

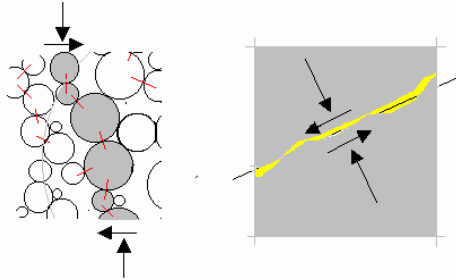
5 ΟΡΙΑΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΥΛΙΚΩΝ ΜΕ ΕΣΩΤΕΡΙΚΗ ΤΡΙΒΗ

5	ΟΡΙΑΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΥΛΙΚΩΝ ΜΕ ΕΣΩΤΕΡΙΚΗ ΤΡΙΒΗ	149
5.1	Γεωυλικά: Υλικά με Εσωτερική Τριβή	151
5.2	Τριβή και Διασταλτικότητα	152
5.3	Θεωρία Διασταλτικής Τριβής κατά Taylor	157
5.4	Γεωμετρική Θεωρία πλαστικότητας	160
5.5	Ιδεατά Πλαστικά-Απολύτως Στερεά Υλικά με Εσωτερική Τριβή	163
5.6	Το Στατικό Πρόβλημα της Οριακής Αναλύσεως για μη-συνεκτικά Υλικά	166
5.6.1	Οι εξισώσεις Kötter-Massau	166
5.6.2	Ζώνες Rankine	168
5.6.3	Το απείρως εκτεινόμενο πρανές	173
5.6.4	Φορτίο καταρρεύσεως πεδילוδοκού για αβαρές υλικό	175

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζουμε συνοπτικά το στατικό πρόβλημα της οριακής αναλύσεως για μη-συνεκτικά υλικά (υλικά με εσωτερική τριβή).

5.1 Γεωυλικά: Υλικά με Εσωτερική Τριβή

Η ιδιότητα η οποία διακρίνει τα Γεωυλικά¹ από άλλα υλικά, όπως π.χ. τα μέταλλα, είναι η προεξάρχουσα ευαισθησία τους στην επιβαλλόμενη μέση ορθή τάση², η οποία αποδίδεται στην ύπαρξη "εσωτερικής" τριβής. Η εσωτερική τριβή αναπτύσσεται σε μικρο-δομικό επίπεδο, είτε μεταξύ κόκκων είτε στα χείλη εσωτερικών μικρορωγμών, τυχαία καταναμημένων μέσα στο (REV), Εικ. 5-1.



Εικ. 5-1: Μοκροδομικές εστίες εσωτερικής τριβής: επαφές κόκκων και χείλη μικρορωγμών

Συμφώνως προς όσα αναπτύξαμε στο Κεφ. 1.4, υπενθυμίζουμε ότι για ισότροπες μικροδομές η μέση ορθή τάση και η μέση διατμητική τάση πάνω στην επιφάνεια ενός σφαιρικού (REV) δίδονται από αναλλοίωτο του τανυστή των τάσεων και από τη δεύτερη αναλλοίωτο του αποκλίνοντος του τανυστή των τάσεων, αντιστοίχως. Οπότε για υλικά ευαίσθητα στη μέση ορθή τάση και υπό καθεστώς συνεχιζόμενης φορτίσεως η ένταση διατμητικής τάσεως $T = \sqrt{J_{2s}}$ θα συναρτηθεί με τη μέση ορθή θλιπτική τάση $p = I_{1\sigma} / 3$. Υπό μορφή καταστατικής εξισώσεως η αντίστοιχη συνθήκη διαρροής παίρνει την εξής μορφή³

$$T + fp = 0 \quad (5.1)$$

όπου

$$f = \frac{c}{|p|} + f_c (1 + c_1 |p| + \dots) \quad (5.2)$$

Στη γενική αυτή φαινομενολογική έκφραση, εξ. (5.2), η σταθερά c καλείται συνεκτικότητα⁴ και η σταθερά f_c καλείται συντελεστής εσωτερικής τριβής⁵ του υλικού. Από την παραπάνω καταστατική εξ. (5.1) προκύπτει ότι κάτω από αρκετά μεγάλες πιέσεις τα Γεωυλικά συμπεριφέρονται ως αμιγώς μη-συνεκτικά υλικά ή υλικά τύπου Coulomb,

$$T \approx -f_c p + O\left(\frac{c}{|p|}\right) \quad (p < 0, \frac{c}{|p|} \ll 1) \quad (5.3)$$

Ως τυπικό παράδειγμα ενός μη-συνεκτικού (τριβώδους⁶) υλικού είναι ένα «ξηρό» κοκκώδες υλικό όπως η ξηρή άμμος. Για παράδειγμα αναφέρουμε ότι πολλά

¹ Αγγλ. *Geomaterials*. Π.χ. εδάφη, πετρώματα, σκυρόδεμα κ.λπ.

² Αγγλ. *pressure sensitivity*

³ Θλιπτικές τάσεις λαμβάνονται με αρνητικό πρόσημο.

⁴ Αγγλ. *cohesion*

⁵ Αγγλ. *friction coefficient*

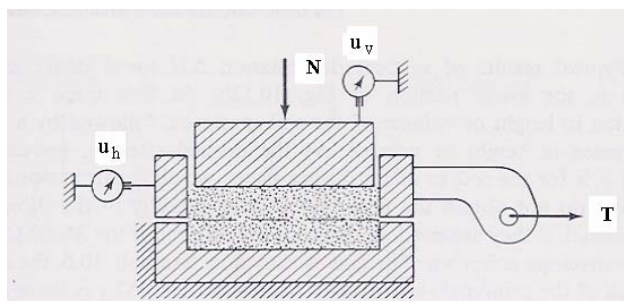
⁶ Αγγλ. *frictional*

προσομοιώματα τεκτονικών μακρο-δομών, όπως τα γεωλογικά ρήγματα (Εικ. 5-2), όπου στην πραγματικότητα οι γεωστατικές τάσεις είναι πολύ μεγάλες, πραγματοποιούνται στο εργαστήριο υπό κλίμακα με μη-συνεκτική άμμο κάτω από συνθήκες κανονικής βαρύτητας⁷



Εικ. 5-2: Προσομοίωμα τεκτονικού ρήγματος στο εργαστήριο με τη βοήθεια ξηρής άμμου. Οι λωρίδες χρωματισμένης άμμου δείχνουν καθαρά τη γεωμετρική μορφή των ημικατακόρυφων ρηγμάτων που προκαλούνται από μία έντονη βύθιση της βάσης (μηχανισμός καταπακτής, trap – door mechanism).

5.2 Τριβή και Διασταλτικότητα



Εικ. 5-3: Σχηματική παράσταση της συσκευής Casagrande απ' ευθείας διατμήσεως

Για τον προσδιορισμό της διατμητικής αντοχής ενός χαλαρού γεωυλικού όπως η ξηρή άμμος συχνά θα προσφύγουμε στη σχετικά απλή δοκιμή της απ' ευθείας διατμήσεως⁸, που πραγματοποιείται στην αντίστοιχη συσκευή Casagrande, η οποία υποτίθεται ότι επιβάλλει αστοχία του δοκιμίου κατά μήκος μιας οριζόντιας επιφάνειας στη θέση της σχισμής που χωρίζει το κινητό από το σταθερό τμήμα της συσκευής (Εικ. 5-3). Κατά τη δοκιμή αυτή το κατακόρυφο φορτίο N διατηρείται συνήθως σταθερό ενώ επιβάλλεται η οριζόντια μετατόπιση του κινητού μέρους, κάτω από σταθερή ταχύτητα. Μετρώνται συνεπώς η οριζόντια μετατόπιση u_h του κινητού μέρους, η κατακόρυφη μετατόπιση u_v της

⁷ M.K. Hubbert, Mechanics of deformation of crustal rocks: Historical development. In: Mechanical Behavior of Crustal Rocks-The Handin Volume (Ed. N.L. Carter et al.) American Geophysical Union, 1981, 1-9.

⁸ Αγγλ. direct shear test

οριζόντιας πλάκας επιβολής του φορτίου N καθώς και η εκάστοτε τιμή της οριζόντιας διατμητικής δυνάμεως T .

