

4 ΤΟ ΣΤΑΤΙΚΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΟΡΙΑΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΕΩΣ

4	ΤΟ ΣΤΑΤΙΚΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΟΡΙΑΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΕΩΣ	115
4.1	Οι Βασικές Στατικές και Κινηματικές Εξισώσεις	117
4.2	Συστήματα Υπερβολικού Τύπου και Χαρακτηριστικές Γραμμές	119
4.3	Σύνοψη αποτελεσμάτων	127
4.4	Το Λήμμα Hadamard και το Θεώρημα Maxwell	128
4.5	Εξισώσεις Hencky	129
4.6	Εξισώσεις Geiringer	133
4.7	Φορτίο Καταρρέυσεως Πεδιλοδοκού κατά Prandtl	134
4.8	Κάμψη Κοντού Προβόλου κατά Green	137
4.9	Πρόβλημα Cauchy και Διακριτοποίηση Massau	145

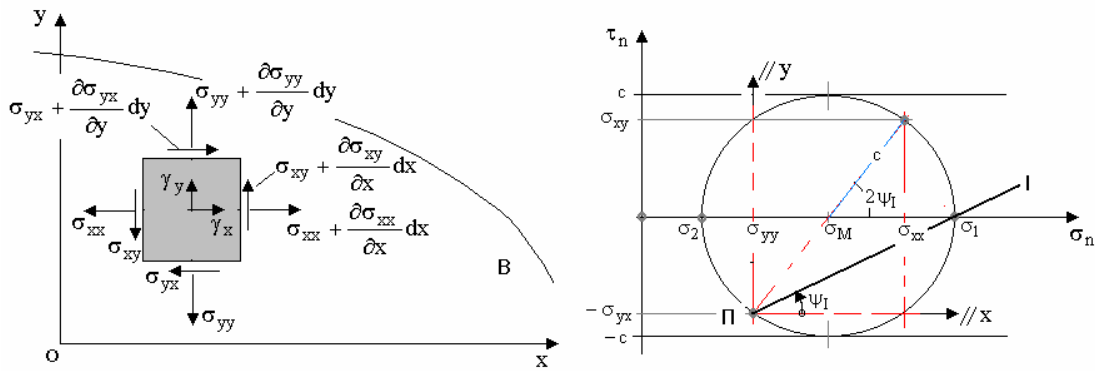
Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζουμε τις στατικές και κινηματικές εξισώσεις της οριακής ανάλυσεως σε δύο διαστάσεις για ιδεατά πλαστικά, απολύτως στερεά συνεκτικά υλικά. Οι στατικές εξισώσεις (εξισώσεις Hencky) ολοκληρώνονται σε δύο κλασσικά παραδείγματα δανεισμένα από την Γεωμηχανική και την Δομοστατική

© 4 ΤΟ ΣΤΑΤΙΚΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΟΡΙΑΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΕΩΣ, 2008

Ιωάννης Γ. Βαρδουλάκης, Dr-Ing., Καθηγητής της Μηχανικής στο Ε.Μ. Πολυτεχνείο
Τ.Θ. 144, Παιανία 190-02, <http://geolab.mechan.ntua.gr/>, I.Vardoulakis@mechan.ntua.gr

4.1 Οι Βασικές Στατικές και Κινηματικές Εξισώσεις

Θεωρούμε ένα παραμορφώσιμο σώμα **B** αποτελούμενο από ιδεατά πλαστικό, απολύτως στερεό συνεκτικό υλικό, το οποίο κάτω από την επίδραση επιφανειακών και καθολικών φορτίων βρίσκεται σε κατάσταση οριακής ισορροπίας. Ειδικότερα θεωρούμε την περίπτωση επίπεδης παραμορφώσεως στο επίπεδο $O(x, y)$.



