικών υποθέσεων που θα εκθέσουμε παρακάτω.

5.7.1 Ελαστικότητα

Ο ρυθμός ελαστικής παραμορφώσεως D_{ij}^e δίδεται μέσω των εξισώσεων μιάς κατάλληλα επιλεγμένης θεωρίας Ελαστικότητας. Επειδή στην περίπτωση αυτή οι σχέσεις τάσεων-τροπών δεν αφορούν πεπερασμένα μεγέθη αλλά τους ρυθμούς τους, η αντίστοιχη θεωρία δεν ονομάζεται ελαστικότητα αλλά *υπο-ελαστικότητα*. Συμφώνως προς τον ορισμό που δίνουν οι Truesdell και Noll⁵⁸, υπο-ελαστικά καλούνται εκείνα τα υλικά που χαρακτηρίζονται από μία *γραμμική* σχέση μεταξύ της αντικειμενικής χρονικής παραγώγου ενός επιλεγέντος τανυστή τάσεως και του αντίστοιχου, ενεργειακώς συζυγούς, ρυθμού παραμορφώσεως. Π.χ. μπορούμε να επιλέξουμε την κατά Jaumann παράγωγο της σχετικής τάσεως κατά Kirchhoff, και τον ρυθμό ελαστικής παραμορφώσεως⁵⁹

⁵⁸ C. Truesdell and W. Noll. *Nonlinear Field Theories of Mechanics*. Encyclopedia of Physics, Vol. III/3, Sect. 99,100, Springer, 1965.

⁵⁹ Πρβλ. Κεφ. 4.3

$$\overset{\circ}{T}_{ij}^t = R_{ijkl}^t D_{kl}^e \quad (5.26)$$

Για υπο-ελαστικά υλικά ισχύει ο επί πλέον περιορισμός ότι ο τανυστής 4ης τάξεως της ελαστικής στιβαρότητας \mathbf{R}^t πρέπει να είναι μία *ισότροπη* συνάρτηση του αντίστοιχου τανυστή της τάσεως

$$\mathbf{R}^t = \hat{\mathbf{R}}^t(\mathbf{T}^t)$$

Αν οι παραπάνω «υπο-ελαστικές» καταστατικές Εξ. (5.26) προέρχονται από μια θεωρία για *υπερ-ελαστικά* υλικά, τότε από την ύπαρξη μιας συναρτήσεως ειδικής ελαστικής ενέργειας συνεπάγεται η λεγόμενη *μείζων συμμετρία* του ελαστικού τανυστή στιβαρότητας

$$R_{ijkl}^t = R_{klij}^t = R_{jikl}^t = R_{ijlk}^t$$

Παρατηρούμε ότι στη βιβλιογραφία αντί της κατά Jaumann παραγώγου του σχετικού τανυστή Kirchhoff θα χρησιμοποιηθεί συχνά η αντίστοιχη αντικειμενική παράγωγος του τανυστή Cauchy και η υπο-ελαστική σχέση θα γραφτεί ως εξής

$$\overset{\circ}{\sigma}_{ij} = C_{ijkl}^e D_{kl}^e \quad (5.27)$$

Επειδή όμως ισχύει η σχέση⁶⁰

$$C_{ijkl}^e = R_{ijkl}^t - \sigma_{ij} \delta_{kl}$$

παρατηρούμε ότι η αντίστοιχη ελαστική στιβαρότητα ικανοποιεί μόνο τις λεγόμενες συνθήκες *ελάσσονος συμμετρίας*

$$C_{ijkl}^e = C_{jikl}^e = C_{ijlk}^e$$

Οι παραπάνω παρατηρήσεις σημαίνουν ότι μέσα στα πλαίσια μιας θεωρίας μεγάλων παραμορφώσεων ή/και τάσεων, ο υπο-ελαστικός νόμος για τον ελαστικό ρυθμό παραμορφώσεως θα πρέπει να εκφρασθεί συναρτήσει της αντικειμενικής παραγώγου Kirchhoff-Jaumann παρά συναρτήσει της αντίστοιχης Cauchy-Jaumann. Υπενθυμίζουμε επίσης ότι, όπως σκιαγραφήσαμε στο Κεφ. 4.3, και αν ακόμα δεχθούμε ότι η ελαστικότητα του υλικού είναι *ισότροπη*, κάτω από πεπερασμένες παραμορφώσεις το υλικό θα αναπτύξει τροπικά επιβεβλημένη ανισοτροπία και το πιο σημαντικό, θα εμφανίσει μια αύξηση της στιβαρότητας για διάτμηση κατά 45° προς τους κύριους άξονες της προ-έντασης⁶¹. Κάτι τέτοιο δεν

⁶⁰ Πρβλ. Κεφ. 4.4.2

⁶¹ Πρβλ. Κεφ. 4.3.4

είναι θεμιτό, διότι στα πραγματικά υλικά τα μέτρα ελαστικότητας μειώνονται αντί να αυξάνονται με προϊούσα την παραμόρφωση και αυτό λόγω εσωτερικής φθοράς που υφίστανται αυτά κατά την παραμόρφωση⁶². Στην πράξη θα αγνοήσουμε τα ελαττώματα των διαφόρων υπο-ελαστικών και υπερ-ελαστικών νόμων και θα δεχθούμε ότι η ελαστικότητα του υλικού περιγράφεται ικανοποιητικά από μια καταστατική σχέση της μορφής (5.27), όπου χάριν απλότητας θα δεχθούμε ότι ο τανυστής C_{ijkl}^e είναι ο γνωστός ισότροπος (Hooke) ελαστικός τανυστής στιβαρότητας

$$C_{ijkl}^e = G \left(\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk} + \frac{2\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \delta_{kl} \right)$$

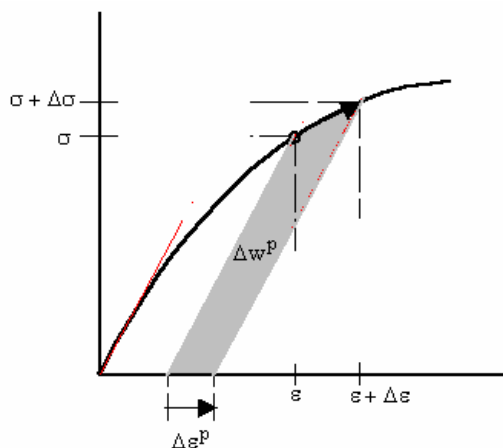
με τους γνωστούς περιορισμούς για τα μέτρα ελαστικότητας

$$G > 0 \quad \text{και} \quad -1 \leq \nu \leq \frac{1}{2}$$

5.7.2 Η συνάρτηση διαρροής⁶³

Ξεκινάμε με το παράδειγμα του απλού εφελκυσμού, όπου η εντατική κατάσταση είναι μονοαξονική

$$[\bar{\sigma}] = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



⁶² Πρβλ. Κεφ. 4.6

⁶³ Αγγλ. *yield function*

Κατά τη διαδικασία της *φορτίσεως* η τάση αυξάνεται μονοτόνως. Έστω ότι η τάση έχει λάβει ήδη μια τιμή $\sigma_1 = \sigma > 0$ και ότι αυξάνεται απειροστικά κατά $\Delta\sigma > 0$. Κατά την απειροστική αυτή μετάβαση διαπιστώνουμε ότι παράγεται πλαστική τροπή $\Delta\varepsilon^P > 0$, που συνδέεται άμεσα με την παραγωγή πλαστικού έργου παραμορφώσεως, που με τη σειρά του μετατρέπεται σε θερμότητα

$$\Delta w^P = \sigma \Delta\varepsilon^P > 0$$

Η κατάσταση πλαστικής παραμορφώσεως μετράται με τη βοήθεια μιας μη-φθίνουσας παραμέτρου Ψ που εμπροκειμένω μπορεί να ταυτισθεί είτε με την ολική πλαστική τροπή

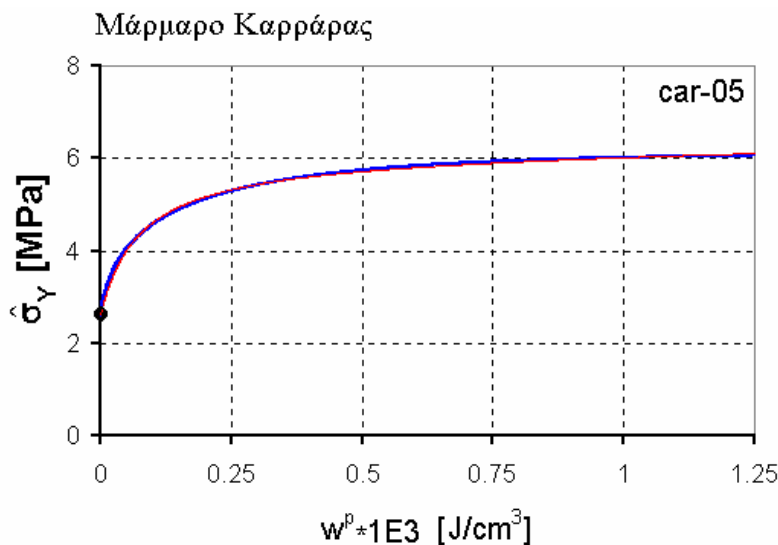
$$\Psi = \varepsilon^P = \int \dot{\varepsilon}^P dt$$

είτε με το ολικό έργο πλαστικής παραμορφώσεως

$$\Psi = w^P = \int \dot{w}^P dt$$

Σε κάθε περίπτωση ορίζουμε μια *συνάρτηση διαρροής* της μορφής,

$$F = \sigma_1 - \hat{\sigma}(\Psi)$$



Παρατηρούμε λοιπόν ότι πρωτογενώς η έννοια της φορτίσεως ορίζεται για μονοδιάστατες εντατικές καταστάσεις. Πράγματι φόρτιση έχουμε όταν κατά μία απειροστική μετάβαση ισχύουν οι σχέσεις:

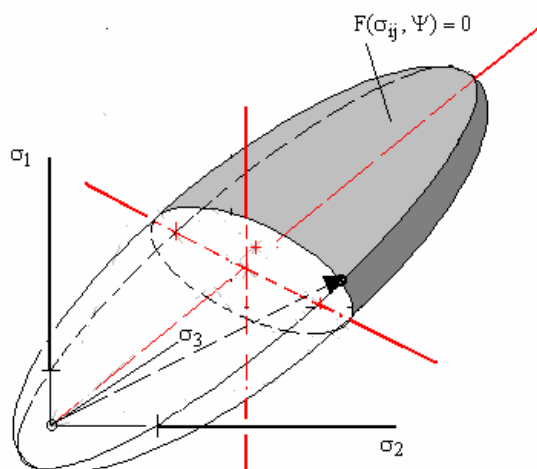
$$\sigma_1 = \hat{\sigma}(\Psi) \quad , \quad \bar{\sigma}_1 = \hat{\sigma}(\Psi + \Delta\Psi) \approx \hat{\sigma}(\Psi) + \frac{\partial \hat{\sigma}}{\partial \Psi} \Delta\Psi \quad , \quad \Delta\Psi > 0$$