Για την περαιτέρω ανάλυση των δεδομένων της δοκιμής απ' ευθείας διατμήσεως υπολογίζουμε τη (μέση) ορθή και τη (μέση) διατμητική τάση στο επίπεδο της διατμήσεως,

$$\sigma = \frac{N}{A}, \quad \tau = \frac{T}{A} \quad (5.4)$$

Από τα σχετικά διαγράμματα του πειράματος παρατηρούμε ότι ο λόγος των τάσεων⁹,

$$\frac{\tau}{\sigma} = \tan \varphi_m \quad (5.5)$$

είναι γενικώς μία συνάρτηση της διατμητικής μετατοπίσεως. Για το λόγο αυτό η «κλίση τάσεως»¹⁰ φ καλείται ενεργοποιημένη γωνία τριβής¹¹ του υλικού και αντιστοίχως ο συντελεστής καλείται ενεργοποιημένος συντελεστής τριβής¹²,

$$\tan \varphi_m = \mu(u_h) \quad (5.6)$$

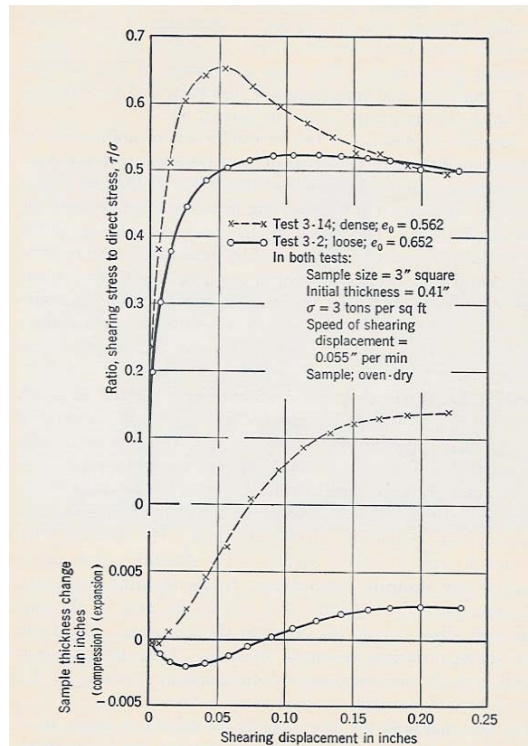


Fig. 14-2 Plots of typical direct shear tests (Ottawa standard sand).

Εικ. 5-4: Τυπικά διαγράμματα λόγου τάσεων και διασταλτικότητας σε άμμο Ottawa-standard (D.W. Taylor, 1948)

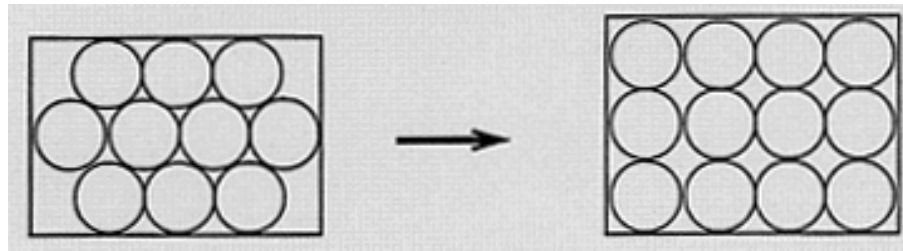
⁹ Αγγλ. *stress ratio*

¹⁰ Αγγλ. *stress obliquity*

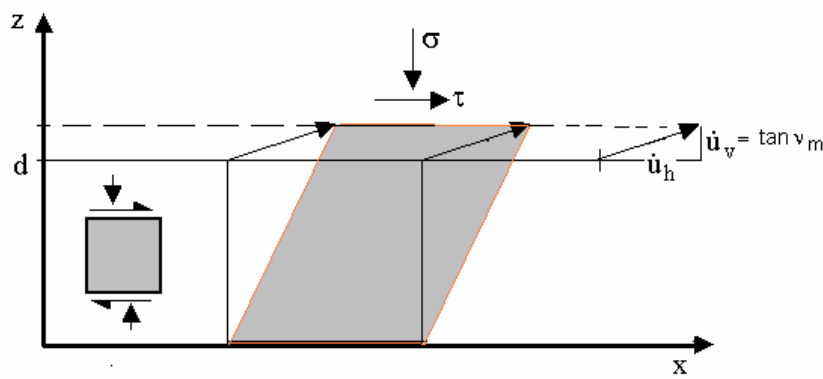
¹¹ Αγγλ. *mobilized friction angle*

¹² Αγγλ. *mobilized friction coefficient*

Επίσης παρατηρούμε ότι όταν ένα κοκκώδες υλικό υφίσταται διάτμηση, τότε γενικώς αυτό εμφανίζει παράλληλα και αλλαγές στον όγκο του (Εικ. 5-5). Το φαινόμενο αυτό καλείται διασταλτικότητα¹³ και αποδίδεται στον Reynolds (1885)¹⁴.



Εικ. 5-5: Σχηματική απεικόνιση της διασταλτικής μεταβάσεως από μία πυκνή σε μία χαλαρή συσκευασία κόκκων λόγω διατμήσεως της ομάδας των κόκκων.



Εικ. 5-6: Απ' ευθείας διάτμηση

Ως διασταλτικότητα θα ορίσουμε γενικώς τον λόγο του ρυθμού αλλαγής όγκου προς τον ρυθμό διατμητικής παραμορφώσεως

$$\tan \nu_m = \frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\gamma}} \quad (5.7)$$

Στο πείραμα της απ' ευθείας διατμήσεως η γωνία ν_m εμφανίζεται ως η γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα της ταχύτητας διατμήσεως με το επίπεδο διατμήσεως (τον άξονα x στην Εικ. 5-5) και καλείται ως εκ τούτου (ενεργοποιημένη) γωνία διασταλτικότητας¹⁵ του υλικού. Πράγματι, αν δεχθούμε ότι η διάτμηση εντοπίζεται μέσα σε μία λεπτή λωρίδα πάχους d και το πεδίο ταχυτήτων είναι γραμμικό, τότε έχουμε ότι

$$v_x = \frac{z}{d} \dot{u}_h, \quad v_z = \frac{z}{d} \dot{u}_v \quad (5.8)$$

τότε ο ρυθμός αλλαγής όγκου στη λωρίδα διατμήσεως περιγράφεται από την ποσότητα,

¹³ Νεολ. διασταλτικός, = ικανός να διασταλεί ή να διαστέλλεται. Αγγλ. *dilatancy*.

¹⁴ Reynolds, O. (1885). On the dilatancy of media composed of rigid particles in contact. With experimental illustrations. *Phil. Mag.* (2) 20, 469-481. Also: Truesdell, C. and Noll, W.: *The Non-Linear Field Theories of Mechanics*, *Handbuch der Physik* Band III/3, section 119, Springer, 1965.

¹⁵ Αγγλ. *mobilized dilatancy angle*

$$\dot{\varepsilon} = \frac{dv_z}{dz} = \frac{\dot{u}_v}{d} \quad (5.9)$$

ενώ ο ρυθμός της διατμητικής τροπής από την ποσότητα

$$\dot{\gamma} = \frac{dv_x}{dz} = \frac{\dot{u}_h}{d} \quad (5.10)$$

Άρα με την προϋπόθεση ότι η παραμόρφωση μέσα στην ζώνη διατμήσεως είναι ομογενής παίρνουμε ότι η διασταλτικότητα του υλικού υπολογίζεται ανεξάρτητα από το πάχος d της ζώνης διατμήσεως ως ο λόγος της ταχύτητας διατμήσεως προς τον ρυθμό μεταβολής του ύψους του δοκιμίου,

$$\tan \nu_m = \frac{du_v}{du_h} \quad (5.11)$$

Αυτό σημαίνει ότι ο ενεργοποιημένος συντελεστής διασταλτικότητας προκύπτει ως η κλίση της αντίστοιχης πειραματικής καμπύλης διασταλτικότητας.