Εικ. 4-1: Επίπεδη οριακή εντατική κατάσταση για ένα ιδεατά πλαστικό, απολύτως στερεό συνεκτικό υλικό

Ο τανυστής των τάσεων ικανοποιεί τις διαφορικές εξισώσεις ισορροπίας στο επίπεδο καθώς και το κριτήριο διαρροής κατά von Mises (Εικ. 4-1). Η ισορροπία στο τυχόν σημείο του σώματος εκφράζεται από τις παρακάτω διαφορικές εξισώσεις

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \gamma_x = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \gamma_y = 0$$
(4.1)

όπου γ_x και γ_y είναι οι συνιστώσες της καθολικής δύναμης. Π.χ. για κατακόρυφο άξονα y οι καθολικές δυνάμεις λόγω ειδικού βάρους δίδονται μέσω της πυκνότητας ρ και της επιταχύνσεως της βαρύτητας g ,

$$\gamma_x = 0, \quad \gamma_y = -g = -\rho g$$
(4.2)

Το κριτήριο διαρροής μας επιτρέπει να εκφράσουμε τις συνιστώσες του τανυστή των τάσεων μέσω δύο τασικών συναρτήσεων,

$$\sigma_M = \sigma(x, y), \quad \psi_I = \psi(x, y)$$
(4.3)

δηλαδή της μέσης τάσεως

$$\sigma_M = \frac{1}{2}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$$
(4.4)

και της γωνίας ψ_I , που σχηματίζει ο άξονας της μέγιστης κύριας τάσης σ_I με τον θετικό άξονα x . Πράγματι από τον αντίστοιχο κύκλο του Mohr των τάσεων (Εικ. 4-1) έχουμε,

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xx} &= \sigma_M + c \cos 2\psi_I \\
 \sigma_{yy} &= \sigma_M - c \cos 2\psi_I \\
 \sigma_{xy} &= \sigma_{yx} = c \sin 2\psi_I
 \end{aligned}
 \tag{4.5}$$

Εισάγοντας τώρα τις παραπάνω εκφράσεις για τις τάσεις (4.3) στις εξισώσεις ισορροπίας (4.1), παίρνουμε τελικά για την περίπτωση κατακόρυφων καθολικών δυνάμεων λόγω ιδίου βάρους το εξής σύστημα διαφορικών εξισώσεων για τις τασικές συναρτήσεις

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \sigma}{\partial x} - 2c \sin 2\psi \frac{\partial \psi}{\partial x} + 2c \cos 2\psi \frac{\partial \psi}{\partial y} &= 0 \\
 2c \cos 2\psi \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \sigma}{\partial y} + 2c \sin 2\psi \frac{\partial \psi}{\partial y} &= \gamma
 \end{aligned}
 \tag{4.6}$$

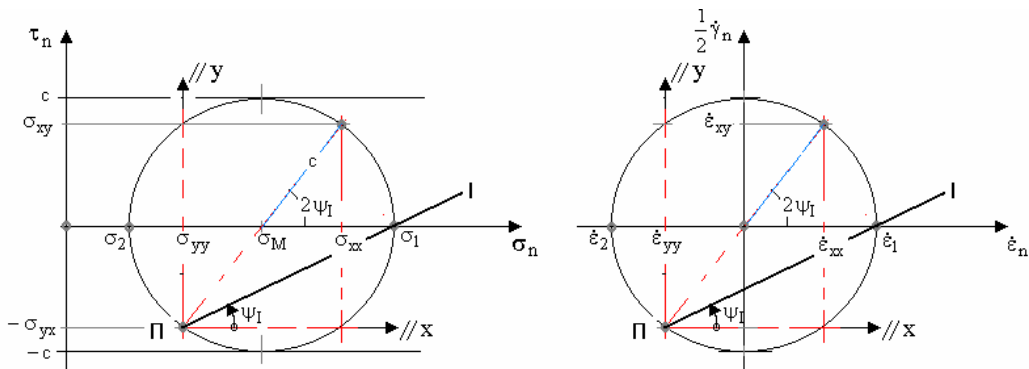
Αντιστοίχως οι συνιστώσες του τανυστή του ρυθμού της παραμορφώσεως ικανοποιούν το νόμο πλαστικής ροής, ο οποίος εκφράζεται από τις εξής υποθέσεις:

