# ΠΑΡΑΡΤΗΜΑΤΑ

## **Παράρτημα Ι :** *Ισότροπες τανυστικές συναρτήσεις*[1]

**Ορισμός**: Ο συμμετρικός τανυστής $\mathbf{B}$ καλείται *ισότροπη συνάρτηση* του συμμετρικού τανυστή $\mathbf{A}$

$$\mathbf{B} = \mathbf{f}(\mathbf{A}) \tag{A.1}$$

όταν <u>για κάθε</u> κανονικό ορθογώνιο τανυστή $\mathbf{Q}$ ισχύει η σχέση,

$$\underline{\mathbf{Q}\mathbf{B}\mathbf{Q}^{\mathrm{T}} = \mathbf{f}(\mathbf{Q}\mathbf{A}\mathbf{Q}^{\mathrm{T}})} \tag{A.2}$$

**Θεώρημα:** Ο συμμετρικός τανυστής $\mathbf{B}$ είναι τότε και μόνον τότε ισότροπη συνάρτηση του συμμετρικού τανυστή $\mathbf{A}$, άν ισχύει η εξής γενική παράσταση

$$\mathbf{B} = \mathrm{B}_0\mathbf{I} + \mathrm{B}_1\mathbf{A} + \mathrm{B}_2\mathbf{A}^2 \tag{A.3}$$

όπου οι $\mathrm{B}_\nu \quad (\nu = 0,1,2)$ είναι συναρτήσεις των αναλλοίωτων του τανυστή $\mathbf{A}$

$$\mathrm{B}_\nu = \widehat{\mathrm{B}}_\nu(\mathrm{I}_\mathrm{A}, \mathrm{II}_\mathrm{A}, \mathrm{III}_\mathrm{A}) \tag{A.4}$$

<u>*Απόδειξη:*</u>

Οι συμμετρικοί τανυστές $\mathbf{A}$ και $\mathbf{B}$ έχουν πραγματικές ιδιο-τιμές και ιδιο-κατευθύνσεις. Κατ' αρχήν θα αποδείξουμε ότι οι κύριοι άξονες των τανυστών $\mathbf{A}$ και $\mathbf{B}$ ταυτίζονται.

Στο σύστημα $O(x_{1'}, x_{2'}, x_{3'})$ των κυρίων αξόνων του $\mathbf{A}$ τα διανύσματα βάσης συμβολίζονται με $\vec{e}_{1'}, \vec{e}_{2'}, \vec{e}_{3'}$ και ο $\mathbf{A}$ δίνεται από τον πίνακα των ιδιο-τιμών του,

$$[\overline{A}] = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{bmatrix}, \quad \text{δηλ.} \quad A_{1'1'} = \alpha_1,\ A_{1'2'} = 0,\ \text{κ.ο.κ.}$$

Επιλέγουμε το κανονικό ορθογώνιο μητρώο,

$$[\overline{Q}^{(3)}] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & +1 \end{bmatrix}, \quad \det[\overline{Q}^{(3)}] = +1$$

Υπενθυμίζουμε ότι κατά τον μετασχηματισμό

$$x_{i''} = Q_{i''k'} x_{k'}$$

---

[1] C. Truesdell and W. Noll. *Non-Linear Field Theories of Mechanics*. Vol. III/3, Sect. 12, Springer, 1965.

που αντιστοιχεί σε στροφή ή κατοπτρισμό, τα στοιχεία του μητρώου $\lfloor\overline{Q}\rfloor$ δίνονται από τα εσωτερικά γινόμενα των αντίστοιχων διανυσμάτων βάσης

$$Q_{i''k'} = \vec{e}_{i''} \cdot \vec{e}_{k'}$$

Αρα ο μετασχηματισμός που αντιστοιχεί στο παραπάνω μητρώο $\lfloor\overline{Q}^{(3)}\rfloor$, αντιστοιχεί με τη σειρά του σε μία στροφή περί τον άξονα $Ox_{3'}$ κατά γωνία $180^\circ$. Αυτό σημαίνει ότι το διάνυσμα $\vec{e}_{3'}$ είναι κοινό ιδιο-άνυσμα των τανυστών $\mathbf{A}$ και $\mathbf{Q}^{(3)}$.