Για να γενικεύσουμε τις παραπάνω έννοιες σε τριδιάστατες εντατικές καταστάσεις, εισάγουμε την έννοια της *συναρτήσεως διαρροής ή συναρτήσεως φορτίσεως*, η οποία θεωρούμε ότι είναι μια *ισότροπη* συνάρτηση του τανυστή της (πραγματικής) τάσης σ και μιας μη-φθίνουσας παραμέτρου Ψ , η οποία περιγράφει την κατάσταση πλαστικής *κρατύσεως*⁶⁴ του υλικού

$$F = \hat{F}(\sigma_{ij}, \Psi)$$

Αντιστοίχως στο χώρο των τάσεων ορίζουμε μια *επιφάνεια διαρροής*⁶⁵ που περιγράφεται αναλυτικά από την εξίσωση

$$\hat{F}(\sigma_{ij}, \Psi) = 0 \quad (5.28)$$



Τώρα υποθέτουμε ότι πλαστικές παραμορφώσεις D_{ij}^p παράγονται όταν η εντατική κατάσταση βρίσκεται και παραμένει πάνω στην επιφάνεια διαρροής, γεγονός που συνιστά την προαναφερθείσα *πλαστική φόρτιση*. Άρα πλαστική φόρτιση έχουμε όταν κατά μια απειροστική μετάβαση, $C^{(t)} \mapsto C^{(t+\Delta t)}$, όπου η μεταβολή της τάσεως είναι,

$$\sigma_{ij} \mapsto \bar{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij} + \Delta\sigma_{ij} = \sigma_{ij} + \dot{\sigma}_{ij}\Delta t$$

και η μεταβολή της πλαστικής παραμέτρου είναι,

$$\Psi \mapsto \bar{\Psi} = \Psi + \Delta\Psi = \Psi + \dot{\Psi}\Delta t \quad , \quad \underline{\dot{\Psi} > 0} \quad (5.29)$$

ισχύει ότι

$$F = 0 \mapsto \bar{F} = F + \Delta F = F + \dot{F}\Delta t = 0$$

⁶⁴ Αγγλ. *hardening*

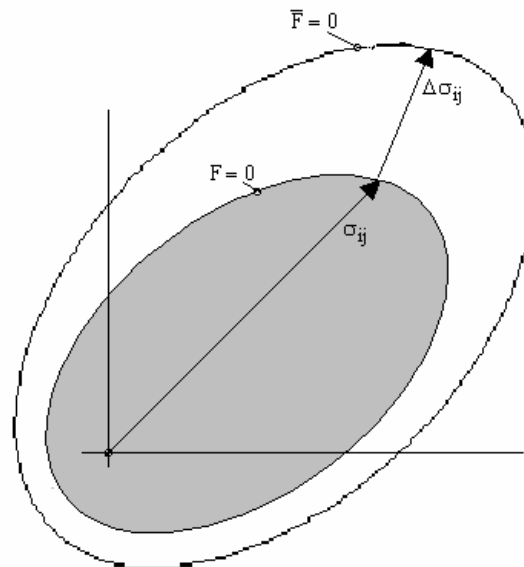
⁶⁵ Αγγλ. *yield surface*

ή

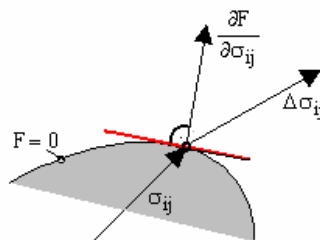
$$\dot{F} = \frac{\partial \hat{F}}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} + \frac{\partial \hat{F}}{\partial \Psi} \dot{\Psi} = 0 \quad (5.30)$$

Άρα με τη βοήθεια της γεωμετρικής έννοιας της επιφάνειας διαρροής μπορούμε σχετικά εύκολα να γενικεύσουμε για τριδιάστατες εντατικές καταστάσεις την έννοια της φορτίσεως. Φόρτιση έχουμε όταν:

$$F = 0 \quad , \quad \dot{F} = 0 \quad , \quad \dot{\Psi} > 0$$



Παρατηρούμε ότι κατά τη φόρτιση το διάνυσμα της μεταβολής της τάσεως δείχνει προς τα «έξω» της επιφάνειας διαρροής. Αυτό καθορίζεται από το πρόσημο του εσωτερικού γινομένου (στον R^9) μεταξύ του διανύσματος $\Delta \sigma_{ij}$ και της καθέτου $\partial \hat{F} / \partial \sigma_{ij}$ στην επιφάνεια διαρροής στο σημείο $\{\sigma_{ij}\}$.

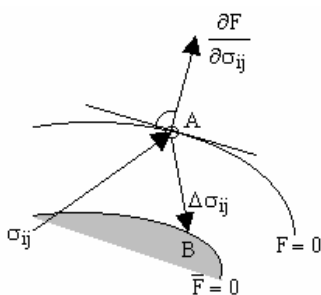


Άρα, κατά την φόρτιση ισχύουν οι κάτωθι σχέσεις:

$$F = 0 \quad , \quad \dot{F} = 0 \quad , \quad \frac{\partial \hat{F}}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} > 0 \quad , \quad \dot{\Psi} > 0 \quad (\text{κράτυση})$$

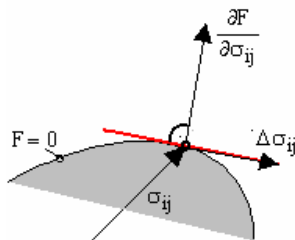
Η παραπάνω ανισότητα $(\partial \hat{F} / \partial \sigma_{ij}) \dot{\sigma}_{ij} > 0$ ισχύει μόνο στην περίπτωση όπου κατά τη φόρτιση η ίδια η επιφάνεια διαρροής κινείται προς τα «έξω», δηλαδή στην περίπτωση όπου το υλικό υφίσταται «κράτυση». Όταν το υλικό υφίσταται «χαλάρωση», τότε η ανισότητα αυτή δεν ισχύει και έχουμε ότι,

$$F = 0 \quad , \quad \dot{F} = 0 \quad , \quad \frac{\partial \hat{F}}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} < 0 \quad , \quad \dot{\Psi} > 0 \quad (\text{χαλάρωση})$$



Όταν κατά τη θεωρούμενη απειροστική μεταβολή το διάνυσμα της μεταβολής της τάσεως βρίσκεται πάνω στο εφαπτομενικό επίπεδο στην επιφάνεια διαρροής, τότε έχουμε την περίπτωση της λεγόμενης ουδέτερης φορτίσεως⁶⁶:

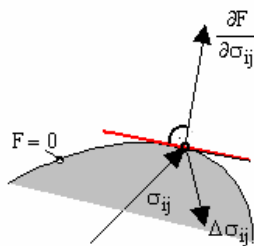
$$F = 0 \quad , \quad \frac{\partial \hat{F}}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} = 0 \quad , \quad \dot{\Psi} = 0 \quad (\text{ουδέτερη φόρτιση})$$



Όταν η εντατική κατάσταση βρίσκεται πάνω στην επιφάνεια διαρροής, αλλά το διάνυσμα της μεταβολής της τάσεως δείχνει προς τα «μέσα» της επιφάνειας διαρροής, ενώ δεν παράγονται πλαστικές τροπές, τότε έχουμε αποφόρτιση

⁶⁶ Αγγλ. *neutral loading*

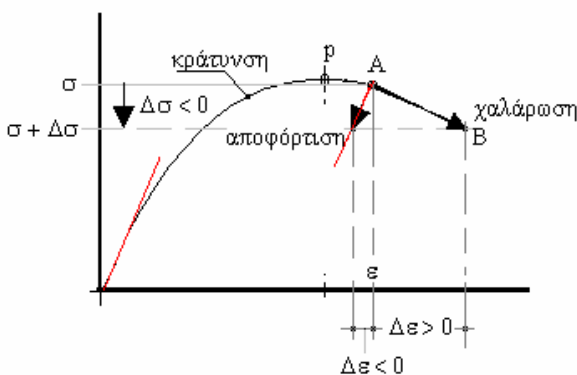
$$F = 0 \quad , \quad \frac{\partial \dot{F}}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} < 0 \quad , \quad \dot{\Psi} = 0 \quad (\text{αποφόρτιση})$$



Στο σημείο αυτό παρατηρούμε ότι υπάρχει μια τεχνική δυσκολία στο να ξεχωρίσουμε μεταξύ αποφόρτισης και χαλάρωσης. Η δυσκολία αυτή θα ξεπεραστεί παρακάτω, όπου θα καθορίσουμε το νόμο πλαστικής ροής, δηλαδή τις καταστατικές εκείνες σχέσεις που θα μας επιτρέψουν να προσδιορίσουμε τις πλαστικές τροπές και να παρακολουθήσουμε την εξέλιξη της επιφάνειας διαρροής στις διάφορες φάσεις φορτίσεως, αποφόρτισεως κλ.π.⁶⁷. Εδώ περιοριζόμαστε στη παρατήρηση ότι στο μονοδιάστατο παράδειγμα ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις

- Κράτυνση: $\Delta\sigma \Delta\varepsilon > 0$, $\Delta\Psi > 0$
- Χαλάρωση: $\Delta\sigma \Delta\varepsilon < 0$, $\Delta\Psi > 0$
- Αποφόρτιση: $\Delta\sigma \Delta\varepsilon > 0$, $\Delta\Psi = 0$

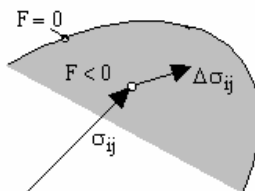
Και σημειώνουμε πάλι ότι η πλαστική παράμετρος **δεν** μειώνεται. Αυτός είναι ο βασικός περιορισμός που καθιστά τις εξισώσεις πλαστικής ροής ικανές να περιγράψουν μη-αντιστρεπτές παραμορφώσεις.



⁶⁷ Πρβλ. Q.S. Nguyen and H.D. Bui (1974). Sur les materiaux elastoplastiques a ecrouissage positif ou negatif. *J. de Mecanique*, Vol. 3, 322-432. J. Casey (2002). On loading criteria in plasticity. *C. R. Mecanique*, 330, 285-290.