1. Η παραμόρφωση είναι ισόχωρη

$$\dot{\epsilon}_{xx} + \dot{\epsilon}_{yy} = 0 \quad (\dot{\epsilon}_{zz} = 0)
 \tag{4.7}$$

Οι κύριοι άξονες της τάσεως και του ρυθμού παραμορφώσεως συμπίπτουν, γεγονός που σημαίνει ότι οι πόλοι των αντιστοίχων κύκλων Mohr για την τάση και το ρυθμό παραμορφώσεως στο επίπεδο $O(x, y)$ είναι ομόθετοι (Εικ. 4-2),

$$\frac{2 \dot{\epsilon}_{xy}}{\dot{\epsilon}_{xx} - \dot{\epsilon}_{yy}} = \tan 2\psi
 \tag{4.8}$$



Εικ. 4-2: Ομόθετοι κύκλοι Mohr των τάσεων και του ρυθμού των παραμορφώσεων

Έστω οι συνιστώσες του διανύσματος της ταχύτητας

$$v_x = u(x, y), \quad v_y = v(x, y)
 \tag{4.9}$$

Ο ρυθμός παραμορφώσεως δίδεται ως το συμμετρικό μέρος της βαθμίδας της ταχύτητας,

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)
 \tag{4.10}$$

Ο παραπάνω νόμος πλαστικής ροής, εξ. (4.7) και (4.8) μπορεί να γραφεί συναρτήσει των συνιστωσών του διανύσματος της ταχύτητας ως εξής

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$$

$$\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \tan 2\psi + \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) = 0$$
(4.11)

Τά συστήματα των μερικών διαφορικών εξ. (4.6) και (4.11) συνιστούν τις βασικές στατικές και κινηματικές εξισώσεις του προβλήματος της Οριακής Αναλύσεως για το θεωρούμενο στερεό. Στη συνέχεια θα σκιαγραφήσουμε τη γενική μαθηματική αντιμετώπιση τέτοιων προβλημάτων στην ειδική εκείνη περίπτωση, όπου οι διαφορικές αυτές εξισώσεων συνιστούν συστήματα δύο ανεξαρτήτων μεταβλητών υπερβολικού τύπου¹.

4.2 Συστήματα Υπερβολικού Τύπου και Χαρακτηριστικές Γραμμές²

Τα σύστημα των Μ. Δ. Εξ. (4.6) και (4.11) ανήκουν στην κατηγορία των λεγόμενων οιονεί-γραμμικών³ διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους, το οποίο στη γενική του μορφή γράφεται ως εξής

$$a_1 \frac{\partial u}{\partial x} + a_2 \frac{\partial u}{\partial y} + a_3 \frac{\partial v}{\partial x} + a_4 \frac{\partial v}{\partial y} = A$$

$$b_1 \frac{\partial u}{\partial x} + b_2 \frac{\partial u}{\partial y} + b_3 \frac{\partial v}{\partial x} + b_4 \frac{\partial v}{\partial y} = B$$
(4.12)

Γενικώς οι συντελεστές του συστήματος μ.δ.ε. (4.12) θα θεωρηθούν ως γνωστές συναρτήσεις των ανεξαρτήτων και των εξαρτημένων μεταβλητών, δηλαδή θα υποθέσουμε ότι

$$a_i = \hat{a}_i(x, y, u, v) \text{ κ.λπ.}$$
(4.13)

Για παράδειγμα, στην περίπτωση των στατικών εξ. (4.6) της θεωρίας της Οριακής Αναλύσεως για ιδεατά πλαστικά, απολύτως στερεά συνεκτικά υλικά έχουμε την εξής ταυτοποίηση,

$$u \equiv \sigma(x, y), \quad v \equiv \psi(x, y)$$
(4.14)

και

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = -2c \sin 2\psi, \quad a_4 = 2c \cos 2\psi, \quad A = 0$$
(4.15)

$$b_1 = 0, \quad b_2 = 1, \quad b_3 = 2c \cos 2\psi, \quad b_4 = 2c \sin 2\psi, \quad B = \gamma$$
(4.16)

Στην περίπτωση αυτή θα μπορούσαμε να φαντασθούμε ότι πάνω σε μία επιφάνεια, της οποίας το ίχνος στο επίπεδο $O(x, y)$ περιγράφεται από την καμπύλη (σύνορο)

¹ R. Courant und D. Hilbert. *Methoden der mathematischen Physik*. Bd. II, Kap. 5, Springer, 1937 (1967).