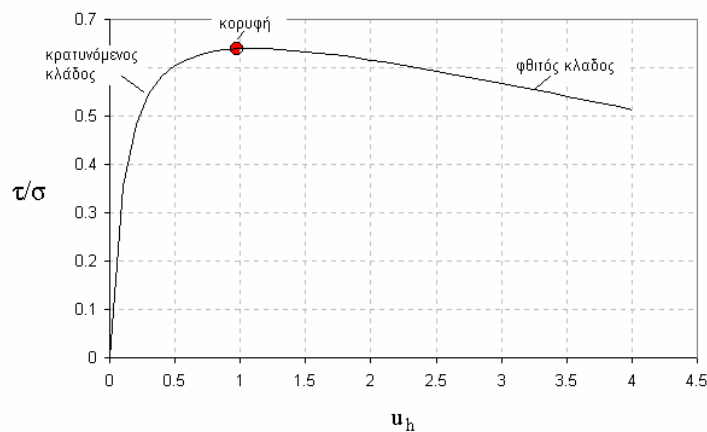
$$u_v = u_v(u_h) \Rightarrow \tan \nu_m = \frac{du_v}{du_h} = \beta(u_h) \quad (5.12)$$

Εισάγοντας ως αδιάστατη παράμετρο τη διατμητική τροπή,

$$\gamma = \frac{u_h}{d} \quad (5.13)$$

παρατηρούμε ότι τα πειραματικά δεδομένα μπορούν να γραφούν υπό μορφή αντίστοιχων συναρτήσεων των συντελεστών ενεργοποιημένης τριβής και διασταλτικότητας

$$\begin{aligned} \tan \varphi_m &= \mu(\gamma) \\ \tan \nu_m &= \beta(\gamma) \end{aligned} \quad (5.14)$$



Εικ. 5-7: Λόγος τάσεων ως συνάρτηση της οριζόντιας μετατοπίσεως

Από τα πειραματικά δεδομένα συμπεραίνουμε ότι σε μία σχετικά πυκνά διαστρωμένη άμμο ο λόγος των τάσεων αρχικά αυξάνει (κρατυνόμενος κλάδος¹⁶, Εικ. 5-7) και εμφανίζει ένα μέγιστο (κορυφή¹⁷), που ακολουθείται από ένα φθιτό κλάδο¹⁸. Μια χαλαρή άμμος αντιθέτως εμφανίζει μονοτόνως αύξοντα λόγο τάσεων. Ο λόγος των τάσεων στην κορυφή της εκάστοτε αντίστοιχης καμπύλης συμβολίζεται με $\tan \varphi_p$ και χαρακτηρίζει την αντοχή του υλικού¹⁹. Σημειώνουμε τέλος ότι διασταλτική συμπεριφορά²⁰ ($v_m > 0$) συνεπάγεται αύξηση του όγκου ενώ συσταλτική συμπεριφορά²¹ ($v_m < 0$) μείωση του όγκου. Ειδικότερα από τα πειραματικά δεδομένα προκύπτει, ότι όταν η άμμος είναι πυκνά διαστρωμένη αυτή έχει γενικώς την τάση να διογκώνεται κατά την απ' ευθείας διάτμηση, $v_m > 0$. Αντιθέτως μία χαλαρά διαστρωμένη άμμος θα έχει την τάση να συρρικνώνεται ($v_m < 0$). Τέλος παρατηρούμε ότι για μεγάλες τιμές της διατμητικής μετατοπίσεως από το πείραμα προκύπτει ότι ο λόγος των τάσεων τείνει είτε εκ των άνω ή είτε εκ των κάτω προς μία σταθερή τιμή

$$\left(\frac{\tau}{\sigma} \right)_{\infty} = \tan \varphi_{cs} \quad (5.15)^{22}$$

Παρατήρηση

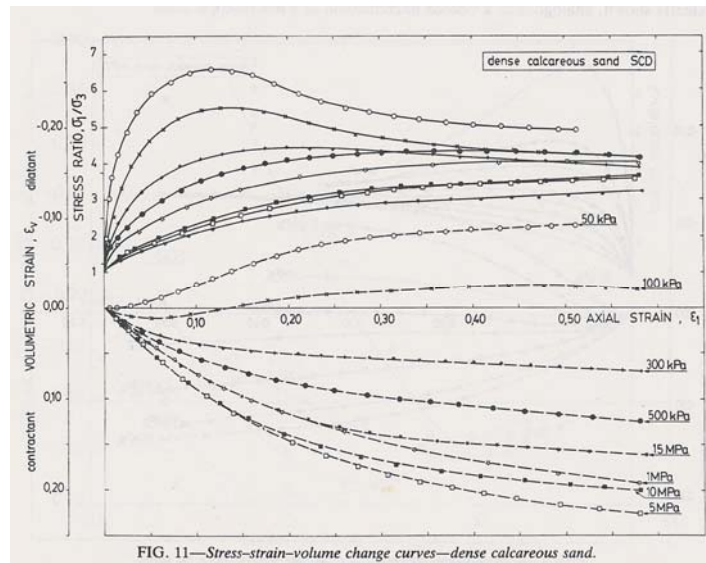


FIG. 11—Stress-strain-volume change curves—dense calcareous sand.

Εικ. 5-8: Διαγράμματα τάσεων-τροπών για μία ασβεστολιθική άμμο και αύξουσα ολόπλευρη πίεση (Colliat-Dangus et al., 1988²³)

Στα διαγράμματα τάσεων-παραμορφώσεων, που παραθέτουμε στην Εικ. 5-8, παρατηρούμε τη μεταβολή της συμπεριφοράς μιας "πυκνής" άμμου σε τριαξονικές δοκιμές και για

¹⁶ Αγγλ. *hardening branch*

¹⁷ Αγγλ. *peak*

¹⁸ Αγγλ. *softening branch*

¹⁹ Δείκτης p =peak

²⁰ Αγγλ. *dilatant behavior*

²¹ Αγγλ. *contractant behavior*

²² Δείκτης cs = *critical state*, πρβλ. Κεφ. 5.2.

²³ Colliat-Dangus, J.-L., Desrués, J. and Foray, P. (1988). Triaxial testing of granular soil under elevated cell pressure. ASTM Sp. Techn. Publ. 977, 290-310.

διάφορες τιμές της ολόπλευρης πίεσεως. Είναι φανερό από το τυπικό αυτό αποτέλεσμα ότι για δεδομένο δείκτη πόρων e μία δεδομένη άμμος για αρκετά χαμηλές ενεργές πιέσεις θα συμπεριφέρεται ως "πυκνή" (δηλ. θα εμφανίζει διασταλτικότητα) ενώ σε υψηλές ενεργές πιέσεις η ίδια άμμος θα συμπεριφέρεται ως "χαλαρή"²⁴.

5.3 Θεωρία Διασταλτικής Τριβής κατά Taylor

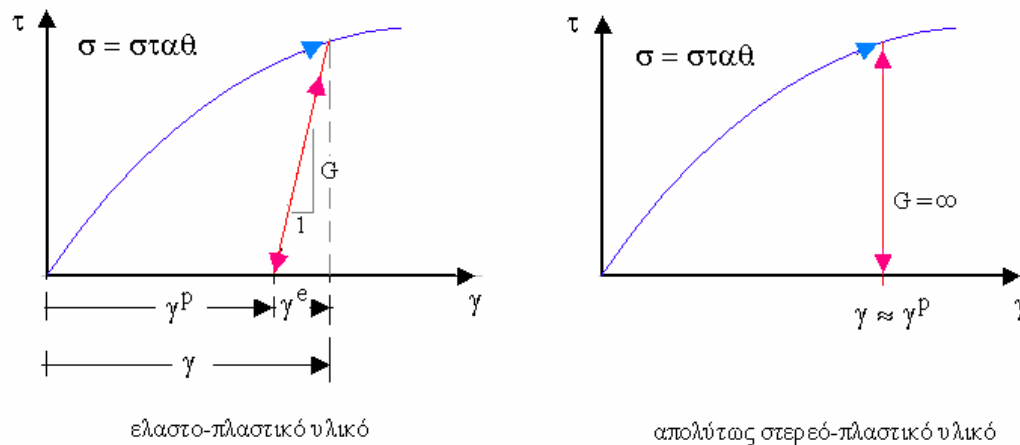
Στη βάση των παραπάνω πειραματικών παρατηρήσεων μπορούμε τώρα να εισάγουμε ορισμένους χρήσιμους ορισμούς και να προχωρήσουμε στη διατύπωση μιας απλής καταστατικής θεωρίας για την περιγραφή της μηχανικής συμπεριφοράς των κοκκωδών υλικών. Γενικώς όπως αναφέραμε και σε προηγούμενα κεφάλαια κατά την παραμόρφωση ενός υλικού που εμφανίζει παραμένουσες (πλαστικές) παραμορφώσεις θα αναλύσουμε αθροιστικά την τροπή σε δύο συνιστώσες, μία ελαστική και μία πλαστική. Π.χ. η διατμητική τροπή θα αναλυθεί ως εξής (Εικ. 5-9),

$$\gamma = \gamma^e + \gamma^p \quad (5.16)$$

Η συνιστώσα γ^e συμβολίζει την "ελαστική" τροπή και αντιστοιχεί στο αναστρέψιμο τμήμα της ολικής τροπής και συνδέεται με την αντίστοιχη διατμητική τάση

$$\gamma^e = \frac{\tau}{G} \quad (5.17)$$

όπου G είναι το ελαστικό μέτρο διατμήσεως του εδάφους. Η συνιστώσα γ^p καλείται "πλαστική" και αντιστοιχεί στην παραμένουσα (μη-αναστρέψιμη) τροπή.