Τέλος παρατηρούμε ότι στην περίπτωση που η εντατική κατάσταση βρίσκεται «εντός» της επιφάνειας διαρροής, τότε πλαστικές παραμορφώσεις δεν παράγονται, οποιαδήποτε και αν είναι η κατεύθυνση του διανύσματος μεταβολής της τάσεως,

$$F < 0 \quad , \quad \dot{\Psi} = 0$$



Στην περίπτωση αυτή η συμπεριφορά του υλικού για οποιαδήποτε απειροστική μετάβαση είναι ελαστική. Για το λόγο αυτό, η εσωτερική περιοχή της επιφάνειας διαρροής στο χώρο των τάσεων $F < 0$ καλείται «ελαστική» περιοχή.

Παρατηρούμε τέλος ότι ορισμένοι συγγραφείς, εμπνεόμενοι από το τρόπο με τον οποίο χειρίζεται κανείς τους ανισοτικούς περιορισμούς στη θεωρία Βελτιστοποιήσεως, γράφουν τη συνθήκη για την πλαστική φόρτιση υπο μορφή συνθηκών Kuhn-Tucker,

$$\dot{\Psi} \geq 0 \quad , \quad F \leq 0 \quad , \quad \dot{\Psi}F = 0$$

5.7.3 Ο νόμος πλαστικής ροής και η συνθήκη συμβατότητας

Στα πλαίσια της θεωρίας πλαστικής ροής θα δεχθούμε ότι ο ρυθμός πλαστικής παραμορφώσεως έχει τους ίδιους κύριους άξονες με την (πραγματική) τάση. Στη περίπτωση αυτή λέμε ότι οι τανυστές \mathbf{D}^P και $\boldsymbol{\sigma}$ είναι *ομοαξονικοί*⁶⁸. Ένας εύκολος τρόπος να ικανοποιήσουμε αυτή την παραδοχή και παράλληλα να απλοποιήσουμε το πρόβλημα προσδιορισμού των 6 συνιστωσών του ρυθμού πλαστικής παραμορφώσεως είναι ο εξής: α) υποθέτουμε ότι όλες οι συνιστώσες του \mathbf{D}^P είναι ανάλογες του ρυθμού μεταβολής της πλαστικής παραμέτρου⁶⁹ $\dot{\Psi}$ και β) υποθέτουμε ότι υπάρχει μία ισότροπη συνάρτηση του τανυστή των τάσεων και της πλαστικής παραμέτρου,

$$Q = \hat{Q}(\boldsymbol{\sigma}_{ij}, \Psi) \quad (5.31)$$

η λεγόμενη *συνάρτηση πλαστικού δυναμικού*⁷⁰, έτσι ώστε

⁶⁸ Αγγλ. *coaxial*

⁶⁹ Για το λόγο αυτό ο $\dot{\Psi}$ θα ονομασθεί και *πλαστικός πολλαπλασιαστής*.

⁷⁰ Αγγλ. *plastic potential function*

$$D_{ij}^p = \frac{\partial \hat{Q}}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\Psi} \quad (5.32)$$

Η παραπάνω Εξ. (5.32) καλείται *νόμος πλαστικής ροής*⁷¹.

Στην περίπτωση που δεν θα εισάγουμε νέα συνάρτηση στη καταστατική περιγραφή και θα δεχθούμε ότι η συνάρτηση διαρροής παίζει το ρόλο του πλαστικού δυναμικού, δηλ. στη περίπτωση που δεχόμαστε ότι, $Q \equiv F$, τότε λέμε πως ο νόμος πλαστικής ροής είναι *συντηρημένος*⁷²

$$F \equiv Q \Rightarrow D_{ij}^p = \frac{\partial \hat{F}}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\Psi} \quad (5.33)$$

Στην περίπτωση αυτή το διάνυσμα ρυθμού πλαστικής παραμορφώσεως παριστάμενο στον χώρο των τάσεων⁷³ είναι κάθετο στην επιφάνεια διαρροής στη θέση που αντιστοιχεί στη τρέχουσα τιμή της έντασης και της πλαστικής παραμέτρου. Όπως είδαμε στο Κεφ. 5.2 η παραλληλία μεταξύ D_{ij}^p και της καθέτου στην επιφάνεια διαρροής ($\partial \hat{F} / \partial \sigma_{ij}$) καλείται *συνθήκη καθετότητας*⁷⁴.

Παρατηρούμε ότι με δεδομένη τη συνάρτηση πλαστικού δυναμικού, η κινηματική αοριστία του ελστο-πλαστικού προβλήματος περιορίζεται στον υπολογισμό α) των 3 βαθμών ελευθερίας κινήσεως του υ.σ., δηλ. στον προσδιορισμό των συνιστουσών της ταχύτητας v_i ($i = 1,2,3$) και β) στον προσδιορισμό της πλαστικής παραμέτρου $\dot{\Psi}$. Για την απαλοιφή της κινηματικής αγνώστου $\dot{\Psi}$ κάνουμε χρήση της υποθέσεως ότι πλαστικές τροπές θα παράγονται, και λόγω τις Εξ. (5.33), $\dot{\Psi} > 0$ θα παράγεται, όταν θα λαμβάνει χώρα φόρτιση της επιφάνειας διαρροής. Με άλλα λόγια η απαλοιφή του $\dot{\Psi} > 0$ θα γίνει με το να απαιτήσουμε ο νόμος πλαστικής ροής, Εξ. (5.33), να είναι συμβατός με τη φόρτιση της επιφάνειας διαρροής. Αυτή η διαδικασία γίνεται ως εξής:

Όπως αναφέραμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, κατά τη φόρτιση ισχύουν οι σχέσεις

$$F = 0, \quad \dot{F} = \frac{\partial \hat{F}}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} + \frac{\partial \hat{F}}{\partial \Psi} \dot{\Psi} = 0 \quad (5.34)$$

Ο ρυθμός του τανυστή των τάσεων κατά Cauchy δίδεται μέσω των καταστατικών σχέσεων της υπο-ελαστικότητας,

⁷¹ Αγγλ. *plastic flow-rule*

⁷² Αγγλ. *associated*

⁷³ Αυτό είναι δυνατό λόγω ομοαξονικότητας μεταξύ D^p και σ .

⁷⁴ Αγγλ. *normality condition*.

$$\dot{\sigma}_{ij} = C_{ijkl}^e D_{kl}^e$$

και των γεωμετρικών σχέσεων που συνδέουν την υλική του παράγωγο με την κατά Jaumann αντικειμενική του παράγωγο⁷⁵,

$$\dot{\sigma}_{ij} = \overset{\circ}{\sigma}_{ij} + W_{ik}\sigma_{kj} - \sigma_{ik}W_{kj}$$

Παρατηρούμε τώρα ότι επειδή ο τανυστής $(\partial\hat{F}/\partial\sigma_{ij})$ είναι συμμετρικός, ενώ ο στροβιλισμός είναι αντισυμμετρικός, ισχύει η σχέση

$$\frac{\partial\hat{F}}{\partial\sigma_{ij}}\dot{\sigma}_{ij} = \frac{\partial\hat{F}}{\partial\sigma_{ij}}\overset{\circ}{\sigma}_{ij} \Rightarrow \frac{\partial\hat{F}}{\partial\sigma_{ij}}\dot{\sigma}_{ij} = \frac{\partial\hat{F}}{\partial\sigma_{ij}}C_{ijkl}^e D_{kl}^e$$

Τέλος, κάνοντας χρήση του διαχωρισμού του ρυθμού της παραμορφώσεως

$$D_{ij} = D_{ij}^e + D_{ij}^p$$

και του νόμου πλαστικής ροής

$$D_{ij}^p = \frac{\partial\hat{Q}}{\partial\sigma_{ij}}\dot{\Psi}$$

από την Εξ. (5.34) παίρνοθμε τη σχέση,

$$\frac{\partial\hat{F}}{\partial\sigma_{ij}}C_{ijkl}^e \left(D_{kl} - \frac{\partial\hat{Q}}{\partial\sigma_{kl}}\dot{\Psi} \right) + \frac{\partial\hat{F}}{\partial\Psi}\dot{\Psi} = 0 \quad (5.35)$$

Λαμβανομένου υπ' όψιν του γεγονότος ότι ο ρυθμός της παραμορφώσεως είναι το συμμετρικό μέρος της βαθμίδας της ταχύτητας καθίσταται φανερό ότι η παραπάνω Εξ. (5.35) μας επιτρέπει την απαλοιφή του ρυθμού του πλαστικού πολλαπλασιαστή. Στην τελική έκφραση για το $\dot{\Psi}$ κάνουμε χρήση των εξής συμβολισμών:

- $N_{ij} = \frac{\partial\hat{F}}{\partial\sigma_{ij}}$
- $N'_{ij} = \frac{\partial\hat{Q}}{\partial\sigma_{ij}}$

⁷⁵ Πρβλ. Κεφ. 4.2

- $B_{ij} = N_{kl} C_{klij}^e$
- $H_t = -\frac{\partial F}{\partial \psi}$ (μέτρο κράτυνσης⁷⁶)
- $H_0 = N_{kl} C_{klmn}^e N'_{mn} > 0$ (μέτρο αντεπιστροφής⁷⁷)
- $H = H_0 + H_t > 0$ (πλαστικό μέτρο⁷⁸)

Οπότε Η Εξ. (5.35) γίνεται,

$$\dot{\Psi} = \frac{1}{H} B_{kl} D_{kl}$$

Επειδή τώρα εξ ορισμού ο πλαστικός πολλαπλασιαστής $\dot{\Psi}$ δεν μπορεί να πάρει αρνητικές τιμές, η παραπάνω εξίσωση γράφεται ως εξής

$$\dot{\Psi} = \frac{\langle 1 \rangle^{(p)}}{H} B_{kl} D_{kl} \quad (5.36)$$

όπου εισάγαμε το λεγόμενο σύμβολο ή αγκύλη *Förpl-Macauley*

$$\langle 1 \rangle^{(p)} = \begin{cases} 1 & : F = 0 \wedge B_{kl} D_{kl} > 0 \\ 0 & : F < 0 \vee (F = 0 \wedge B_{kl} D_{kl} \leq 0) \end{cases}$$

Με το τρόπο αυτό πετύχαμε μian έκφραση για τον ρυθμό μεταβολής της πλαστικής παραμέτρου, η οποία είναι συμβατή με τους ορισμούς της φορτίσεως και της αποφορτίσεως της επιφάνειας διαρροής που δώσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Η συνθήκη (5.36) λέγεται και *συνθήκη συμβατότητας κατά Prager*⁷⁹.