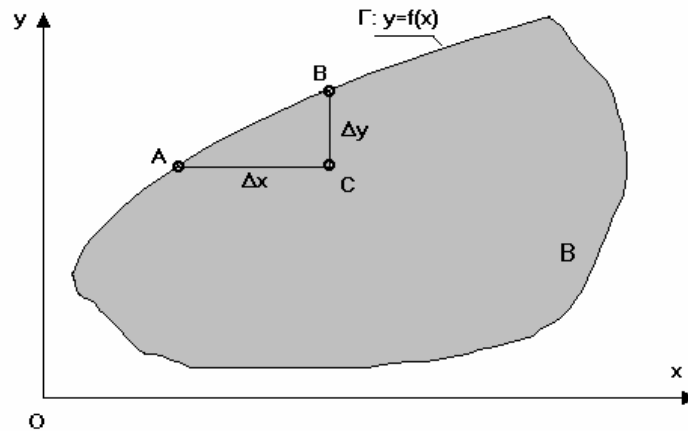
² L. Collatz. *Numerische Behandlung von Differentialgleichungen*, Springer, §5, 297-301, 1955.

³ Ο όρος οιονεί-γραμμικός (Αγγλ. *quasi-linear*) περιγράφει το γεγονός ότι οι συντελεστές του συστήματος εξ. (4.12) είναι συναρτήσεις των ανεξαρτήτων μεταβλητών και των αγνώστων συναρτήσεων αλλά όχι και των μερικών παραγώγων τους.

$$(\Gamma): y = f(x) \quad (4.17)$$

είναι γνωστές οι τάσεις και κατ' επέκταση είναι γνωστές οι συναρτήσεις $\sigma(x, y)$ και $\psi(x, y)$

$$\begin{aligned} \sigma(x, f(x)) &= \bar{\sigma}(x) \\ \psi(x, f(x)) &= \bar{\psi}(x) \end{aligned} \quad (4.18)$$



Εικ. 4-3: Αναλυτική επέκταση δεδομένων ξεκινώντας από το σύνορο (Γ)

Έστω τώρα δύο γειτονικά σημεία A και B επί της καμπύλης (Γ) με συντεταγμένες $A(x_A, y_A)$ και $B(x_B = x_A + \Delta x, y_B = y_A + \Delta y)$ όπου (Εικ. 4-3)

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx \left(\frac{df}{dx} \right)_A \quad (4.19)$$

Για τον υπολογισμό των τιμών των συναρτήσεων στο εσωτερικό σημείο $C(x_B, y_A) \in B$ αναπτύσσουμε κατ' αρχήν τις συναρτήσεις $\sigma(x, y)$ και $\psi(x, y)$ κατά Taylor περί τα σημεία A και B,

$$\sigma(C) \approx \sigma(A) + \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} \right)_A \Delta x \quad (4.20)$$

$$\sigma(C) \approx \sigma(B) - \left(\frac{\partial \sigma}{\partial y} \right)_B \Delta y$$

$$\psi(C) \approx \psi(A) + \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)_A \Delta x \quad (4.21)$$

$$\psi(C) \approx \psi(B) - \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)_B \Delta y$$

Η τιμή της κάθε μιας από τις ζητούμενες συναρτήσεις στο σημείο C δεν εξαρτάται από την οδεύση⁴, δηλαδή δεν εξαρτάται από το αν πηγαίνουμε από το A στο C απ' ευθείας ή μέσω του σημείου B. Για να το δούμε αυτό παρατηρούμε ότι,

$$\sigma(B) \approx \sigma(A) + \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x}\right)_A \Delta x + \left(\frac{\partial \sigma}{\partial y}\right)_A \Delta y \quad (4.22)$$