Αναλυτικά μπορεί κανείς να δείξει ότι ισχύει η σχέση,

$$Q^{(3)}AQ^{(3)T} = A \qquad (A.5)$$

ή

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & +1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & +1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{bmatrix}$$

Ισχύουν τώρα οι παρακάτω ισότητες:

- Εξ. (5) $\Rightarrow$ $\mathbf{f}(\mathbf{Q}^{(3)}\mathbf{A}\mathbf{Q}^{(3)T}) = \mathbf{f}(\mathbf{A})$
- Εξ. (2) $\Rightarrow$ $\mathbf{f}(\mathbf{Q}^{(3)}\mathbf{A}\mathbf{Q}^{(3)T}) = \mathbf{Q}^{(3)}\mathbf{B}\mathbf{Q}^{(3)T}$
- Εξ. (1) : $\mathbf{f}(\mathbf{A}) = \mathbf{B}$

Αρα οι $\mathbf{Q}^{(3)}$ και $\mathbf{B}$ είναι πολλαπλασιαστικά αντιμεταθετοί,

- $\mathbf{Q}^{(3)}\mathbf{B}\mathbf{Q}^{(3)T} = \mathbf{B} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{Q}^{(3)}\mathbf{B} = \mathbf{B}\mathbf{Q}^{(3)}$

Επειδή το $\mathbf{e}_{3'}$ είναι ιδιο-άνυσμα του $\mathbf{Q}^{(3)}$ για την ιδιο-τιμή +1,

$$\mathbf{Q}\mathbf{e}_{3'} = +1\mathbf{e}_{3'}$$

έχουμε ότι

$$\mathbf{Q}^{(3)}\mathbf{B}\mathbf{e}_{3'} = \mathbf{B}\mathbf{Q}^{(3)}\mathbf{e}_{3'} = \mathbf{B}\mathbf{e}_{3'}$$

Δηλαδή το διάνυσμα $\mathbf{B}\mathbf{e}_{3'}$ είναι επίσης ιδιο-άνυσμα του $\mathbf{Q}^{(3)}$ για την ιδιο-τιμή +1. Ολα όμως τα ιδιο-ανύσματα του $\mathbf{Q}^{(3)}$ για την ιδιο-τιμή +1 πρέπει να είναι πολλαπλάσια του $\mathbf{e}_{3'}$, οπότε

$$\mathbf{B}\mathbf{e}_{3'} = \beta_3\mathbf{e}_{3'}$$

δηλαδή το $\mathbf{e}_{3'}$ είναι ιδιο-άνυσμα του $\mathbf{B}$ για την ιδιο-τιμή $\beta_3$.

Η παραπάνω διαδικασία μπορεί να επαναληφθεί και για τα διανύσματα $\mathbf{e}_{1'}$ και $\mathbf{e}_{2'}$. Αρα οι τανυστές $\mathbf{A}$ και $\mathbf{B}$ έχουν τους ίδιους κύριους άξονες (είναι ομοαξονικοί) και σε σύστημα κοινών κυρίων αξόνων οι τανυστές αυτοί παρίστανται από τους πίνακες των ιδιο-τιμών τους

$$[\overline{\mathbf{A}}]=\begin{bmatrix}\alpha_1 & 0 & 0\\ 0 & \alpha_2 & 0\\ 0 & 0 & \alpha_3\end{bmatrix}, \quad [\overline{\mathbf{B}}]=\begin{bmatrix}\beta_1 & 0 & 0\\ 0 & \beta_2 & 0\\ 0 & 0 & \beta_3\end{bmatrix}$$

Από τη σχέση (Α.3) έπεται το παρκάτς σύστημα εξισώσεων μεταξύ των ιδιοτιμών τςν δύο τανυστών

$$\begin{aligned}\beta_1 &= B_0+\alpha_1 B_1+\alpha_1^2 B_2\\ \beta_2 &= B_0+\alpha_2 B_1+\alpha_2^2 B_2\\ \beta_3 &= B_0+\alpha_3 B_1+\alpha_3^2 B_2\end{aligned} \quad \text{or} \quad \begin{bmatrix}1 & \alpha_1 & \alpha_1^2\\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2\\ 1 & \alpha_3 & \alpha_3^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}B_0\\ B_1\\ B_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \beta_3\end{bmatrix} \qquad (A.6)$$