Εικ. 5-9: Χαρακτηριστικές καμπύλες τάσεων-τροπών για ελαστοπλαστικά και απλύτως στερεά-πλαστικά υλικά

Χάριν απλότητας θα δεχθούμε στη θεωρούμενη περίπτωση ότι ένα κοκκώδες υλικό συμπεριφέρεται ως ένα απολύτως στερεό-πλαστικό υλικό, δηλαδή θα δεχθούμε ότι οι παραμορφώσεις του είναι πλήρως μη-αντιστρέψιμες, θεωρώντας παράλληλα τις οποιεσδήποτε ελαστικές παραμορφώσεις αμελητέες,

$$G = \infty \Rightarrow \gamma^e = 0, \gamma \approx \gamma^p \quad (5.18)$$

²⁴ Li, X.S. and Dafalias, Y.F. (2000). Dilatancy for cohesionless soils. *Géotechnique*, 50, 449-460.

Για τον ορισμό του μαθηματικού προσομοιώματος ενός κοκκώδους υλικού θα ορίσουμε τώρα την εξής συνάρτηση διαρροής

$$F = \tau - \sigma\mu(\gamma) \quad (5.19)$$

Θα δεχθούμε επίσης ότι όταν το κοκκώδες υλικό φορτίζεται και παραμορφώνεται πλαστικά ("διαρρέει"), τότε ισχύει και η αντίστοιχη συνθήκη διαρροής

$$F = 0 \Leftrightarrow \tau = \sigma\mu(\gamma) \quad (5.20)$$

Παρατηρούμε τώρα ότι ο κινηματικός περιορισμός μεταξύ απειροστικών μεταβολών της (πλαστικής) διατμητικής και της ογκομετρικής τροπής,

$$d\varepsilon = \beta(\gamma)d\gamma \quad (5.21)$$

συνιστά το νόμο πλαστικής ροής του υλικού.

Ένας απλός τρόπος που μας επιτρέπει να συσχετίσουμε την ενεργοποιημένη τριβή με την εργοποιημένη διασταλτικότητα ενός κοκκώδους υλικού είναι να δούμε προσεκτικά την έκφραση για το στοιχειώδες έργο παραμορφώσεως. Το έργο των εσωτερικών δυνάμεων ανά μονάδα μήκους της ζώνης διατμήσεως υπολογίζεται από το ολοκλήρωμα καθ' ύψος του στοιχειώδους έργου των τάσεων πάνω στις απειροστικές τροπές,

$$\delta W = \int_0^d (\sigma_{xx} \delta\varepsilon_{xx} + \dots + \sigma_{xz} \delta\varepsilon_{xz} + \sigma_{zx} \delta\varepsilon_{zx} + \sigma_{zz} \delta\varepsilon_{zz}) dz \quad (5.22)$$

Στο Καρτεσιανό σύστημα που επιλέξαμε για την περιγραφή της δοκιμής απ' ευθείας διατμήσεως (Εικ. 5-6), οι τάσεις και οι μεταβολές των τροπών δίδονται απο τους παρακάτω πίνακες

$$[\bar{\sigma}] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & 0 & \tau \\ 0 & \sigma_{yy} & 0 \\ \tau & 0 & -\sigma \end{bmatrix}, \quad \sigma > 0 \quad (5.23)$$

$$[\delta\bar{\varepsilon}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \delta\gamma/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ \delta\gamma/2 & 0 & \delta\varepsilon \end{bmatrix} \quad (5.24)$$

Δεχόμεθα ότι οι τάσεις και οι τροπές είναι σταθερές μέσα στη ζώνη διατμήσεως, άρα το στοιχειώδες έργο των εσωτερικών δυνάμεων δίδεται εν προκειμένω από την εξής σχέση

$$\delta W^{(int)} = (\tau\delta\gamma - \sigma\delta\varepsilon)d \quad (5.25)$$

Από την έκφραση αυτή γίνεται φανερό ότι η διατμητική τάση τ είναι ενεργειακώς συζυγής με τον ρυθμό διατμητικής παραμορφώσεως $\delta\gamma = \delta u_h / d$, όπως επίσης και ότι η ορθή τάση σ είναι συζυγής με τον ρυθμό ογκικής παραμορφώσεως $\delta\varepsilon = \delta u_v / d$. Λαμβάνοντας δε υπ' όψιν τη συνθήκη διαρροής και τον νόμο πλαστικής ροής, εξ. (5.20) και εξ. (5.21), από την παραπάνω ενεργειακή εξ. (5.25) παίρνουμε την εξής έκφραση για το στοιχειώδες έργο παραμορφώσεως

$$\delta W^{(int)} = \sigma(\tan \varphi_m - \tan \nu_m) \delta u_h \quad (5.26)$$

Υποθέτουμε τώρα ότι σε καλή προσέγγιση όλο το έργο των εσωτερικών δυνάμεων μετατρέπεται εξ ολοκλήρου σε θερμότητα, η οποία παραγωγή θερμότητας, στη βάση του 2^{ου} θερμοδυναμικού αξιώματος, πρέπει να είναι πάντοτε θετική, οπότε

$$\frac{\delta D}{\delta u_h} = \frac{\delta W^{(int)}}{\delta u_h} = \sigma(\tan \varphi_m - \tan \nu_m) > 0 \quad (5.27)$$

Από την ανισότητα αυτή έπεται ως βασικός καταστατικός περιορισμός, ότι σε κάθε κατάσταση του κοκκώδους υλικού η γωνία διασταλτικότητας δεν μπορεί να υπερβεί την τιμή της αντίστοιχης γωνίας τριβής

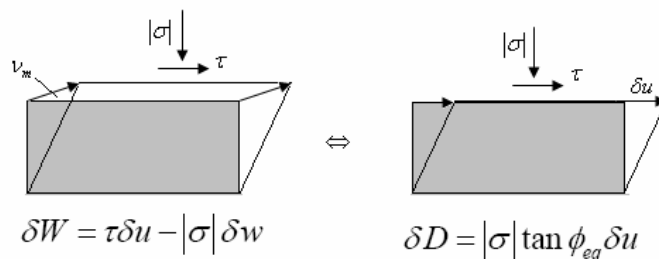
$$\nu_m < \varphi_m \quad (5.28)$$

Στη βάση των πειραματικών δεδομένων υποθέτουμε επιπλέον ότι σε ένα κοκκώδες υλικό, ανεξαρτήτως της καταστάσεως που αυτό βρίσκεται, η ειδική κατανάλωση ενέργειας είναι σταθερή,

$$\frac{\delta D}{\delta u_h} = \sigma \tan \varphi_{eq} \quad (5.29)$$

Αυτή η υπόθεση είναι γνωστή στην Εδαφομηχανική ως η υπόθεση Taylor. Από τη σκοπιά της καταναλώσεως έργου παραμορφώσεως η υπόθεση Taylor σημαίνει ότι ένα κοκκώδες, που χαρακτηρίζεται από εσωτερική τριβή και διασταλτικότητα συμπεριφέρεται ως ένα υλικό με εσωτερική τριβή, που παραμορφώνεται ισόχωρα και που έχει ως γωνία τριβής ίση με την γωνία φ_{eq} που δίδεται από την διαφορά της ενεργοποιημένης γωνίας τριβής και διασταλτικότητας, η οποία θεωρείται σταθερή καθ' όλη τη διαδικασία της διατήσεως (Εικ. 5-10)

$$\tan \varphi_{eq} = \tan \varphi_m - \tan \nu_m = \sigma \alpha \theta. \quad (5.30)$$



Εικ. 5-10: Υπόθεση Taylor

Η γωνία τριβής του (από σκοπιά καταναλώσεως) ενεργειακώς ισοδύναμου μέσου θα ταυτισθεί κατ' αρχήν με την γωνία τριβής στην «κρίσιμη κατάσταση» όπου η παραμόρφωση είναι εξ ορισμού ισόχωρη²⁵, $\varphi_{eq} = \varphi_{cs}$. Τα πειραματικά δεδομένα ενισχύουν την υπόθεση Taylor και δικαιώνουν την ταύτιση από ενεργειακής σκοπιάς του πραγματικού κοκκώδους υλικού με ένα υποθετικό υλικό, που παραμορφώνεται ισόχωρα και που υπακούει στον νόμο τριβής κατά Coulomb. Αυτό είναι αληθές, αφού η ισοδύναμη γωνία τριβής φ_{eq} που υπολογίζεται από τα πειραματικά δεδομένα βάσει της παραπάνω εξισώσεως προκύπτει με καλή προσέγγιση σταθερή.