ή

$$\left(\frac{d\bar{\sigma}}{dx}\right)_A \approx \frac{\sigma(B) - \sigma(A)}{\Delta x} \approx \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x}\right)_A + \left(\frac{\partial \sigma}{\partial y}\right)_A \left(\frac{df}{dx}\right)_A \quad (4.23)$$

Άρα

$$\left(\frac{\partial \sigma}{\partial x}\right)_A \approx \left(\frac{d\bar{\sigma}}{dx}\right)_A - \left(\frac{\partial \sigma}{\partial y}\right)_A \left(\frac{df}{dx}\right)_A \quad (4.24)$$

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)_A \approx \left(\frac{d\bar{\psi}}{dx}\right)_A - \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)_A \left(\frac{df}{dx}\right)_A$$

Οπότε από τη σχέση

$$\sigma(C) \approx \sigma(A) + \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x}\right)_A \Delta x = \sigma(A) + \left(\left(\frac{d\bar{\sigma}}{dx}\right)_A - \left(\frac{\partial \sigma}{\partial y}\right)_A \left(\frac{df}{dx}\right)_A\right) \Delta x \quad (4.25)$$

και

$$\sigma(A) + \left(\frac{d\bar{\sigma}}{dx}\right)_A \Delta x \approx \sigma(B) \quad (4.26)$$

$$\left(\frac{\partial \sigma}{\partial y}\right)_A \left(\frac{df}{dx}\right)_A \Delta x \approx \left(\left(\frac{\partial \sigma}{\partial y}\right)_B - O(\Delta x)\right) \frac{\Delta y}{\Delta x} \Delta x \approx \left(\frac{\partial \sigma}{\partial y}\right)_B \Delta y$$

παίρνουμε τελικά ότι οι τιμές των συναρτήσεων στο σημείο C είναι πράγματι ανεξάρτητες της οδεύσεως

$$\sigma(C) \approx \sigma(A) + \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x}\right)_A \Delta x \Leftrightarrow \sigma(C) \approx \sigma(B) - \left(\frac{\partial \sigma}{\partial y}\right)_B \Delta y \quad (4.27)$$

Ομοίως ισχύουν τα ανάλογα και για την τιμή της συναρτήσεως ψ στο σημείο C.

Ως πρώτο συμπέρασμα από τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει ότι για την επέκταση των συναρτήσεων από ένα συνοριακό σημείο A σε ένα σημείο C, στο εσωτερικό του σώματος **B**, χρειάζεται, πέραν των συνοριακών τιμών εξ. (4.18), και η πληροφορία για την κλίση των αγνώστων συναρτήσεων ως προς μία μόνο κατεύθυνση, δηλαδή χρειάζεται να γνωρίζουμε π.χ. μόνο τις μερικές ως προς y παραγώγους αυτών επί της καμπύλης (Γ):

$$\sigma_y(A) = \left(\frac{\partial \sigma}{\partial y}\right)_A, \quad \psi_y(A) = \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)_A \quad (4.28)$$

⁴ Πρβλ. Κεφ. 4.4

Πράγματι, εισάγοντας τις εξ. (4.24) στο αρχικό σύστημα εξ. (4.12) και (4.14), παίρνουμε το εξής αλγεβρικό σύστημα εξισώσεων για τις ζητούμενες κλίσεις,

$$(-f'a_1 + a_2)_A \sigma_y(A) + (-f'a_3 + a_4)_A \psi_y(A) = A - (a_1\bar{\sigma}')_A - (a_3\bar{\psi}')_A \quad (4.29)$$

$$(-f'b_1 + b_2)_A \sigma_y(A) + (-f'b_3 + b_4)_A \psi_y(A) = B - (b_1\bar{\sigma}')_A - (b_3\bar{\psi}')_A$$

όπου

$$f' = \frac{df}{dx} \quad (4.30)$$

$$\bar{\sigma}' = \frac{d\bar{\sigma}}{dx}, \quad \bar{\psi}' = \frac{d\bar{\psi}}{dx}$$

Άρα για την επέκταση των συναρτήσεων $\sigma(x, y)$ και $\psi(x, y)$ στην περιοχή της καμπύλης (Γ) χρειάζεται να εξασφαλισθεί ότι το παραπάνω σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων (4.29) μπορεί να επιλυθεί μονοσήμαντα ως προς τις κλίσεις $\sigma_y(A)$ και $\psi_y(A)$. Πράγματι, αν η ορίζουσα του συστήματος αυτού είναι διάφορη του μηδενός, τότε η παραπάνω διαδικασία επεκτάσεως των πεδίων εγκαρσίως της καμπύλης (Γ) είναι δυνατή.