Η ορίζουσα του συστήματος είναι

$$D=\det\begin{bmatrix}1 & \alpha_1 & \alpha_1^2\\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2\\ 1 & \alpha_3 & \alpha_3^2\end{bmatrix}=(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_2-\alpha_3)(\alpha_1-\alpha_3)$$

Οταν οι ιδιοτιμές του τανυστή $\mathbf{A}$ είναι διάφορεσ μεταξύ τους, τότε

$$D=(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_2-\alpha_3)(\alpha_1-\alpha_3)\neq 0$$

γεγονός που σημαίνει ότι οι συντελεστές $B_\nu$ είναι μονοσήμαντα προσδιοριστέοι.

Παρατηρούμε τώρα ότι

$$[A]^0=\begin{bmatrix}\alpha_1^0 & 0 & 0\\ 0 & \alpha_2^0 & 0\\ 0 & 0 & \alpha_3^0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=[I] \qquad \text{ή} \qquad \mathbf{A}^0=\mathbf{I}$$

$$[A]^1=\begin{bmatrix}\alpha_1^1 & 0 & 0\\ 0 & \alpha_2^1 & 0\\ 0 & 0 & \alpha_3^1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha_1 & 0 & 0\\ 0 & \alpha_2 & 0\\ 0 & 0 & \alpha_3\end{bmatrix}=[A] \qquad \text{ή} \qquad \mathbf{A}^1=\mathbf{A}$$

$$[A]^2 = \begin{bmatrix} \alpha_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3^2 \end{bmatrix} \quad , \quad ή \quad \mathbf{A}^2 = \mathbf{A}\,\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^T\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A} = \mathbf{A}^T\mathbf{A}^T$$

οπότε από τη σχέση

$$\mathbf{B} = \mathbf{f}(\mathbf{A}) = \mathrm{B}_0(\mathbf{A})\,\mathbf{A}^0 + \mathrm{B}_1(\mathbf{A})\,\mathbf{A}^1 + \mathrm{B}_2(\mathbf{A})\,\mathbf{A}^2$$

παίρνουμε τη σχέση

$$\mathbf{QBQ}^{\mathrm{T}} = \mathbf{f}(\mathbf{QAQ}^{\mathrm{T}}) = \mathrm{B}_0\,\mathbf{QA}^0\mathbf{Q}^{\mathrm{T}} + \mathrm{B}_1\,\mathbf{QA}^1\mathbf{Q}^{\mathrm{T}} + \mathrm{B}_2\,\mathbf{QAQ}^{\mathrm{T}}\mathbf{QAQ}^{\mathrm{T}}$$

Επειδή

$$\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q} = \mathbf{I}$$

και με το συμβολισμό

$$\mathbf{A}' = \mathbf{QAQ}^{\mathrm{T}} \quad , \quad \mathbf{B}' = \mathbf{QBQ}^{\mathrm{T}}$$

παίρνουμε

$$\mathbf{B}' = \mathbf{f}(\mathbf{A}') = \mathrm{B}_0(\mathbf{A})\,\mathbf{A}'^0 + \mathrm{B}_1(\mathbf{A})\,\mathbf{A}'^1 + \mathrm{B}_2(\mathbf{A})\,\mathbf{A}'^2$$

Αρα οι συντελεστές $\mathrm{B}_\nu$ δεν αλλάζουν όταν ο τανυστής $\mathbf{A}$ αντικατασταθεί από τον συζυγή του $\mathbf{A}'$. Αρα οι συντελεστές $\mathrm{B}_\nu$ είναι συναρτήσεις των αναλοιώτων του τανυστή $\mathbf{A}$

$$\mathrm{B}_0 = \mathrm{B}_0(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$$

$$\mathrm{B}_1 = \mathrm{B}_1(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$$

$$\mathrm{B}_2 = \mathrm{B}_2(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$$

Αρά αποδείξαμε το ευθύ.

Αντιστρόφως ειναι προφανές ότι η πολυονυμική παράσταση (A.3) ορίζει μια ισότροπη συνάρτηση.