5.7.4 Εξισώσεις ρυθμού της θεωρίας πλαστικής ροής

Επιστρέφουμε στις εξισώσεις υπο-ελαστικότητας, που τώρα μπορούν να γραφούν συναρτήσει του ρυθμού της ολικής παραμορφώσεως,

$$\dot{\sigma}_{ij} = C_{ijkl}^e D_{kl}^e = C_{ijkl}^e (D_{kl} - D_{kl}^p) = C_{ijkl}^e (D_{kl} - \dot{\Psi} N'_{kl})$$

⁷⁶ Αγγλ. normality condition

⁷⁷ Αγγλ. snap-back modulus

⁷⁸ Αγγλ. plastic modulus

⁷⁹ Αγγλ. Prager's consistency condition

ή

$$\dot{\sigma}_{ij} = C_{ijkl}^e (D_{kl} - \frac{\langle 1 \rangle^{(p)}}{H} B_{pq} D_{pq} N'_{kl})$$

Οι εξισώσεις αυτές γράφονται σε απλή, συνοπτική μορφή κάνοντας χρήση των παρακάτω τνυστών στιβαρότητας:

- $C_{ijkl}^e = G \left(\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk} + \frac{2\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \delta_{kl} \right)$ (ελαστική στιβαρότητα)
- $C_{ijkl}^p = \frac{1}{H} N'_{mn} C_{mnij}^e N_{pq} C_{pqkl}^e$ (πλαστική στιβαρότητα)
- $C_{ijkl}^{ep} = C_{ijkl}^e - \langle 1 \rangle^{(p)} C_{ijkl}^p$ (ελαστο-πλαστική στιβαρότητα)

$$\dot{\sigma}_{ij} = C_{ijkl}^{ep} D_{kl} \quad (5.37)$$

Αυτές είναι οι καταστατικές εξισώσεις της θεωρίας πλαστικής ροής μεταξύ του αντικειμενικού ρυθμού της πραγματικής τάσεως και του ρυθμού της παραμορφώσεως. Λόγω των αγκυλών Förrli-Macauley ο ελαστο-πλαστικός τανυστής C_{ijkl}^{ep} είναι ένας οιονεί γραμμικός τελεστής⁸⁰. Καμία φορά οι καταστατικές Εξ. (5.37) θα χαρακτηριστούν και ως δι-γραμμικές⁸¹, αφού είναι σε δύο περιοχές του χώρου των τάσεων κατά περιοχή γραμμικές,

- στην ελαστική περιοχή: $C_{ijkl}^{ep} \equiv C_{ijkl}^e$
- αλλοιώως: $C_{ijkl}^{ep} \equiv C_{ijkl}^e - C_{ijkl}^p$

Όπως αναφέραμε εισαγωγικά στο παρόν κεφάλαιο, ένας άλλος τρόπος να δει κανείς τις εξισώσεις της θεωρίας της πλαστικής ροής είναι ότι αυτές συνιστούν διόρθωση των εξισώσεων της (υπο-) ελαστικότητας,

$$\dot{\sigma}_{ij} = C_{ijkl}^e D_{kl} - \langle 1 \rangle^{(p)} C_{ijkl}^p D_{kl}$$

Γι' αυτό καμία φορά θα αναφερθεί ότι οι καταστατικές εξισώσεις της θεωρίας πλαστικής ροής συνιστούν μια ομαλή διαταραχή⁸² εκείνων της θεωρίας (υπο-) ελαστικότητας.

⁸⁰ Αγγλ. *quasi-linear operator*

⁸¹ Αγγλ. *bi-linear*

⁸² Αγγλ. *regular perturbation*

Αν ο ελαστικός τανυστής ικανοποιεί τις συνθήκες μείζονος συμμετρίας,

$$C_{ijkl}^e = C_{klij}^e = C_{ijlk}^e = C_{jilk}^e = \dots$$

τότε ο ελαστο-πλαστικός τανυστής τις ικανοποιεί μόνον όταν ο νόμος πλαστικής ροής είναι συνηρητέος

$$N'_{ij} = N_{ij} \Rightarrow C_{ijkl}^{ep} = C_{klij}^{ep} = \dots$$

Όπως αναφέραμε εισαγωγικά και θα αναπτύξουμε στο επόμενο κεφάλαιο, για πολλά γεωυλικά, λόγω του φαινομένου της διασταλτικότητας, δεν ισχύει ο νόμος καθετότητας, οπότε ο νόμος πλαστικής ροής δεν συναρτάται απ' ευθείας με την επιφάνεια διαρροής. Παρ' όλα αυτά στη βιβλιογραφία θα βρούμε μια ασθενέστερη μορφή, τον λεγόμενο *αποκλίνοντα νόμο καθετότητας*⁸³, που συνοψίζεται στη σχέση

$$N'_{ij} - N_{ij} = \lambda \delta_{ij}$$

και λ είναι ένα βαθμωτό μέγεθος.

Άσκηση

Να γραφούν οι καταστατικές εξισώσεις (5.37) αναλυτικά για διάφορες απειροστικές συνέχειες μιας μονότονης τριαξονικής θλίψεως.

5.8 Απλά Καταστατικά Προσομοιώματα

5.8.1 Ισότροπη πλαστικότητα

Στα πλαίσια της θεωρίας πλαστικής ροής για ισότροπα υλικά κάνουμε χρήση των συναρτήσεων διαρροής και πλαστικού δυναμικού

$$F = \hat{F}(\sigma_{ij}, \Psi) \quad , \quad Q = \hat{Q}(\sigma_{ij}, \Psi)$$

τις οποίες και θεωρούμε ως ισότροπες συναρτήσεις της (πραγματικής) τάσεως. Όπως είδαμε πιο πάνω, στις καταστατικές εξισώσεις ρυθμού της θεωρίας αυτής υπεισέρχονται οι τανυστές βαθμίδας

$$N_{ij} = \frac{\partial \hat{F}}{\partial \sigma_{ij}} \quad \text{και} \quad N'_{ij} = \frac{\partial \hat{Q}}{\partial \sigma_{ij}}$$

Συμφώνως προς το θεώρημα σχετικά με την παράσταση ισότροπων τανυστικών συναρτήσεων⁸⁴ γενικώς θα ισχύουν εκφράσεις της μορφής

⁸³ Αγγλ. *deviatoric normality condition*. G. Gudehus (1972). Elasto-plastic constitutive equations for dry sand. *Arch. Mech. Stosw.*, Vol. 24, 395-402.

⁸⁴ Πρβλ. Κεφ. 1.9

$$N_{ij} = A_0 \delta_{ij} + A_1 s_{ij} + A_2 s_{ik} s_{kj}$$

και

$$N'_{ij} = B_0 \delta_{ij} + B_1 s_{ij} + B_2 s_{ik} s_{kj}$$

όπου οι ποσότητες A_v και B_v ($v=0,1,2$) είναι συναρτήσεις των αναλλοίωτων του τανυστή των τάσεων.

Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι οι F και Q είναι συναρτήσεις των αναλλοίωτων της τάσεως,

$$F = \hat{F}(I_{1\sigma}, J_{2s}, J_{3s}, \Psi) \quad , \quad Q = \hat{Q}(I_{1\sigma}, J_{2s}, J_{3s}, \Psi)$$

για τον πρακτικό υπολογισμό των βαθμίδων της συναρτήσεως διαρροής και του πλαστικού δυναμικού χρησιμοποιούμε εκφράσεις της μορφής,

$$N_{ij} = \frac{\partial \hat{F}}{\partial I_{1\sigma}} \frac{\partial I_{1\sigma}}{\partial \sigma_{ij}} + \frac{\partial \hat{F}}{\partial J_{2s}} \frac{\partial J_{2s}}{\partial \sigma_{ij}} + \frac{\partial \hat{F}}{\partial J_{3s}} \frac{\partial J_{3s}}{\partial \sigma_{ij}}$$

Επειδή δε ισχύουν οι ταυτότητες

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_{1\sigma}}{\partial \sigma_{ij}} &= \delta_{ij} \\ \frac{\partial J_{2s}}{\partial \sigma_{ij}} &= s_{ij} \\ t_{ij} = \frac{\partial J_{3s}}{\partial \sigma_{ij}} &= s_{ik} s_{kj} - \frac{2}{3} J_{2s} \delta_{ij} \end{aligned}$$

τελικά παίρνουμε την έκφραση

$$N_{ij} = N_0 \delta_{ij} + N_1 s_{ij} + N_2 t_{ij}$$

όπου

$$N_0 = \frac{\partial \hat{F}}{\partial I_{1\sigma}} \quad , \quad N_1 = \frac{\partial \hat{F}}{\partial J_{2s}} \quad , \quad N_2 = \frac{\partial \hat{F}}{\partial J_{3s}}$$

Με βάση τον διαχωρισμό του πλαστικού ρυθμού παραμορφώσεως σε ισότροπο και αποκλίνον μέρος

$$D_{ij}^p = \frac{1}{3} I_{1D^p} \delta_{ij} + D'_{ij}{}^p$$

μπορούμε να ορίσουμε τις εξής παραμέτρους της πλαστικής παραμορφώσεως:

- *πλαστική διαστατικότητα*: $\dot{\nu}^P = I_{1D}^P = D_{kk}^P$
- *πλαστική διάτμηση*: $\dot{g}^P = 2\sqrt{J_{2D}^P} = \sqrt{2D_{ij}^P D_{ji}^P}$
- *πλαστικό έργο*: $\dot{w}^P = \sigma_{ij} D_{ji}^P$

Όσον αφορά τη σχέση των δύο πρώτων παραμέτρων με τον πλαστικό πολλαπλασιαστή $\dot{\Psi}$, που υπεισέρχεται στον νόμο πλαστικής ροής, $D_{ij}^P = \dot{\Psi} N'_{ij}$, παρατηρούμε ότι ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις (γιατί;)

- $\dot{\nu}^P = Q_v \dot{\Psi}$, $Q_v = N'_{kk}$
- $\dot{g}^P = Q_g \dot{\Psi}$, $Q_g = \sqrt{2\left(N'_{ij} - \frac{1}{3}N'_{kk}\delta_{ij}\right)\left(N'_{ij} - \frac{1}{3}N'_{kk}\delta_{ij}\right)}$

Τα διάφορα μαθηματικά πρότυπα (μοντέλα) που έχουν κατά καιρούς προταθεί για την περιγραφή της συμπεριφοράς γεωυλικών, μέσα στα πλαίσια της θεωρίας πλαστικής ροής, αναφέρονται κυρίως στην επιλογή των συναρτήσεων διαρροής και πλαστικού δυναμικού.

5.8.2 Προσομοιώματα τύπου Drucker-Prager (D.-P.)