²⁵ Γι' αυτό θα χρησιμοποιηθεί καμιά φορά και ο συμβολισμός. Δεικτης cv=constant volume

Από την σχέση Taylor στη κατάσταση αιχμής,

$$\left(\frac{\tau}{\sigma}\right)_{\max} = \tan \varphi_p = \tan \varphi_{eq} + \tan \nu_p \quad , \quad \tan \nu_p = \left(\frac{du_v}{du_h}\right)_{\max} \quad (5.31)$$

θα εξαχθεί το συμπέρασμα ότι η αντοχή ενός κοκκώδους υλικού αποτελείται από μία συνιστώσα λόγω εσωτερικής τριβής και μία συνιστώσα που αφορά στην εσωτερική εμπλοκή²⁶.

Αν λύσουμε την σχέση του Taylor, εξ. (5.30), ως προς το συντελεστή διασταλτικότητας

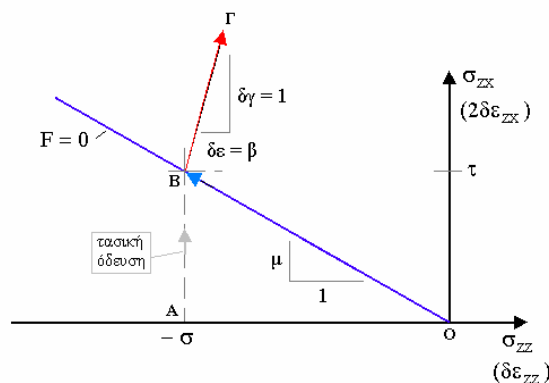
$$\tan \nu_m = \tan \varphi_m - \tan \varphi_{eq} \quad (5.32)$$

τότε συμπεραίνουμε ότι μία χαλαρά διαστρωμένη άμμος ($\varphi_p < \varphi_{eq}$), θα έχει την τάση κατά την διάτμηση να συμπυκνώνεται με συνεχώς φθίνοντα ρυθμό, γεγονός που αντανακλάται σε συνεχή κράτυνση, δηλαδή σε μονότονη αύξηση της ενεργοποιημένης γωνίας τριβής. Αντιθέτως μία πυκνά διαστρωμένη άμμος μετά από μια σύντομη σχετικά αρχική φάση περαιτέρω συμπυκνώσεως θα έχει γενικώς την τάση να διασταλεί, γεγονός που οδηγεί στην ύπαρξη αντοχής αιχμής και φθιτού (ασταθούς) κλάδου.

Ειδικότερα από το συγκεκριμένο παράδειγμα κατ' ευθείαν διατμήσεως παίρνουμε τις εξής τιμές για τις παραμέτρους αντοχής της πυκνής άμμου Ottawa-standard: (α) γωνία τριβής αιχμής: πυκνή άμμος $\varphi_p = 32.6^\circ$, $\varphi_p = 27.2^\circ$. (β) γωνία διασταλτικότητας αιχμής: πυκνή άμμος $\nu_p = 9.8^\circ$, χαλαρή άμμος $\nu_p = 2.7^\circ$. (γ) γωνία τριβής στην κρίσιμη κατάσταση: $\varphi_{eq} = 25^\circ$. Συνολικά οι δύο δοκιμές απ' ευθείας διατμήσεως δίδουν βάσει της σχέσεως τριβής-διασταλτικότητας του Taylor, τη βέλτιστη τιμή $\varphi_{eq} = 25.07^\circ$. Σημειώνουμε ότι από την σχετική βιβλιογραφία βρίσκουμε την εξής εμπειρική σχέση,

$$\nu_p \approx \varphi_p - 20^\circ \quad (5.33)$$

5.4 Γεωμετρική Θεωρία πλαστικότητας



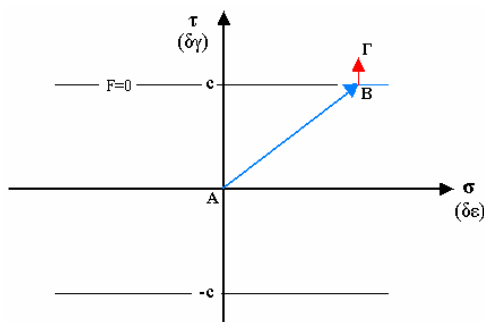
Εικ. 5-11: Η γεωμετρική απεικόνιση της συνθήκης διαρροής και νόμου πλαστικής ροής για υλικά με εσωτερική τριβή και διασταλτικότητα

²⁶ Αγγλ. *interlocking*

Από το σχετικό διάγραμμα (Εικ. 5-11) κάνουμε τις εξής διαπιστώσεις: Μέσα στα πλαίσια της Μαθηματικής Θεωρίας της Πλαστικότητας θα παραστήσουμε γεωμετρικά την συνθήκη διαρροής και τον νόμο πλαστικής ροής στο ίδιο διάγραμμα, στο επίπεδο των τάσεων $(\sigma_{zz}, \sigma_{xz})$. Κατά την υλοποίηση του πειράματος απ' ευθείας διατιμήσεως οι τάσεις ακολουθούν την αμιγώς διατμητική "τασική οδευση"²⁷ (AB), αφού η ορθή τάση παραμένει (σε καλή προσέγγιση) σταθερή. Η εκάστοτε εντατική κατάσταση στο επίπεδο αστοχίας παρίσταται στο διάγραμμα αυτό από το διάνυσμα \vec{OB} , που έχει κλίση ίση προς την ενεργοποιημένη τριβή, $\mu = \tan \varphi_m$ (άρα βρίσκεται πάνω στην αντίστοιχη επιφάνεια διαρροής, $F = 0$, εξ. (5.19)). Ο νόμος πλαστικής ροής παρίσταται γεωμετρικά με το διάνυσμα $\vec{B\Gamma}$, το οποίο προσαρτάται στο εκάστοτε σημείο της τασικής οδύσεως, στο σημείο B, εν προκειμένω. Η αντίστροφη κλίση του διανύσματος του ρυθμού της πλαστικής παραμορφώσεως ισούται με την ενεργοποιημένη διασταλτικότητα στο εν λόγω σημείο, $\beta = \tan \nu_m$. Άρα οι συνιστώσες του διανύσματος αυτού στο εν λόγω σύστημα είναι ανάλογές προς το ρυθμό πλαστικής παραμορφώσεως όγκου και σχήματος, αντιστοίχως. Αυτή η απεικόνιση είναι ιδιαίτερα χρήσιμη, αφού τα εμπλεκόμενα στατικά και κινηματικά μεγέθη είναι ενεργειακώς συζυγή. Αυτό σημαίνει ότι το εσωτερικό γινόμενο του διανύσματος των τάσεων \vec{OB} με το διάνυσμα του ρυθμού πλαστικής παραμορφώσεως $\vec{B\Gamma}$ αποδίδει το έργο του ρυθμού πλαστικής παραμορφώσεως

$$\vec{OB} \cdot \vec{B\Gamma} = \tau \delta \gamma - \sigma \delta \epsilon = \frac{1}{d} \delta D \quad (5.34)$$

Ειδικότερα τονίζουμε στο σημείο αυτό ότι η παραπάνω καταστατική ανισότητα (5.28) μεταξύ γωνίας διασταλτικότητας και τριβής σημαίνει γεωμετρικά ότι το διάνυσμα του ρυθμού της πλαστικής παραμορφώσεως $\vec{B\Gamma}$ δεν είναι κάθετο πάνω στην αντίστοιχη επιφάνεια διαρροής, OB.



