

## I. Σύντομη Περιγραφή Περιεχομένων

Το σύγγραμμα αυτό απευθύνεται σε προπτυχιακούς και μεταπτυχιακούς φοιτητές Μηχανικούς, Εφηρμοσμένους Μαθηματικούς και Φυσικούς Εφαρμογών και συνιστά μία εισαγωγή στη μαθηματική θεωρία πλαστικότητας των απολύτως στερεών-ιδεατά πλαστικών υλικών. Η μαθηματική θεωρία επεξηγείται στη βάση πρακτικών παραδειγμάτων - κυρίως δανεισμένων από την Δομοστατική και την Εδαφομηχανική - και συμπληρώνεται από επιλεγμένες ασκήσεις. Η σχετική ειδική βιβλιογραφία δίδεται σε υποσημειώσεις μέσα στο κείμενο. Η γενική βιβλιογραφία σκιαγραφείται στη συνέχεια της παρούσης Εισαγωγής.

Στο 1<sup>ο</sup> κεφάλαιο δίδονται οι μαθηματικές βάσεις αλλά και οι βάσεις που αφορούν στη μαθηματική θεωρία αντοχής των υλικών. Ορίζονται οι διάφορες αναλλοίωτες ποσότητες του τανυστή των τάσεων, αποδίδεται το φυσικό τους νόημα και διατυπώνονται τα κλασσικά κριτήρια διαρροής κατά von Mises και Tresca. Στο 2<sup>ο</sup> κεφάλαιο θεμελιώνεται η μαθηματική θεωρία Πλαστικότητας απολύτως στερεών-ιδεατά πλαστικών, όλκιμων υλικών. Παρουσιάζονται οι βασικοί ορισμοί και παραδοχές πάνω στις οποίες αναπτύσσεται η θεωρία. Παράλληλα επεξηγούνται οι βασικές έννοιες και τέλος αναπτύσσονται οι εξισώσεις που διέπουν το γενικό πρόβλημα (οι λεγόμενες εξισώσεις Prandtl - Reuss) και γίνεται αναφορά στη βασική καταστατική υπόθεση που είναι γνωστή ως το αξίωμα 'καθετότητας' του Drucker. Στο τέλος του κεφαλαίου αυτού παρατίθεται το παράδειγμα της Τεχνικής θεωρίας πλαστικότητας ραβδωτών φορέων. Στο 3<sup>ο</sup> κεφάλαιο αναπτύσσονται και αποδεικνύονται τα θεωρήματα 'άνω' και 'κάτω' ορίου της μαθηματικής θεωρίας της πλαστικότητας, που βασίζονται στο αξίωμα καθετότητας. Τα θεωρήματα άνω και κάτω ορίου βασίζονται επίσης και σε μια γενική διατύπωση της Αρχής των Δυνατών Εργων, που επιτρέπει το χειρισμό ασυνεχειών στην παραμόρφωση. Η ισχύς των θεωρημάτων αυτών γίνεται κατανοητή με μια σειρά παραδειγμάτων, όπου επεξηγείται πώς κατασκευάζονται αντιστοίχως 'κινηματικώς επιτρεπτοί' μηχανισμοί καταρρεύσεως και 'στατικώς επιτρεπτά' πεδία εντάσεως για την εκτίμηση του φορτίου καταρρεύσεως μιας κατασκευής. Στο 4<sup>ο</sup> κεφάλαιο αναπτύσσεται η μέθοδος των 'χαρακτηριστικών γραμμών' (Χ.Γ.) ή μέθοδος των 'γραμμών ολισθήσεως'<sup>1</sup>. Παρουσιάζεται η γενική μεθοδολογία προσδιορισμού των (Χ.Γ.) κατά Collatz για συστήματα δύο οιονεί-γραμμικών μερικών διαφορικών εξισώσεων 'υπερβολικού τύπου', για δύο άγνωστες συναρτήσεις. Η γενική αυτή μεθοδολογία εφαρμόζεται στο επίπεδο στατικό και κινηματικό πρόβλημα της Ιδεατής Πλαστικότητας όλκιμων υλικών. Διατυπώνονται αντίστοιχα οι λεγόμενες εξισώσεις και θεωρήματα Hencky καθώς και οι εξισώσεις Geiringer της Ιδεατής Πλαστικότητας. Η μέθοδος των (Χ.Γ.) εφαρμόζεται για την επίλυση επίπεδων προβλημάτων παραμορφώσεως και επεξηγείται σε μια σειρά εφαρμογών. Οι 'ακριβείς' λύσεις συγκρίνονται με τα αντίστοιχα φράγματα, που προσδιορίστηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο με τη χρήση των θεωρημάτων άνω και κάτω ορίου. Τέλος στο 5<sup>ο</sup> κεφάλαιο παρουσιάζεται το στατικό επίπεδο πρόβλημα οριακής αναλύσεως για υλικά με εσωτερική τριβή. Αφού γίνει μια σύντομη εισαγωγή στη συμπεριφορά μη-συνεκτικών (κοκκωδών) υλικών, διατυπώνονται οι εξισώσεις του αντίστοιχου στατικού προβλήματος (εξισώσεις Koetter-Massau), οι οποίες και εφαρμόζονται για την επίλυση στοιχειδών προβλημάτων Εδαφομηχανικής.