Τα προσομοιώματα (D.-P.) δεν εξαρτώνται από την 3^η αναλλοίωτη, οπότε το ίχνος των αντίστοιχων επιφανειών στο αποκλίνον επίπεδο είναι κύκλος και η επιφάνεια διαρροής στο χώρο των κυρίων τάσεων είναι αντίστοιχα κυκλικός κώνος με άξονα τη χωροδιαγώνιο.

5.8.2.1 Γραμμικά προσομοιώματα:

Στην ειδική αυτή περίπτωση η εξάρτηση από τη μέση τάση είναι γραμμική,

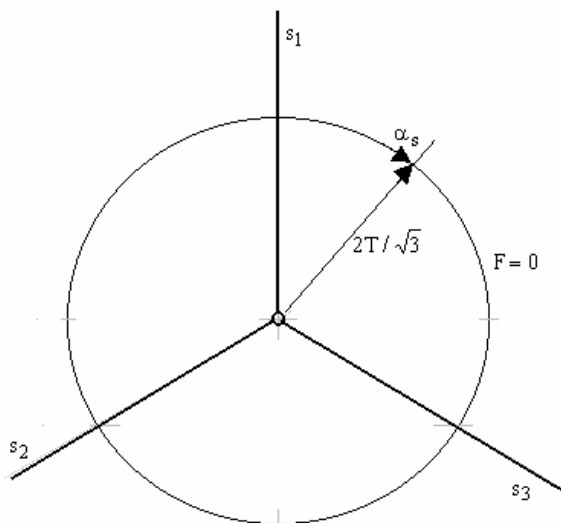
- $F = \sqrt{J_{2s}} - f\left(q - \frac{1}{3}I_{1\sigma}\right)$ (*f*: συντελεστής εσωτερικής τριβής)
- $Q = \sqrt{J_{2s}} - d\left(q' - \frac{1}{3}I_{1\sigma}\right)$ (*d*: συντελεστής διαστατικότητας)

Οπότε

$$N_{ij} = \frac{1}{\sqrt{2}}m_{ij} + \frac{1}{3}f\delta_{ij} \quad , \quad N'_{ij} = \frac{1}{\sqrt{2}}m_{ij} + \frac{1}{3}d\delta_{ij}$$

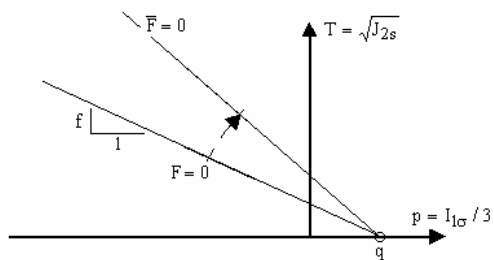
και

$$m_{ij} = \frac{s_{ij}}{\sqrt{2J_{2s}}} \quad , \quad m_{ij}m_{ji} = 1$$

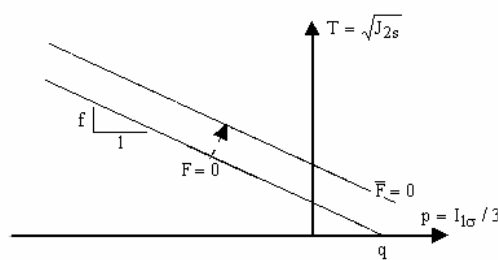
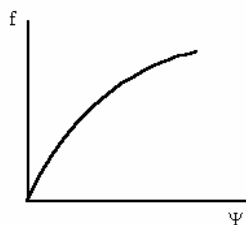


Η εξάρτηση των συναρτήσεων F και Q από την παράμετρο πλαστικής κρατύνσεως Ψ είναι επίσης θέμα κατάλληλης επιλογής. Όσον αφορά π.χ. την επιφάνεια διαρροής αναφέρουμε εδώ τις εξής ειδικές περιπτώσεις:

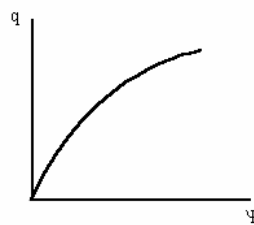
- «ισότροπη» κράτυνση: $f = \hat{f}(\Psi)$, $q = \text{σταθ.}$ $\Rightarrow H_t = -\frac{\partial F}{\partial \Psi} = q \frac{df}{d\Psi}$
- «κινηματική» κράτυνση: $f = \text{σταθ.}$, $q = \hat{q}(\Psi)$. $\Rightarrow H_t = -\frac{\partial F}{\partial \Psi} = f \frac{dq}{d\Psi}$



«ισότροπη κράτυνση»



«κινηματική κράτυνση»



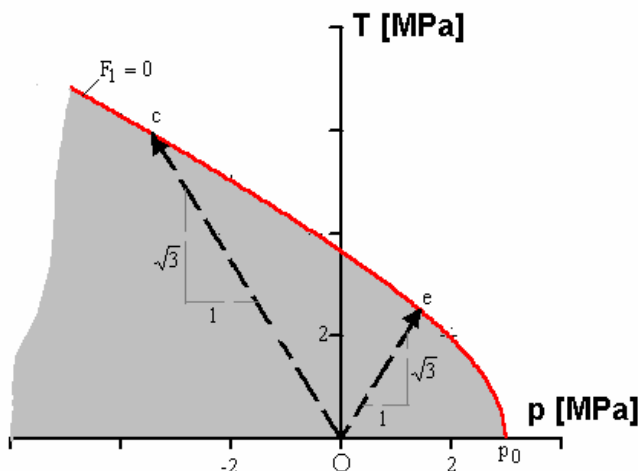
5.8.2.2 Μη-γραμμικά προσομοιώματα

Στη περίπτωση αυτή η επιφάνεια διαρροής ή το πλαστικό δυναμικό δεν είναι κατ' ανάγκη γραμμικές συναρτήσεις της πρώτης αναλλοίωτης του τανυστή των τάσεων. Για παράδειγμα αναφέρουμε την εξής «παραβολική» συνάρτηση,

$$F = F_1(p, T, \Psi) = T - f(q-p) \sqrt{1 - \left(\frac{q-p_0}{q-p} \right)^2}$$

$$T = \sqrt{J_{2s}} \quad , \quad p = I_{1\sigma}$$

$$f = \hat{f}(\Psi) \quad , \quad q = \text{σταθ.} \quad p_0 = \hat{p}_0(\Psi)$$



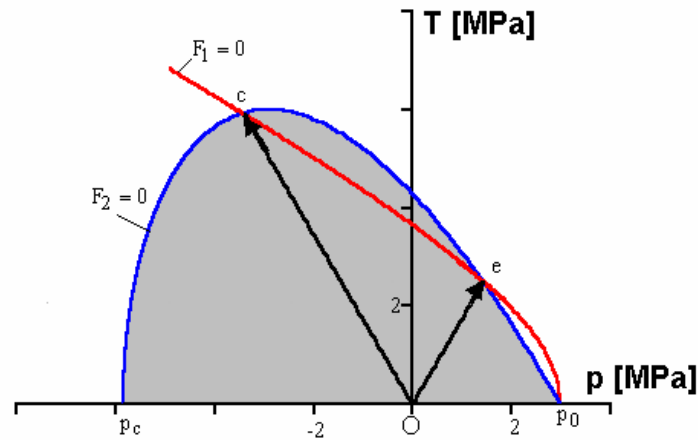
Στο σχήμα διακρίνονται και οι *τασικές οδεύσεις*⁸⁵, που αντιστοιχούν σε μονοαξονικό εφελκυσμό (Oe) και μονοαξονική θλίψη (Oc), αντιστοίχως. Είναι φανερό ότι τα λεγόμενα *οιονεί ψαθυρά υλικά*⁸⁶, όπως τα πετρώματα, το σκυρόδεμα κλπ., εμφανίζουν μικρότερη αντοχή σε εφελκυσμό απ' ό τι σε θλίψη. Γενικώς το πρόβλημα έγκειται στην εύρεση μιάς κατάλληλης συναρτήσεως διαρροής και ενός κατάλληλου μέτρου πλαστικής παραμορφώσεως, έτσι ώστε η συνάρτηση

$$\hat{F}(p, T, \Psi) = 0$$

να παρεμβάλλεται μεταξύ των σημείων (e) και (c) πάνω στις δύο αυτές (ή και σε περισσότερες) τασικές οδεύσεις, που αντιστοιχούν στην αυτή τιμή για την πλαστική παράμετρο Ψ . Το πρόβλημα αυτό δεν έχει μονοσήμαντη λύση. Αυτό φαίνεται και από το παρακάτω σχήμα, όπου μεταξύ των σημείων (c) και (e) έχει παρεμβληθεί πέραν της («ανοιχτής») παραβολικής ($F_1 = 0$) και μια άλλη («κλειστή») συνάρτηση διαρροής.

⁸⁵ Αγγλ. *stress-paths*

⁸⁶ Αγγλ. *quasi-brittle materials*



Η συνάρτηση αυτή για δεδομένη τιμή του Ψ εμφανίζει πεπερασμένη τάση διαρροής σε ισότροπη θλίψη, $p_c = \hat{p}_c(\Psi)$

$$F = F_2(p, T, \Psi) = T - f(p_0 - p) \sqrt{1 - \frac{p_0 - p_c}{p_0 - p}}$$

Ενα τέτοιο πρόσομοίωμα αναφέρεται στη βιβλιογραφία ως *μοντέλο κύπελλου*⁸⁷, και βρίσκει εφαρμογή στη περιγραφή της συμπεριφοράς γεωυλικών, όπως οι *άργιλοι*, που εμφανίζουν το φαινόμενο της *στερεοποίησης*⁸⁸.