Εικ. 5-12: Συνθήκη καθετότητας σε συνεκτικά υλικά

Η παραπάνω παρατήρηση συνιστά και τη σημαντική διαφορά της θεωρίας πλαστικότητας των μη-συνεκτικών γεωυλικών από την αντίστοιχη θεωρία των όλκιμων υλικών, όπως είναι τα μέταλλα ή άλλα συνεκτικά υλικά, όπως οι κανονικά στερεοποιημένες άργιλοι κάτω από αστράγγιστες συνθήκες. Στις περιπτώσεις αυτές το υλικό εμφανίζει διατμητική αντοχή c (συνεκτικότητα) που είναι ανεξάρτητη από την ορθή τάση στο επίπεδο αστοχίας και η παραμόρφωσή του υλικού είναι ισόχωρη. Όπως είδαμε και σε προηγούμενα κεφάλαια στην περίπτωση συνεκτικών υλικών ισχύει η λεγόμενη «συνθήκη καθετότητας»,

²⁷ Αγγλ. *stress path*

δηλαδή ότι το διάνυσμα πλαστικής ροής (με $\delta\varepsilon = 0$) είναι κάθετο στην αντίστοιχη επιφάνεια διαρροής (Εικ. 5-12),

$$F = |\tau| - c = 0 \quad (5.35)$$

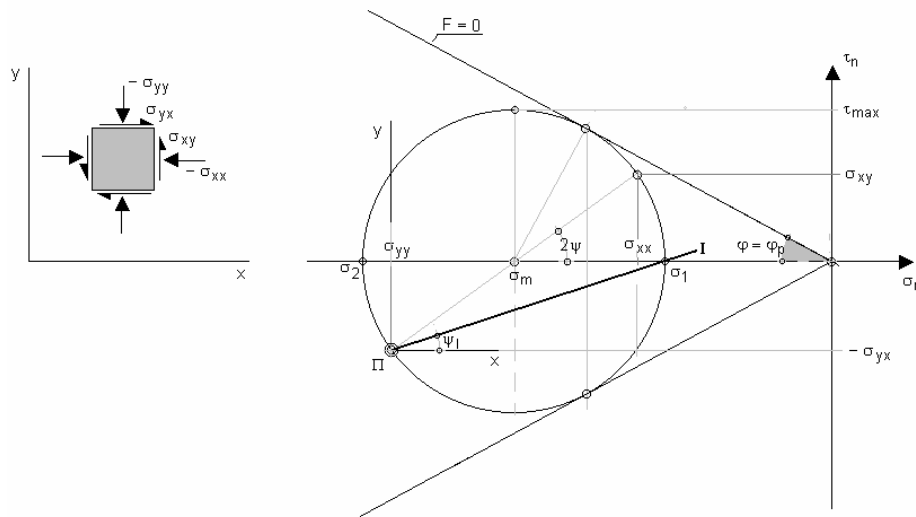
Παρατήρηση

Στο Κεφ. 3 η είδαμε ότι η συνθήκη καθετότητας αποτελεί τη μαθηματική βάση για την απόδειξη μιας σειράς γενικών προτάσεων, χρήσιμων για την ασφαλή εκτιμήση άνω και κάτω φραγμάτων του φορτίου πλαστικής καταρρέυσεως μιας κατασκευής. Τα γενικά αυτά θεωρήματα διατυπώθηκαν αρχικά από τους Drucker, Prager & Greenberg [1] και επεκτάθηκαν για την περίπτωση μη-φραγμένων χωρίων από τους Shoemaker & Chen [2] καθώς και για την περίπτωση πολλαπλών συντελεστών φορτίσεως από τον Hodge. Όπως είδαμε πιο πάνω στην περίπτωση των γεωυλικών δεν ισχύει η συνθήκη καθετότητας. Τα υλικά που δεν ικανοποιούν τη συνθήκη καθετότητας καλούνται συχνά στη βιβλιογραφία και μη-τυπικά υλικά²⁸. Για τέτοια υλικά ο μεν Palmer [4] παρουσίασε για πρώτη φορά ένα θεώρημα κάτω ορίου οι δε Sacchi & Save [5] ένα θεώρημα άνω ορίου. Η επέκταση του θεωρήματος των Sacchi & Save στη περίπτωση πολλαπλών συντελεστών φορτίσεως καθώς και μια βελτίωση του θεωρήματος του Palmer προτάθηκαν στη συνέχεια από τους Shoemaker et al. [6]. Δυστυχώς τα θεωρήματα αυτά οδηγούν σε πολύ αδρά φράγματα και ως εκ τούτου υπάρχει αβεβαιότητα όσον αφορά την πρακτική αξία ενός αντίστοιχου υπολογισμού σε σχέση με το φορτίο καταρρέυσεως της κατασκευής. Η αδυναμία αυτή της θεωρίας πλαστικότητας των γεωυλικών αντανακλάται σε πολλές πρακτικές εφαρμογές, όπου δεν μπορούμε να εξασφαλίσουμε εκ προοιμίου την ποιότητα και αξία των θεωρητικών μας προβλέψεων και καθιστούν την πειραματική εξακρίβωση καθώς και την παρατήρηση στο πεδίο απολύτως αναγκαίες προϋποθέσεις. Μία σύνοψη του επίπεδου γνώσεως σχετικά με την εφαρμογή της Οριακής Ανάλυσεως στη Γεωτεχνική Μηχανική παρουσιάστηκε πρόσφατα από τον Καθηγ. R. Michanlowski [7].

- [1] Drucker, D.C., Prager, W. and Greenberg, H.J. (1952). Extended limit design theorems for continuous media. *Quart. Appl. Meth.*, 4, 381-389.
- [2] Shoemaker, E.M. and Chen, W.P. (1969). On the uniqueness of the limit load for unbounded regions. *Arch Mech. Stos.* 5, 679-689.
- [3] Hodge, P.G. (1970). Limit analysis with multiple load parameters. *Int. J. Solids Structures*, 6, 661-675.
- [4] Palmer, A.C. (1966). A limit theorem for materials with non-associated flow laws. *J. de Mécanique*, 5, 217-222.
- [5] Sacchi, G. and Save, M. (1968). A note on the limit loads of non-standard materials. *Meccanica*, 3, 43-45.
- [6] Shoemaker, E.M., Fraser, S. and Burnaby, B.C. (1975). Limit analysis with multiple load parameters for non-standard materials. *ZAMP*, 26, 99-104.
- [7] Michalowski, R.L. (2005). Limit analysis in geotechnical engineering. *ISSMGE, TC-34 Report*, 45-49.

²⁸ Αγγλ. *non standard materials*

5.5 Ιδεατά Πλαστικά-Απολύτως Στερεά Υλικά με Εσωτερική Τριβή²⁹



Εικ. 5-13: Εντατική κατάσταση στο επίπεδο $O(x, y)$ και οριακός κύκλος Mohr των τάσεων για υλικά με εσωτερική τριβή και μηδενική συνεκτικότητα

Στη συνέχεια θα παραθέσουμε τις βασικές εξισώσεις της Οριακής Αναλύσεως για μη-συνεκτικά υλικά. Στην περίπτωση αυτή το υλικό θεωρείται ως ιδεατά πλαστικό-απολύτως στερεό. Θεωρούμε την περίπτωση της επίπεδης παραμορφώσεως. Στο επίπεδο της παραμορφώσεως $O(x, y)$ εισάγουμε τη μέση ορθή τάση σ_m και τη μέγιστη διατμητική τάση τ_{max} μέσω των αντιστοίχων κυρίων τάσεων ή γενικότερα μέσω των αντίστοιχων αναλλοίωτων του τανυστή των τάσεων (Εικ. 5-13)

$$\sigma_m = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) = \frac{1}{2}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$$

$$\tau_{max} = \frac{1}{2}|\sigma_1 - \sigma_2| = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \sigma_{xy}^2} \tag{5.36}$$

Παρατηρούμε ότι σε ένα κοκκώδες υλικό οι ορθές τάσεις είναι πάντοτε θλιπτικές, όποτε, $\sigma_m < 0$. Οπότε ένα ιδεατά πλαστικό υλικό τύπου Mohr-Coulomb περιγράφεται από την εξής συνθήκη διαρροής

$$\tau_{max} = |\sigma_m| \sin \varphi \Leftrightarrow \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \sigma_{xy}^2} + \frac{1}{2}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \sin \varphi = 0 \tag{5.37}$$

όπου στην πράξη η γωνία τριβής ταυτίζεται με τη μέγιστη τιμή της ενεργοποιημένης γωνία τριβής του υλικού, $\varphi = \varphi_p$.