*ο.ε.δ.*

Παρατηρούμε ότι σε τυχόν Καρτεσιανό σύστημα οι παράσταση μιας ισότροπης συναρτήσεως ανός τανυστού παίρναι την εξής μορφή:

$$B_{ij} = \widehat{B}_0(\mathrm{I}_{\mathrm{A}}, \mathrm{II}_{\mathrm{A}}, \mathrm{III}_{\mathrm{A}})\delta_{ij} + \widehat{B}_1(\mathrm{I}_{\mathrm{A}}, \mathrm{II}_{\mathrm{A}}, \mathrm{III}_{\mathrm{A}})A_{ij} + \widehat{B}_2(\mathrm{I}_{\mathrm{A}}, \mathrm{II}_{\mathrm{A}}, \mathrm{III}_{\mathrm{A}})A_{ik}A_{kj} \qquad \text{(A.18)}$$

**Παράδειγμα:**

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$\mathbf{B} = \mathbf{f}(\mathbf{A}) = \sqrt{\mathbf{A} - \mathbf{I}} \qquad \text{(A.7)}$$

όπου $\mathbf{A}$ και $\mathbf{B}$ είναι συμμετρικοί τανυστές. Θα δείξουμε ότι κάτω από ορισμένες συνθήκες η συνάρτηση αυτή είναι μια ισοτροπη τανυστική συνάρτηση.

Επειδή ο τανυστής $\mathbf{A}$ είναι συμματρικός μπορούμε να γράψουμε την παραπάνω εξίσωση στο Καρτεσιανό σύστημα των κυρίων αξόνων. Στο σύστημα αυτό ορίζουμε τη συνάρτηση της τετραγωνικής ρίζας ενός συμμετρικού τανυστή ως εκείνο τον τανυστή $\mathbf{B}$, ο οποίος έχει στο σύστημα αυτό τις εξής ιδιοτιμές

$$\begin{aligned} \beta_1^2 &= \alpha_1 - 1 \geq 0 & & \beta_1 = +\sqrt{\alpha_1 - 1} \geq 0 \\ \beta_2^2 &= \alpha_2 - 1 \geq 0 & \Rightarrow \quad & \beta_2 = +\sqrt{\alpha_2 - 1} \geq 0 \\ \beta_3^2 &= \alpha_3 - 1 \geq 0 & & \beta_3 = +\sqrt{\alpha_3 - 1} \geq 0 \end{aligned}$$

Αρα για να έχει ο τανυστής $\mathbf{B}$ πραγματικές ιδιοτιμές πρέπει να δεχθούμε ότι

$$\alpha_\nu \geq 1 \quad (\nu = 1,2,3)$$

Δεχόμεθα ότι η συνάρτση της τετραγωνικής ρίζας (Α.7) έχει νόημα στα πλαίσια των συναρτήσεων που περιέχονται στο παραπάνω θεώρημα, εξ. (Α.1), οπότε συμφώνως προς την εξ. (Α.6) έχουμε τη σχέση

$$\begin{bmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 \\ 1 & \alpha_3 & \alpha_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_0 \\ B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{\alpha_1 - 1} \\ \sqrt{\alpha_2 - 1} \\ \sqrt{\alpha_3 - 1} \end{bmatrix}$$

Από το νόμο του Krammer παίρνουμε:

$$B_0 = \frac{1}{D} \det \begin{bmatrix} \sqrt{\alpha_1 - 1} & \alpha_1 & \alpha_1^2 \\ \sqrt{\alpha_2 - 1} & \alpha_2 & \alpha_2^2 \\ \sqrt{\alpha_3 - 1} & \alpha_3 & \alpha_3^2 \end{bmatrix} \qquad \text{(A.8.1)}$$

$$B_1 = \frac{1}{D} \det \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{\alpha_1 - 1} & \alpha_1^2 \\ 1 & \sqrt{\alpha_2 - 1} & \alpha_2^2 \\ 1 & \sqrt{\alpha_3 - 1} & \alpha_3^2 \end{bmatrix} \qquad \text{(A.8.2)}$$

$$B_2 = \frac{1}{D}\det\begin{bmatrix} 1 & \alpha_1 & \sqrt{\alpha_1 - 1} \\ 1 & \alpha_2 & \sqrt{\alpha_2 - 1} \\ 1 & \alpha_3 & \sqrt{\alpha_3 - 1} \end{bmatrix} \tag{A.8.3}$$