Αν θέλουμε τώρα να προσθέσουμε στο πρόσομοίωμα κυπέλλου μία απότμηση στην περιοχή εφελκυσμού⁸⁹, θα μπορούσαμε να δοκιμάσουμε συναρτήσεις διαρροής της μορφής

$$F = F_2(p, T, \Psi) = T - f(p_0 - p) \left(1 - \frac{p_0 - p_c}{p_0 - p}\right)^n$$

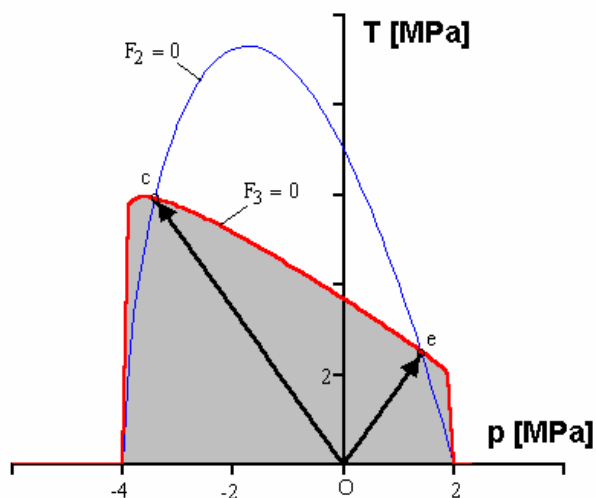
$$F = F_3(p, T, \Psi) = T - f(q - p) \left(\left(1 - \left(\frac{q - p_0}{q - p}\right)^2\right) \left(1 - \frac{q - p}{q - p_c}\right) \right)^n$$

	F2	F3
p0	2.000	2.000
pc	-4.000	-4.000
f	4.484	0.839
q		4.669
n	0.602	0.048

⁸⁷ Αγγλ. *cap-model*

⁸⁸ Αγγλ. *consolidation*

⁸⁹ Αγγλ. *tension cut-off*



Στο χώρο των κυρίων τάσεων οι παραπάνω συναρτήσεις διαρροής F_2 και F_3 οδηγούν σε κλειστές επιφάνειες διαρροής, οι οποίες στη συγκεκριμένη περίπτωση προσομοιωσεως κατά Drucker-Prager, είναι επιφάνειες εκ περιστροφής με άξονα τη χωροδιαγώνιο και ίχνος όμοιο της αντίστοιχης καμπύλης στο επίπεδο (p, T) .

5.8.3 Προσομοιώματα τύπου Mohr-Coulomb (M.-C.)

Τα προσομοιώματα (M.-C.) δεν εξαρτώνται από την ενδιάμεση κύρια τάση.

- **Συνάρτηση Διαρροής**

Όσον αφορά την συνθήκη διαρροής αυτή συνήθως εκφράζεται μέσω της λεγόμενης ενεργού γωνία τριβής⁹⁰ φ_m του υλικού κατά Mohr-Coulomb, που ορίζεται στο επίπεδο Mohr μέσω μίας ευθύγραμμης περιβάλλουσας

$$\sin \varphi_m = \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)/2}{q - (\sigma_2 + \sigma_1)/2} \quad (\sigma_2 \leq \sigma_3 \leq \sigma_1)$$

Στην περίπτωση αυτή εισάγουμε συνήθως τις αναλλοίωτες

$$\sigma_M = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) < 0 \quad , \quad \tau_M = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) > 0$$

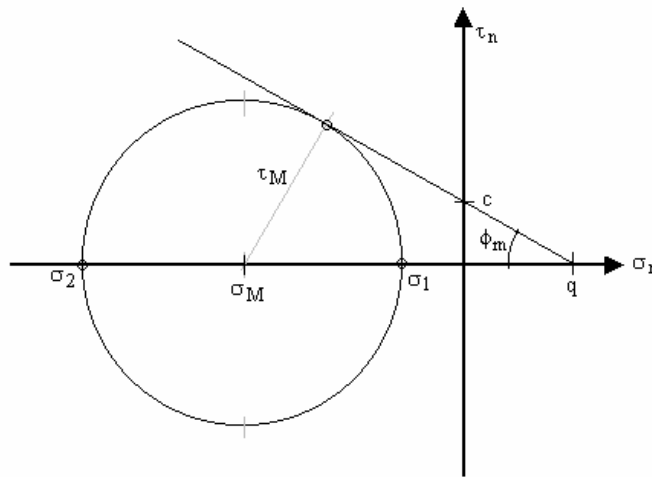
οπότε έπεται ότι

$$\sin \varphi_m = \frac{\tau_M}{q - \sigma_M}$$

ή

$$\underline{\tau_M = -\sigma_M \sin \varphi_m + c \cos \varphi_m \quad , \quad c = q \tan \varphi_m}$$

⁹⁰ Αγγλ. mobilized friction angle



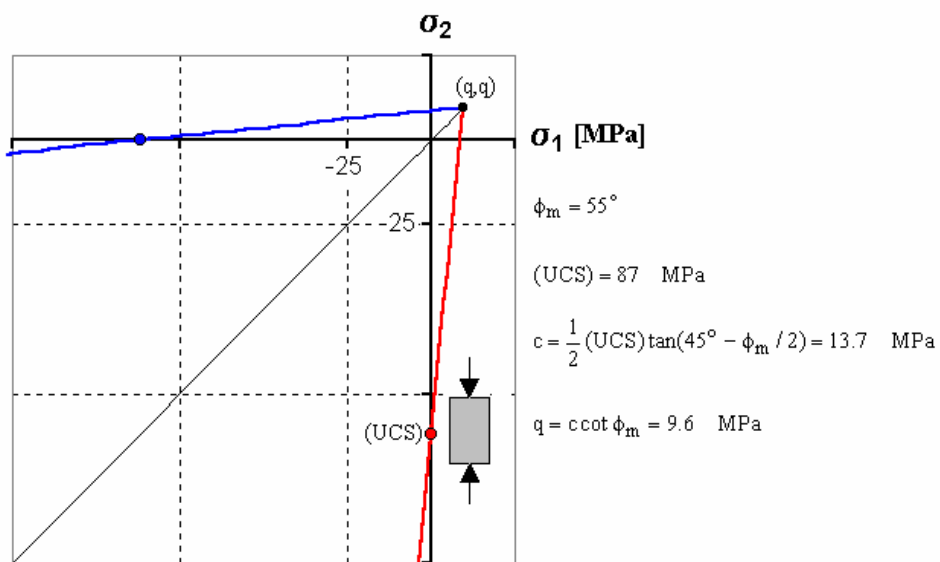
Σημειώνουμε ότι καμιά φορά η συνθήκη (M.-C.) θα γραφεί συναρτήσει της μέγιστης και της ελάχιστης κύριας τάσης

$$\sigma_2 = -\frac{2 \cos \varphi_m}{1 - \sin \varphi_m} c + \frac{1 + \sin \varphi_m}{1 - \sin \varphi_m} \sigma_1$$

ή

$$\sigma_2 = -2\sqrt{K_p} c + K_p \sigma_1$$

$$K_p = \frac{1 + \sin \varphi_m}{1 - \sin \varphi_m} = \tan^2(45^\circ + \varphi_m / 2) \text{ (συντελεστής παθητικής ωθήσεως)}$$



Παρατηρούμε τώρα ότι σε μία τριαξονική θλίψη με $\sigma_2 \leq \sigma_3 = \sigma_1$, έχουμε

$$p = \frac{1}{3}(2\sigma_1 + \sigma_2) = \frac{1}{3}(3\sigma_M + \tau_M) \quad , \quad T = \frac{1}{\sqrt{3}}(\sigma_1 - \sigma_2) = \frac{2}{\sqrt{3}}\tau_M$$

Εισάγοντας τη συνάρτηση διαρροής

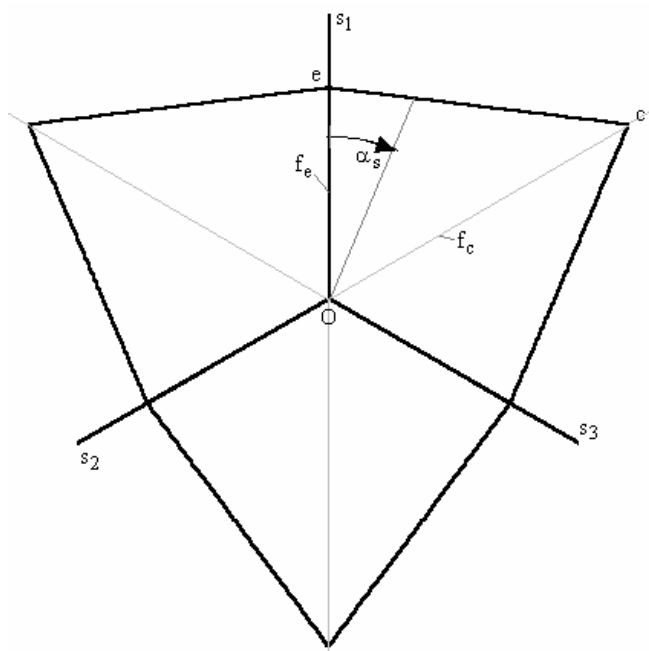
$$F = T - f_c(q - p)$$

έπεται ότι

$$F = 0 \Rightarrow f_c = \frac{T}{q - p} = \frac{(2/\sqrt{3})\tau_M}{q - \frac{1}{3}(3\sigma_M - \tau_M)} \Rightarrow f_c = \frac{2\sqrt{3} \sin\varphi_m}{3 + \sin\varphi_m}$$

Από πειράματα προκύπτει ότι γενικώς η ενεργοποιημένη γωνία τριβής ενός γεωυλικού σε τριαξονικό εφελκυσμό φ_m^e θα είναι κατά τι μεγαλύτερη από την αντίστοιχη τιμή φ_m^c σε τριαξονική θλίψη (π.χ. $\varphi_m^e - \varphi_m^c = 3^\circ \div 5^\circ$). Αντιστοίχως στο αποκλίνον επίπεδο έχουμε ότι,

- τριαξονική θλίψη ($\alpha_s = \pi/3$): $O_c = f_c = \frac{2\sqrt{3} \sin\varphi_m^c}{3 + \sin\varphi_m^c}$
- τριαξονικό εφελκυσμό ($\alpha_s = 0$): $O_e = f_e = \frac{2\sqrt{3} \sin\varphi_m^e}{3 - \sin\varphi_m^e}$



Μεταξύ των σημείων (e) και (c) μπορούμε να παρεμβάλουμε μία ευθεία που σε πολικές συντεταγμένες ($\rho = 2T/\sqrt{3}, \alpha_s$) περιγράφεται από τη σχέση,

$$\rho = \frac{1}{a \cos \alpha_s + b \sin \alpha_s}$$

Στην περίπτωση αυτή το ίχνος των αντίστοιχων επιφανειών διαρροής στο αποκλίνον επίπεδο είναι ένα μη-κανονικό εξάγωνο και η επιφάνεια διαρροής στο χώρο των κυρίων τάσεων είναι αντίστοιχα εξαγωνική πυραμίδα με άξονα τη χωροδιαγώνιο. Οι συντελεστές a και b στην παραπάνω έκφραση συνδέονται με την ενεργό γωνία τριβής σε τριαξονική θλίψη και τριαξονικό εφελκυσμό

$$a = \frac{1}{f_e} = \frac{1}{f_c} + \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad b = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{2}{f_c} - \frac{1}{f_e} \right) = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{f_c} - \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