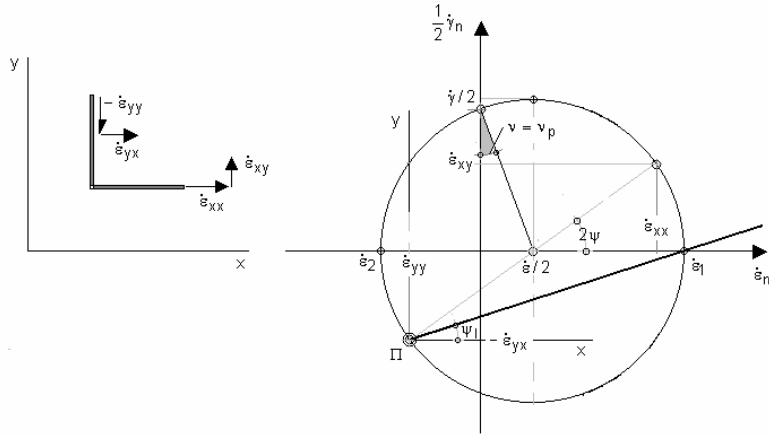
Έστω ψ_1 η γωνία μεταξύ του άξονα Ox και της μείζονος κυρίας τάσεως,

²⁹ Για μια εκτενή παρουσίαση προβλημάτων συνοριακών τιμών στα πλαίσια της Οριακής Αναλύσεως μη-συνεκτικών υλικών, παραπέμπουμε τον αναγνώστη στη μονογραφία του V.V. Sokolovskii, *Statics of Granular Media*, Pergamon, 1965.

$$\tan 2\psi_{I,II} = \frac{2\sigma_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}} \quad (5.38)$$

Από τον αντίστοιχο κύκλο του Mohr για τις τάσεις (Εικ. 5-13) παίρνουμε τις εξής εκφράσεις για τις συνιστώσες του τανυστή των τάσεων

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \sigma_m + \tau_{\max} \cos 2\psi = \sigma_m (1 - \sin \varphi \cos 2\psi) \\ \sigma_{yy} &= \sigma_m - \tau_{\max} \cos 2\psi = \sigma_m (1 + \sin \varphi \cos 2\psi) \\ \sigma_{xy} = \sigma_{yx} &= \tau_{\max} \sin 2\psi = -\sigma_m \sin \varphi \sin 2\psi \end{aligned} \quad (5.39)$$



Εικ. 5-14: Ρυθμοί τροπών στο επίπεδο $O(x, y)$ και ο αντίστοιχος κύκλος Mohr για υλικά με πλαστική διασταλτικότητα

Θεωρούμε τις αναλλοίωτες του (πλαστικού) ρυθμού παραμορφώσεως στο επίπεδο της παραμορφώσεως

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon} &= \dot{\epsilon}_1 + \dot{\epsilon}_2 = \dot{\epsilon}_{xx} + \dot{\epsilon}_{yy} \\ \dot{\gamma} &= \left| \dot{\epsilon}_1 - \dot{\epsilon}_2 \right| = \sqrt{\left(\dot{\epsilon}_{xx} - \dot{\epsilon}_{yy} \right)^2 + 4 \dot{\epsilon}_{xy}^2} \end{aligned} \quad (5.40)$$

Μέσω αυτών εκφράζεται ο νόμος πλαστικής ροής για υλικά με πλαστική διασταλτικότητα (Εικ. 5-14)

$$\sin \nu = \frac{\dot{\epsilon}}{\dot{\gamma}} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \left(\dot{\epsilon}_{xx} + \dot{\epsilon}_{yy} \right) = \sin \nu \sqrt{\left(\dot{\epsilon}_{xx} - \dot{\epsilon}_{yy} \right)^2 + 4 \dot{\epsilon}_{xy}^2} \quad (5.41)$$

όπου στη πράξη η γωνία διασταλτικότητας ταυτίζεται με τη μέγιστη τιμή της ενεργοποιημένης γωνίας διασταλτικότητας του υλικού, $\nu = \nu_p$.

Μέσα στα πλαίσια της κλασσικής Θεωρίας της Πλαστικότητας υποθέτουμε ότι ο τανυστής των τάσεων και ο τανυστής του ρυθμού (πλαστικής) παραμορφώσεως έχουν κοινούς κύριους άξονες

$$\frac{2\sigma_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}} = \frac{2\dot{\epsilon}_{xy}^2}{\dot{\epsilon}_{xx} - \dot{\epsilon}_{yy}} = \tan 2\psi \quad (5.42)$$

Η εξ. (5.42) εκφράζει τη λεγόμενη υπόθεση ομοαξονικότητας.

Παρατηρήσεις

Στο Κεφ. 5.6 θα αποδείξουμε το στατικό πρόβλημα που περιγράφεται από τις εξισώσεις ισορροπίας στο επίπεδο και την εξ. (5.37) είναι υπερβολικού τύπου. Ομοίως αποδεικνύεται ότι και το αντίστοιχο κινηματικό πρόβλημα που περιγράφεται από τις εξ. (5.41) και (5.42) είναι υπερβολικού τύπου. Οι (Χ.Γ.) του κινηματικού προβλήματος δίδονται από μια σχέση ανάλογη της εξ. (5.12), όπου αντί της γωνίας τριβής εμφανίζεται η γωνία διασταλτικότητας. Επειδή οι δύο αυτές γωνίες δεν ταυτίζονται οι περιοχές ορισμού των δύο προβλημάτων (δηλαδή του στατικού και του κινηματικού προβλήματος) δεν συμπίπτουν, γεγονός που οδηγεί σε ένα μη-καλώς ορισμένο μαθηματικό πρόβλημα. Η δυσκολία αυτή ξεπεράστηκε με την πλήρη αναθεώρηση της θεωρίας Πλαστικότητας για μη-συνεκτικά υλικά, στα πλαίσια της λεγόμενης θεωρίας "διακλαδώσεως"³⁰.

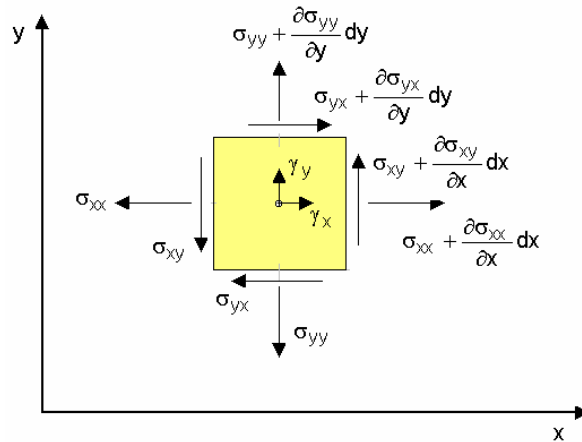
Στο σημείο αυτό θα πρέπει επίσης να παρατηρήσουμε ότι η παραπάνω υπόθεση ομοαξονικότητας, εξ. (5.42), χρησιμοποιείται ευρέως στη διατύπωση καταστατικών θεωριών, αφού απλουστεύει σημαντικά τη μαθηματική προσομοίωση της συμπεριφοράς ενός υλικού με πλαστική συμπεριφορά. Όσον αφορά όμως τα κοκκώδη υλικά και όπως απέδειξε μια σειρά πειραματικών εργασιών από το Καθηγητή Ishihara και τους συνεργάτες του [1], [2] αλλά και του συγγραφέως [3], [4], [5], [6] η υπόθεση ομοαξονικότητας βρίσκεται σε ασυμφωνία με τα πειραματικά δεδομένα. Ως εκ τούτου θα θέσουμε υπό μερική αμφισβήτηση εν προκειμένω την οποιαδήποτε πρακτική αξία των σχετικών μαθηματικών μοντέλων.