Παιανία, Μαρτίος 2003

<sup>1</sup> Αγγλ. *slip-line method*.

## II. Βασική Βιβλιογραφία

### A . Ιδεατή Πλαστικότητα όλκιμων Υλικών

1. L.M. Kachanov, *Fundamentals of the Theory of Plasticity*, Mir Publishers, 1974.
2. W. Johnson and P.B. Mellor, *Engineering Plasticity*, Van Nostrand , 1973.

Για μια πληρέστερη κάλυψη του περιεχομένου του μαθήματος από τα παραπάνω συγγράμματα συστήνουμε ενθέρμως το κλασσικό βιβλίο του καθηγητού L.M. Kachanov. Το βιβλίο των Johnson & Mellor είναι επίσης χρήσιμο, διότι περιέχει πολλά λυμένα πρακτικά παραδείγματα και εφαρμογές, κυρίως ενδιαφέρουσες για το Μηχανολόγο και Μεταλλουργό Μηχανικό.

### B. Μαθηματική Θεωρία της Πλαστικότητας

1. R. Hill, *The Mathematical Theory of Plasticity*, Oxford Univ. Press, 1950.
2. T.Y. Thomas, *Plastic Flow and Fracture in Solids*, Academic Press, 1961.

Το σύγγραμμα του Rodney Hill, αν και θεωρείται κλασσικό και ίσως το πρώτο στο είδος του, είναι μάλλον δυσνόητο. Το βιβλίο του T.Y. Thomas είναι μοναδικό στο είδος του και το συστήνουμε ενθέρμως, λόγω ενός εκπληκτικού συνδυασμού μαθηματικής αυστηρότητας και απλότητας. Στο βιβλίο αυτό ανπτύσσεται πλήρως η θεωρία των λεγόμενων 'ασυνεχών' πεδίων, που παίζουν κεντρικό ρόλο σε όλα τα προβλήματα της Μηχανικής που διέπονται από εξισώσεις 'υπερβολικού' τύπου.

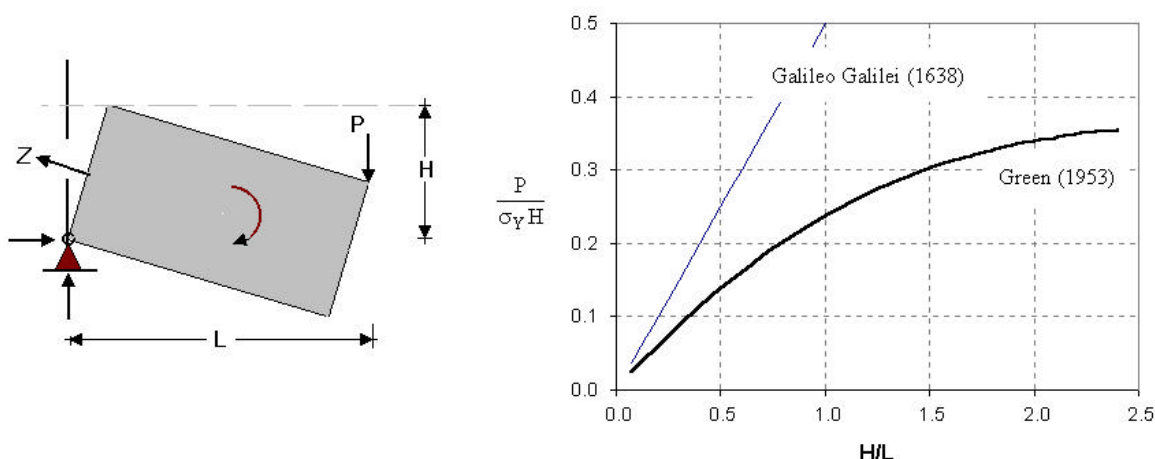
### Γ. Πλαστικότητα Γεωυλικών

1. W. F. Chen, *Limit Analysis and Soil Plasticity*, Elsevier, 1975.
2. W.F. Chen and D.J. Han, *Plasticity for Structural Engineers*, Springer, 1988.
3. V.V. Sokolovskii, *Statics of Granular Media*, Pergamon Press, 1965.