Στην περίπτωση όπου κατά το κλασσικό προσομοίωμα M.-C. θα δεχθούμε ότι η ενεργοποιημένη γωνία τριβής είναι ανεξάρτητη της μέσης κύριας τάσεως, τότε έπεται ότι είναι η ίδια σε τριαξονική θλίψη και τριαξονικό εφελκυσμό,

$$\varphi_m^e = \varphi_m^c \Rightarrow b = \frac{1}{3}(\sqrt{3}a - 2)$$

Αναλυτικά οι συναρτήσεις διαρροής και πλαστικού δυναμικού κατά M.-C. έχουν ως εξής ($\alpha_s = \alpha_{s0}$, $0 \leq \alpha_{s0} \leq \pi/3$),

$$F = \sqrt{J_{2s}} \left(\sin(\alpha_s + \pi/3) + \frac{1}{\sqrt{3}} \cos(\alpha_s + \pi/3) \sin \varphi_m \right) - \sin \varphi_m \left(q - \frac{1}{3} I_{1\sigma} \right) \quad (\text{M.-C.})$$

Μια άλλη έκφραση της (γενικευμένης) συναρτήσεως διαρροής κατά (M.-C.) είναι η εξής,

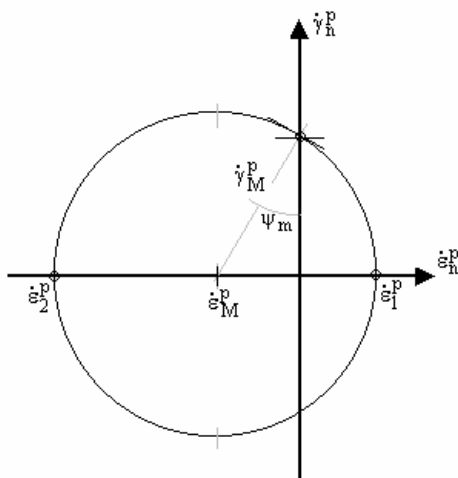
$$F = \sqrt{J_{2s}} (a(I_{1\sigma}, \Psi) \cos \alpha_s + b(I_{1\sigma}, \Psi) \sin \alpha_s) - \left(q(\Psi) - \frac{1}{3} I_{1\sigma} \right)$$

Η έκφραση αυτή επιτρέπει την προσομοίωση της περιπτώσεως εκείνης, όπου η ενεργοποιημένη γωνία τριβής είναι (συνήθως φθίνουσα) συνάρτηση της πίεσης.

• **Πλαστικό δυναμικό**

Ομοίως ορίζουμε την ενεργό γωνία πλαστικής διασταλτικότητας ψ_m κατά Hansen-Lundgren

$$\sin \psi_m = \frac{\dot{\epsilon}_1^p - \dot{\epsilon}_2^p}{\dot{\epsilon}_1^p + \dot{\epsilon}_2^p} \quad (\dot{\epsilon}_2^p < \dot{\epsilon}_3^p < \dot{\epsilon}_1^p)$$



Παρατηρούμε ότι η γωνία διασταλκότητας συνδέεται με τον λόγο ρυθμού πλαστικής παραμορφώσεως όγκου προς τον ρυθμό πλαστικής διατμητικής τροπής

$$\sin \psi_m = \frac{\dot{\varepsilon}_M^p}{\dot{\gamma}_M^p}$$

Συμφώνως προς το παραπάνω ορισμό η γωνία πλαστικής διασταλκότητας είναι θετική, $\psi_m > 0$, όταν η πλαστική αλλαγή του όγκου αντιστοιχεί σε διόγκωση.

Το αντίστοιχο πλαστικό δυναμικό έχει ως εξής

- $Q = \sqrt{J_{2s}} \left(\sin(\alpha_s + \pi/3) + \frac{1}{\sqrt{3}} \cos(\alpha_s + \pi/3) \sin \psi_m \right) - \sin \psi_m \left(q - \frac{1}{3} I_{1\sigma} \right)$

• **Βαθμίδες**

Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι

$$N_{ij} = \frac{\partial \hat{F}}{\partial I_{1\sigma}} \frac{\partial I_{1\sigma}}{\partial \sigma_{ij}} + \frac{\partial \hat{F}}{\partial J_{2s}} \frac{\partial J_{2s}}{\partial \sigma_{ij}} + \frac{\partial \hat{F}}{\partial J_{3s}} \frac{\partial J_{3s}}{\partial \sigma_{ij}} = N_0 \delta_{ij} + N_1 s_{ij} + N_2 t_{ij}$$

$$N'_{ij} = N'_0 \delta_{ij} + N'_1 s_{ij} + N'_2 t_{ij}$$

και

$$\frac{\partial \alpha_s}{\partial J_{2s}} = \frac{\cot 3\alpha_s}{2J_{2s}}, \quad \frac{\partial \alpha_s}{\partial J_{3s}} = -\frac{\cot 3\alpha_s}{3J_{3s}}$$

παίρνουμε τις εξής εκφράσεις,

- $N_0 = \frac{1}{3} \sin \varphi_m$

- $$N_1 = \begin{cases} \frac{3 + \sin \varphi_m}{4\sqrt{3}\sqrt{J_{2s}}} & (\alpha_s = 0) \\ \frac{\sin(\alpha_s + \pi/3)}{2\sqrt{J_{2s}}} \left(1 + \cot(\alpha_s + \pi/3) + \frac{\sin \varphi_m}{\sqrt{3}} (\cot(\alpha_s + \pi/3) - \cot(\alpha_s)) \right) & (0 < \alpha_s < \pi/3) \\ \frac{3 - \sin \varphi_m}{4\sqrt{3}\sqrt{J_{2s}}} & (\alpha_s = \pi/3) \end{cases}$$

- $$N_2 = \begin{cases} 0 & (\alpha_s = 0) \\ \frac{1}{2\sqrt{J_{2s}} \sin(3\alpha_s)} (\sin(\alpha_s + \pi/3) \sin \varphi_m - \sqrt{3} \cos(\alpha_s + \pi/3)) & (0 < \alpha_s < \pi/3) \\ 0 & (\alpha_s = \pi/3) \end{cases}$$

Ομοίως και για τους συντελεστές N'_v ($v = 0,1,2$)

Άσκηση

Να αποδειχθούν οι παραπάνω τύποι για τους συντελεστές N_v ($v = 0,1,2$) και να αναπτυχθούν οι αντίστοιχοι τύποι για τους συντελεστές N'_v ($v = 0,1,2$).

Παρατήρηση

Όσον αφορά την γενικευμένη συνάρτησης διαρροής κατά (M.-C.)

$$F = \sqrt{J_{2s}} (a(l_{1\sigma}, \Psi) \cos \alpha_s + b(l_{1\sigma}, \Psi) \sin \alpha_s) - \left(q(\Psi) - \frac{1}{3} l_{1\sigma} \right)$$

ισχύουν οι εξής εκφράσεις

- $$N_0 = \frac{1}{3} + \sqrt{J_{2s}} \left(\frac{\partial a}{\partial l_{1\sigma}} \cos \alpha_s + \frac{\partial b}{\partial l_{1\sigma}} \sin \alpha_s \right)$$

- $$N_1 = \frac{1}{2\sqrt{J_{2s}}} (a \cos \alpha_s + b \sin \alpha_s) + \frac{\cot 3\alpha_s}{2\sqrt{J_{2s}}} (-a \sin \alpha_s + b \cos \alpha_s)$$

- $N_2 = -\sqrt{J_{2s}} \frac{\cot 3\alpha_s}{3J_{3s}} (-a \sin \alpha_s + b \cos \alpha_s)$

5.8.4 Το προσομοίωμα Rankine

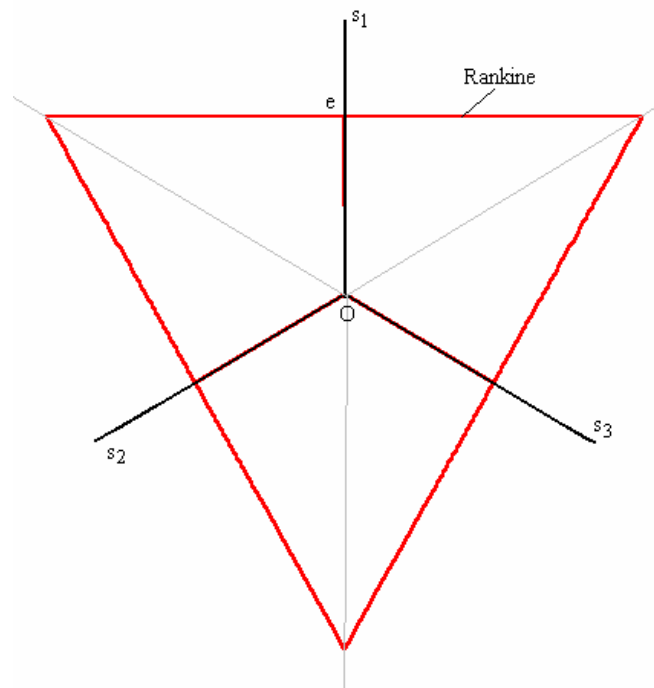
Η συμπεριφορά ψαθυρών υλικών καθορίζεται από τη μέγιστη τάση. Για $\alpha_s = \alpha_{s0}$, ($0 \leq \alpha_{s0} \leq \pi/3$),

$$F = \frac{2T}{\sqrt{3}} \cos(\alpha_s) + p - k(\Psi)$$

όπου

$$\sigma_T = k(\Psi)$$

είναι η αντίστοιχη εξάρτηση της μονοαξονικής εφελκυστικής τάσης από την παράμετρο Ψ .



Λαμβανομένου υπ' όψιν ότι γενικώς ισχύει

$$\sin \varphi_m = \frac{3f_e}{2\sqrt{3} - f_e}$$

και ότι στην περίπτωση του προσομοιώματος (R.)

$$f_e = \frac{T}{\sigma_T - p} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

διαπιστώνουμε ότι η παραδοχή Rankine ισοδυναμεί με την υπόθεση ότι η ενεργοποιημένη γωνία τριβής του υλικού είναι,

$$\underline{\phi_m = 90^\circ}$$

Για το λόγο αυτό το προσομοίωμα (R.) θεωρείται μη-ρεαλιστικό.