Οι παραπάνω σχέσεις αποδεικνύοθν ότι η ζητουμενη συνάρτηση

$$\mathbf{B} = f(\mathbf{A}) = \sqrt{\mathbf{A} - \mathbf{I}}$$

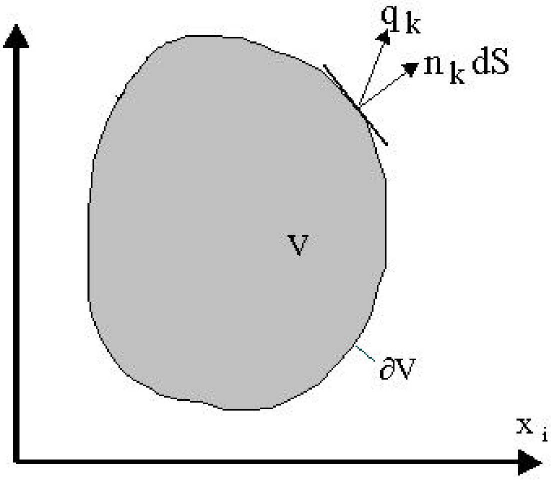
μπορεί να κατασκευασθεί. Πράγματι σε τυχαίο Καρτεσιανό σύστημα έχουμε βάσει του ως ανω θεωρήματος την εξής αναπαράσταση της εν λόγω συναρτήσεως

$$B_{ij} = \frac{1}{D}\left\{\det\begin{bmatrix} \sqrt{\alpha_1 - 1} & \alpha_1 & \alpha_1^2 \\ \sqrt{\alpha_2 - 1} & \alpha_2 & \alpha_2^2 \\ \sqrt{\alpha_3 - 1} & \alpha_3 & \alpha_3^2 \end{bmatrix}\delta_{ij} + \det\begin{bmatrix} 1 & \sqrt{\alpha_1 - 1} & \alpha_1^2 \\ 1 & \sqrt{\alpha_2 - 1} & \alpha_2^2 \\ 1 & \sqrt{\alpha_3 - 1} & \alpha_3^2 \end{bmatrix}A_{ij} + \det\begin{bmatrix} 1 & \alpha_1 & \sqrt{\alpha_1 - 1} \\ 1 & \alpha_2 & \sqrt{\alpha_2 - 1} \\ 1 & \alpha_3 & \sqrt{\alpha_3 - 1} \end{bmatrix}A_{ik}A_{kj}\right\}$$

όπου

$$D = (\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_2 - \alpha_3)(\alpha_1 - \alpha_3) \neq 0$$

## **Παράρτημα II**: *Το Θεώρημα Αποκλίσεως*[2]




Θεωρούμε ένα χωρίο V του $\Re^3$ που περιβάλλεται από το σύνορο $\partial V$. Στο τυχόν σημείο του συνόρου ορίζουμε την στοιχειώδη επιφάνεια dS με μοναδιαίο εξωτερικό διάνυσμα $n_i$. Εστω στο χωρίο αυτό μία διανυσματική συνάρτηση $q_i = q_i(x_k)$ $(i, k = 1, 2, 3)$, που είναι συνεχής και έχει συνεχείς πρώτες παραγώγους. Τότε ισχύει

$$\boxed{\int_V \frac{\partial q_k}{\partial x_k} dV = \int_{\partial V} q_k n_k dS}$$

δηλαδή το ολοκλήρωμα της αποκλίσεως ενός διανυσματικού πεδίου πάνω στο χωρίο V ισούται με την συνολική «ροή» του πεδίου μέσω του συνόρου $\partial V$.

[2]Το θεώρημα αυτό παρουσιάστηκε υπό διαφορετικές μορφές από τούς Lagrange (1762), Gauss (1813), Ostrogradsky (1831) και Green (1828). Καμιά φορά αποκαλείται άχρωμα και *Θεώρημα Απόκλισης* (Αγγλ. *Divergence Theorem, πρβλ.* Γ. Παντελίδη, *Ανάλυση*, Τμ. II, Εκδ. Ζήτη, 2001).