Από τα παραπάνω κλασσικά συγγράμματα συστήνουμε ενθέρμως το βιβλίο των Chen & Han, το οποίο καλύπτει πλήρως τη θεωρία πλαστικότητας για Δομοστατικούς Μηχανικούς. Το βιβλίο αυτό καλύπτει την αντίστοιχη θεωρία για όλκιμα και ψαθυρά υλικά (υλικά με 'εσωτερική τριβή') και περιλαμβάνει επιπλέον τη θεωρία 'κρατυνόμενης' πλαστικότητας. Το βιβλίο του W.F. Chen περιέχει ένα θησαυρό από χρήσιμα λελυμένα προβλήματα από την περιοχή της Γεωμηχανικής. Τέλος στο κλασσικό βιβλίο του V.V. Sokolonskii θα βρεί κανείς μια πλήρη παρουσίαση της μεθόδου των γραμμών ολισθήσεως, όπως αυτή εφαρμόζεται στην Εδαφομηχανική των κοκκωδών υλικών.

### III. Ιστορικό Σημείωμα

Από το βιβλίο του H. M. Westergaard<sup>2</sup>, "*Theory of Elasticity and Plasticity*"<sup>3</sup>, παραθέτουμε την εξής αναφορά: "...Κανείς άλλος παρά ο Γαλιλέος (1564-1642), ο ιδρυτής της σύγχρονης εισημης, ξεκίνησε με μια απο τις εργασίες του τη Μηχανική των Υλικών. Στην τελευταία του δημοσίευση με τίτλο, **Δύο νέες επιστήμες**, που ολοκληρώθηκε το 1636 και δημοσιεύθηκε το 1638, συμπεριέλαβε και μια πραγματεία επι του θέματος της αστοχίας ενός προβόλου δια θραύσεως της διατομής του στη θέση της πακτώσεως. Ο Γαλιλέος υπέθεσε ότι το υλικό είναι στερεό. Η υπόθεσή του ότι η θλίπτική περιοχή εντοπίζεται στο κατώτερο άκρο της διατομής αστοχίας και ότι ο εφελκυσμός είναι ομοιόμορφα κατανεμημένος καθ' ύψος της διατομής αντίκειται στο νόμο του Hooke αλλά θα μπορούσε να είναι ορθή κάτω από κάποιο υποθετικό νόμο για την πλαστική φάση..."



Η πρώτη αυτή θεωρία Αντοχής του Γαλιλέου έδωσε λοιπόν την εξής λύση για το φορτίο καταρρεύσεως του προβόλου<sup>4</sup>,

$$P \cdot L = Z \cdot \frac{H}{2} \Rightarrow \frac{P}{\sigma_y H} = \frac{1}{2} \frac{H}{L}$$

Όπως θα δούμε στο 4<sup>ο</sup> κεφάλαιο του παρόντος συγγράμματος, η μαθηματική θεωρία της Πλαστικότητας, ανάμεσα στ' άλλα, θα μας επιτρέψει τελικά να δώσουμε μια σημαντικά πιά ασφαλή εκτίμηση για το κρίσιμο φορτίο καταρρεύσεως του προβόλου. Η αντίστοιχη λύση δόθηκε από τον Green το 1953, τρεις αιώνες μετά τον Γαλιλέο.

<sup>2</sup> H. M. Westergaard Gordon McKay Professor of Civil Engineering, Harvard University.

<sup>3</sup> H. M. Westergaard, "*Theory of Elasticity and Plasticity*", Harvard Univ. Press, 1952.

<sup>4</sup> Με  $\sigma_y$  συμβολίζουμε την αντοχή του υλικού σε εφελκυσμό.

# PLASTICITY

---

## *A Mechanics of the Plastic State of Matter*

---

BY

A. NÁDAI

Consulting Engineer, Westinghouse Electric and  
Manufacturing Company, East Pittsburgh, Pa.;  
Research Professor, University of Pittsburgh

ASSISTED BY

A. M. WAHL, Ph.D.

Research Laboratories of the Westinghouse Electric  
and Manufacturing Company, East Pittsburgh, Pa.



REVISED AND ENLARGED FROM  
THE FIRST GERMAN EDITION

SECOND IMPRESSION

McGRAW-HILL BOOK COMPANY, Inc.

NEW YORK AND LONDON

1931

PART II

SOME APPLICATIONS OF THE MECHANICS OF THE  
PLASTIC STATE OF MATTER TO GEOLOGY AND  
GEOPHYSICS