- [1] Ishihara, K. and Towhata, I. (1983). Sand response to cyclic rotation of principal stress directions as induced by wave loads. *Soils & Foundations*, 23, 11-26.
- [2] Gutierrez, M. and Ishihara, K. (2000). Flow theory for sand during rotation of principal stress, directions. *Soils & Foundations*, 40, 49-59.
- [3] Vardoulakis I. and Graf B. (1985). Calibration of constitutive models for granular materials using data from biaxial experiments. *Géotechnique*, 35, 299-317.
- [4] Papamichos E. and I. Vardoulakis (1994). Shear band formation in sand according to non-coaxial plasticity model. *Géotechnique*, 45 (4): 649-661.
- [5] Vardoulakis, I. and Georgopoulos, I.-O. (2005) .The "Stress - dilatancy" hypothesis revisited: shear - banding related instabilities. *Soils & Foundations*, 45 (2), 61-76.
- [6] Gutierrez, M and Vardoulakis, I. (2007). Energy dissipation and post-bifurcation behaviour of granular soils. *Int. J. Num. Anal. Meth. in Geomechanics*, 31, 435-455

³⁰ Η θεώρηση αυτή βρίσκεται έξω από τα πλαίσια ενός προπτυχιακού μαθήματος, όπως το παρόν. Πρβλ. I. Vardoulakis and J. Sulem, *Bifurcation Analysis in Geomechanics*, Blackie Academic and Professional, 1995.

5.6 Το Στατικό Πρόβλημα της Οριακής Αναλύσεως για μη-συνεκτικά Υλικά

5.6.1 Οι εξισώσεις Kötter-Massau



Εικ. 5-15: Ισοροπία στοιχείου στο επίπεδο

Θεωρούμε τις στατικές εξισώσεις ισοροπίας στο επίπεδο της παραμορφώσεως (Εικ. 5-15),

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \gamma_x = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \gamma_y = 0$$
(5.43)

Στις παραπάνω εξισώσεις με γ_x και γ_y συμβολίζουμε τις συνιστώσες του ειδικού βάρους του σώματος, που με τη σειρά εξαρτάται από την πυκνότητα του υλικού και τον προσανατολισμό του συστήματος συντεταγμένων ως προς την κατακόρυφο, $\gamma_i = \rho g_i$.

Από τις εξ. (5.39) και (5.43) παίρνουμε το εξής σύστημα μερικών διαφορικών εξισώσεων για τις άγνωστες συναρτήσεις $\sigma_m = \sigma(x, y)$ και $\psi_I = \psi(x, y)$ (γιατί):

$$(1 - \sin \varphi \cos 2\psi) \frac{\partial \sigma}{\partial x} - \sin \varphi \sin 2\psi \frac{\partial \sigma}{\partial y} + 2\sigma \sin \varphi \sin 2\psi \frac{\partial \psi}{\partial x} - 2\sigma \sin \varphi \cos 2\psi \frac{\partial \psi}{\partial y} = -\gamma_x$$

$$-\sin \varphi \sin 2\psi \frac{\partial \sigma}{\partial x} + (1 + \sin \varphi \cos 2\psi) \frac{\partial \sigma}{\partial y} - 2\sigma \sin \varphi \cos 2\psi \frac{\partial \psi}{\partial x} - 2\sigma \sin \varphi \sin 2\psi \frac{\partial \psi}{\partial y} = -\gamma_y$$
(5.44)

Το παραπάνω σύστημα Μ.Δ.Εξ. (5.44) ανήκει στη κλάση συστημάτων που αναλύσαμε γενικά στο Κεφ. 4.2. Ειδικότερα συμφώνως προς τη γενική εξ. (4.12) οι αντίστοιχοι συντελεστές δίδονται από τις εξής εκφράσεις:

$$\begin{aligned}
 a_1 &= 1 - \sin \varphi \cos 2\psi & b_1 &= -\sin \varphi \sin 2\psi \\
 a_2 &= -\sin \varphi \sin 2\psi & b_2 &= 1 + \sin \varphi \cos 2\psi \\
 a_3 &= 2\sigma \sin \varphi \sin 2\psi & b_3 &= -2\sigma \sin \varphi \cos 2\psi \\
 a_4 &= -2\sigma \sin \varphi \cos 2\psi & b_4 &= -2\sigma \sin \varphi \sin 2\psi \\
 A &= -\gamma_x & B &= -\gamma_y
 \end{aligned}
 \tag{5.45}$$

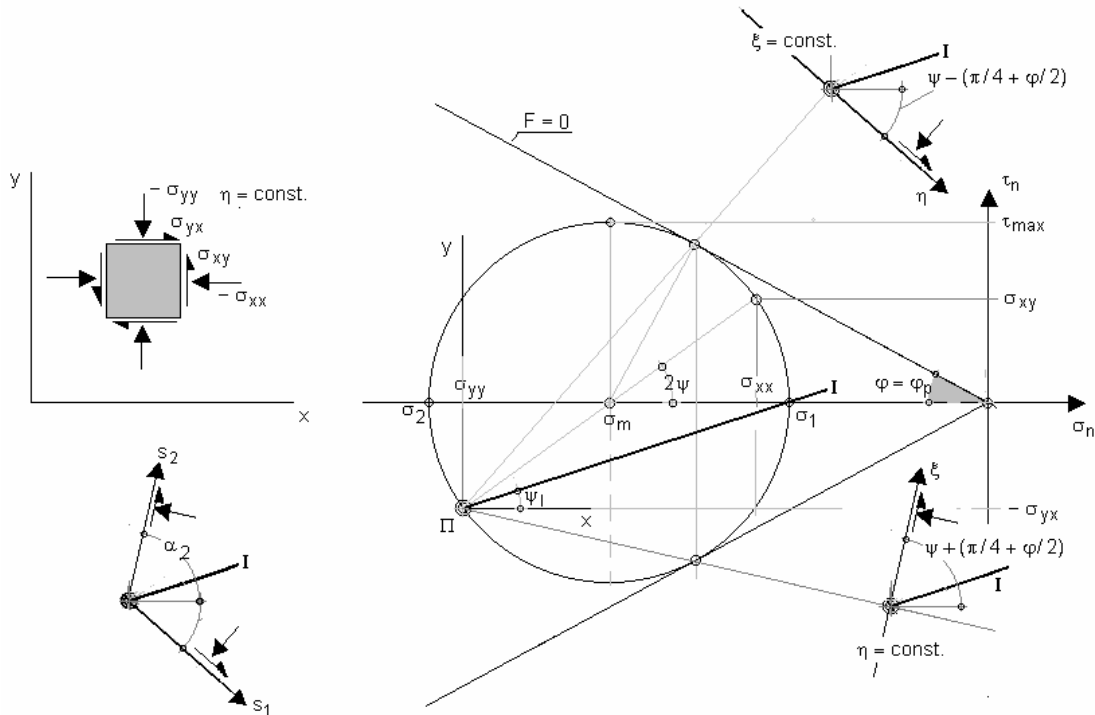
Από τις εκφράσεις αυτές και την εξ. (4.40) προκύπτει ότι όντως το θεωρούμενο σύστημα Μ.Δ. Εξ. (5.44) είναι υπερβολικού τύπου,

$$\Delta^2 = 4 \sin^2(2\phi) > 0
 \tag{5.46}$$

Οι αντίστοιχες χαρακτηριστικές κατευθύνσεις δίδονται από τις εξ. (4.43) και (4.44) που στην προκειμένη περίπτωση οδηγούν στις παρακάτω σχέσεις,

$$\alpha_{1,2} = \psi \mp \theta_C, \quad \theta_C = 45^\circ + \varphi/2
 \tag{5.47}$$

Όπως προκύπτει και από τον αντίστοιχο κύκλο Mohr των τάσεων, οι Χ.Γ., εξ. (5.47), του στατικού προβλήματος συμπίπτουν και πάλι με τις γραμμές διαρροής του υλικού, δηλαδή με τις επιφάνειες εκείνες, πάνω στις οποίες ο λόγος διατμητικής προς ορθή τάση είναι οριακός (Εικ. 5-16). Παρατηρούμε επίσης ότι η κατεύθυνση της αντίστοιχης κύριας τάσης σ_1 συμπίπτει με τη διχοτόμο της γωνίας μεταξύ των δύο Χ.Γ., οι οποίες προφανώς δεν είναι πλέον κάθετες μεταξύ τους.



Εικ. 5-16: Οριακή εντατική κατάσταση σε μη-συνεκτικό υλικό

Συμφώνως προς τους συμβολισμούς του Κεφ. 4 έχουμε εν προκειμένω,

$$\alpha_{1,2} = \frac{1}{2} \cot$$