5.8.5 Το προσομοίωμα Lade

Μια λεία και εξίσου μονο-παραμετρική συνάρτηση, που παρεμβάλλεται μεταξύ των προσομοιωμάτων (D.-P.) και (M.-C.) είναι το μοντέλο Lade⁹¹,

$$F = III_\tau - (1 - \eta(\Psi)) \left(\frac{I_\tau}{3} \right)^3 \quad (L.)$$

όπου,

$$\tau_{ij} = \sigma_{ij} - q\delta_{ij}$$

$$I_\tau = \tau_{kk} \quad , \quad III_\tau = \det(\tau_{ij})$$

Εισάγοντας τώρα τη βοηθητική συνάρτηση,

$$\tan \phi_\sigma = \frac{T}{q-p}$$

η συνάρτηση (L.) γράφεται ως εξής ($\alpha_s = \alpha_{s0}$, $0 \leq \alpha_{s0} \leq \pi/3$)

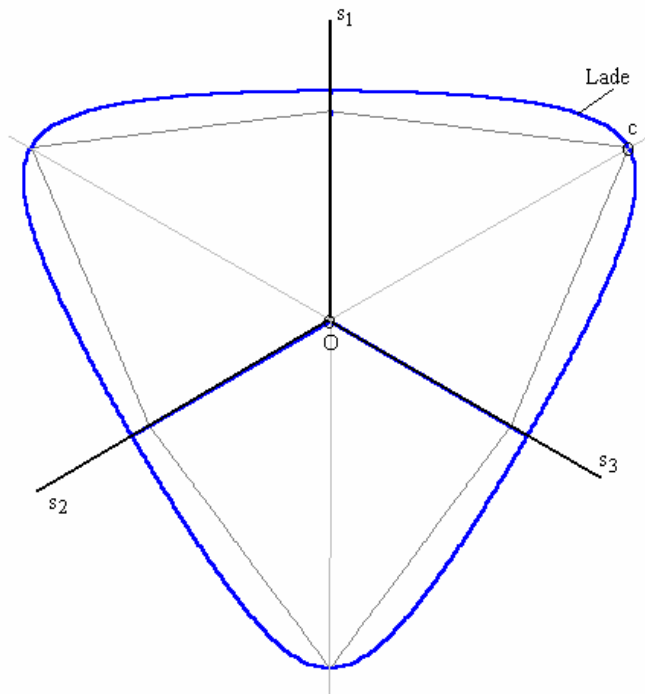
$$F = -\eta \cot^3 \phi_\sigma + \cot \phi_\sigma + \frac{2}{3\sqrt{3}} \cos(\alpha_s)$$

(γιατί;)

Όπως φαίνεται και από το σχήμα η επιφάνεια διαρροής κατά Lade είναι, σε αντίθεση με την επιφάνεια (M.-C.), μια λεία καμπύλη. Αυτή η ιδιότητα θεωρείται ως πλεονέκτημα , αφού οι βαθμίδα N_{ij} (και αντιστοίχως η N'_{ij}) είναι συνεχείς συναρτήσεις της αναλλοίωτης τασικής γωνίας ομοιότητας α_s ⁹².

⁹¹ P. Lade (1977). Elastoplastic stress-strain theory for cohesionless soil with curved yield surface. Int. J. Solids Struct., Vol. 13, 1019-1035.

⁹² Μια αρκετά πλήρης αναφορά στα διάφορα κατά καιρούς προταθέντα μοντέλα στην Εδαφομηχανική δίδεται στην εργασία του K. Hashiguchi (2002). A proposal of the simplest convex-conical surface for soils. Soils and Foundations, 42, 107-113.



Ασκήσεις

i. Να αποδειχτεί ότι για την επιφάνεια διαρροής (L.) ισχύει η σχέση

$$N_{ij} = ad(\bar{\tau})_{ij} - (1 - \eta) \frac{l_1 \tau}{3} \delta_{ij}$$

και να υπολογισθεί στην περίπτωση αυτή το εφαπτομενικό μέτρο κράτυσης

$$H_t = -\frac{\partial F}{\partial \Psi}$$

ii. Δίδονται 1 οι εξής σχέσεις που περιγράφουν την επιφάνεια διαρροής κατά Matsuoka & Nakai⁹³:

$$F = \frac{l_{1\sigma} II_{2\sigma}}{III_{3\sigma}} - 3^2 - 2^3 \sin \varphi_m \quad (\text{M\&N})$$

- $l_{1\sigma} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$

- $II_{2\sigma} = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{13} \\ \sigma_{31} & \sigma_{33} \end{vmatrix} = \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1$

⁹³ Matsuoka, H. And Nakai, T. (1974). Stress-deformation and strength characteristics of soil under three different principal stresses. Proc. Japan. Soc. Civil Engrs., 232, 59-70.

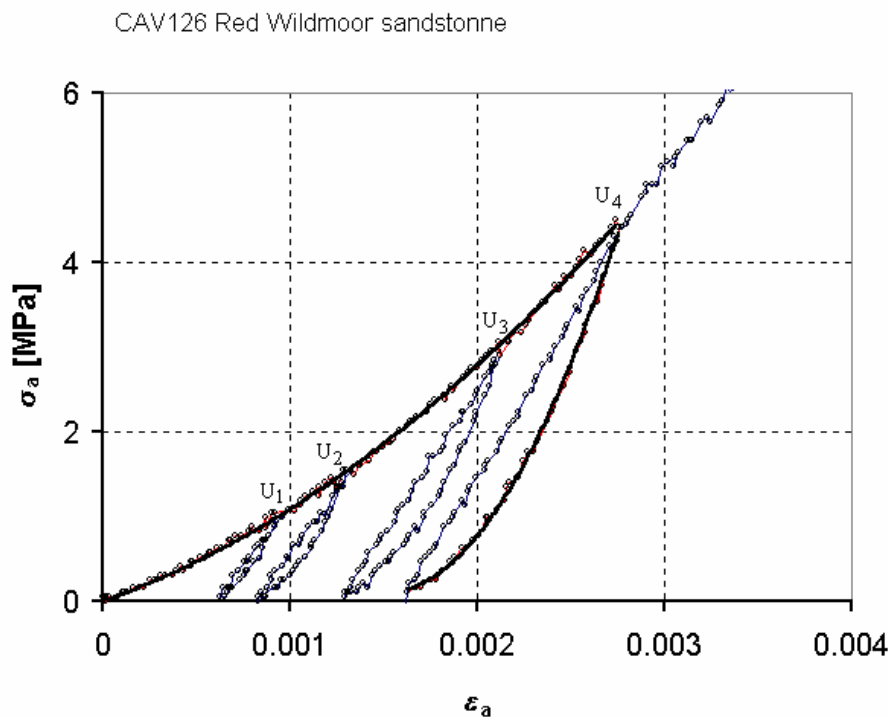
$$\bullet \quad III_{1\sigma} = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix} = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3$$

και φ_m είναι η ενεργοποιημένη γωνία τριβής σε τριαξονική θλίψη.

- i. Να βαθμονομηθεί η εν λόγω ε.δ. για $\varphi_m = 42^\circ$, και να σχεδιασθεί το ίχνος της στο αποκλίνον επίπεδο, $I_{1\sigma} = 300 \text{ kN}$.
- ii. Να υπολογισθεί ο αντίστοιχος τανυστής $N_{ij} = \partial F / \partial \sigma_{ij}$.

5.8.6 Ανισοτροπικά προσομιώματα

Η πραγματική συμπεριφορά των γεωυλικών κατά την αποφόρτιση δεν είναι ελαστική μέχρι τέλους. Αυτό φαίνεται στο παρακάτω γράφημα που αφορά την συμπεριφορά ενός ψαμμίτη σε μονοαξονική θλίψη. Πράγματι η καμπύλη αποφορτίσεως καμπυλώνεται έντονα όσο απομακρύνεται κανείς από το σημείο αποφόρτισης U . Το φαινόμενο αυτό λέγεται *επιστρέφουσα πλαστικότητα*⁹⁴.



⁹⁴ Αγγλ. *reverse plasticity*

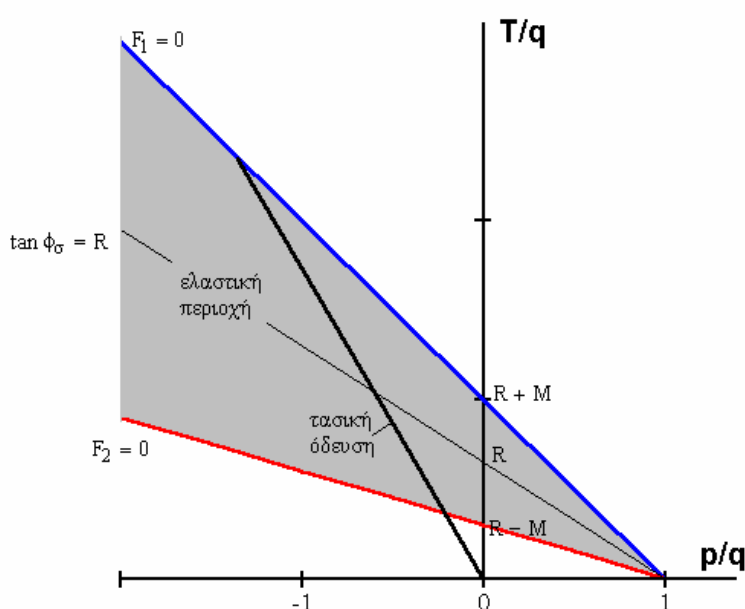
Ένας απλός τρόπος να προσομοιωθεί η συμπεριφορά αυτή είναι να προσφύγει κανείς σε θεωρίες πλαστικής ροής, όπου η επιφάνεια διαρροής και το πλαστικό δυναμικό εξελίσσονται ανισοτροπικά. Ως παράδειγμα αναφέρουμε εδώ το απλούστερο «γραμμικό» προσομοίωμα τύπου (D.-P.) που παρέχει αυτή την δυνατότητα⁹⁵,

$$F = \begin{cases} F_1 & : \tan \phi_\sigma > R \\ F_2 & : \tan \phi_\sigma < R \end{cases}$$

όπου

$$F_{1,2} = T - (R \pm M)(q - p)$$

$$\tan \phi_\sigma = \frac{T}{q - p}$$



Η συνάρτηση

$$R = \hat{R}(\Psi)$$

περιγράφει την ανάπτυξη της ανισοτροπίας, ενώ η συνάρτηση

$$M = \hat{M}(\Psi)$$

περιγράφει το εύρος της ελαστικής περιοχής.

⁹⁵ Το προσομοίωμα αυτό χρησιμοποιήθηκε πρόσφατα μέσα στα πλαίσια μιας θεωρίας ιξωδο-ελαστοπλαστικότητας, για την περιγραφή της ερπηστικής συμπεριφοράς υπερχαλαρών κοκκωδών εδαφών, πρβλ. di Prisco, C., Imposimato, S. and Vardoulakis, I. (2000). Mechanical modeling of drained creep triaxial tests on loose sand. *Geotechnique*, **50**, 73-82.