Εξετάζουμε τώρα την περίπτωση όπου οι συντελεστές του συστήματος των εξ. (4.29) είναι τέτοιοι ώστε η παραπάνω διαδικασία επεκτάσεως των πεδίων να μην είναι δυνατή. Αυτό σημαίνει ότι εξετάζουμε την ύπαρξη καμπυλών

$$(\Gamma^*): \xi(x, y) = const. \quad (4.31)$$

οι οποίες χαρακτηρίζονται από την ιδιότητα, ότι εγκάρσια προς αυτές δεν είναι δυνατόν να επεκτείνουμε τις συναρτήσεις $\sigma(x, y)$ και $\psi(x, y)$. Τέτοιες καμπύλες, εφόσον υπάρχουν, καλούνται «*χαρακτηριστικές γραμμές*» (Χ.Γ.)⁵ το δε αντίστοιχο σύστημα των οιονεί-γραμμικών διαφορικών εξισώσεων (4.29) ταξινομείται ως ένα σύστημα «*υπερβολικών εξισώσεων*»⁶.

Έστω τώρα μία (Χ.Γ.) στο επίπεδο $O(x, y)$ που περιγράφεται από την εξίσωση

$$(\Gamma^*): \xi(x, y) = y - f(x) = 0 \quad (4.32)$$

οπότε

$$d\xi = \xi_x dx + \xi_y dy \quad (4.33)$$

όπου

$$\xi_x = \frac{\partial \xi}{\partial x} = f' \quad (4.34)$$

$$\xi_y = \frac{\partial \xi}{\partial y} = 1$$

και το σύστημα των εξ. (4.29) παίρνει τη μορφή,

⁵ Αγγλ. *characteristic lines*

⁶ Πρβλ. A.J. Roberts, *A one-dimensional Introduction to Continuum Mechanics*, sect. 3.3.2, World Scientific, 1994.

$$(a_1\xi_x + a_2\xi_y)_A \left(\frac{\partial \sigma}{\partial y} \right)_A + (a_3\xi_x + a_4\xi_y)_A \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)_A = \xi_y (A - a_1\bar{\sigma}' - a_3\bar{\psi}')_A \quad (4.35)$$

$$(b_1\xi_x + b_2\xi_y)_A \left(\frac{\partial \sigma}{\partial y} \right)_A + (b_3\xi_x + b_4\xi_y)_A \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)_A = \xi_y (B - b_1\bar{\sigma}' - b_3\bar{\psi}')_A$$

Το αλγεβρικό σύστημα των εξ. (4.35) δεν έχει λύση όταν η ορίζουσά του μηδενίζεται, δηλαδή όταν

$$D = \begin{vmatrix} a_1\xi_x + a_2\xi_y & a_3\xi_x + a_4\xi_y \\ b_1\xi_x + b_2\xi_y & b_3\xi_x + b_4\xi_y \end{vmatrix} = 0 \quad (4.36)$$

Με τον συμβολισμό

$$\tan \alpha = -\frac{\xi_x}{\xi_y} \quad (4.37)$$

για την κλίση των Χ.Γ., πάνω στις οποίες μηδενίζεται η ορίζουσα του συστήματος, από την εξ. (4.36) παίρνουμε την εξής «χαρακτηριστική εξίσωση»,

$$a_{13} \tan^2 \alpha - (a_{14} + a_{23}) \tan \alpha + a_{24} = 0 \quad (4.38)$$

όπου

$$a_{ij} = a_i b_j - a_j b_i \quad (i, j = 1, 2, 3, 4) \quad (4.39)$$

Η δευτεροβάθμια χαρακτηριστική εξ. (4.38) έχει πραγματικές λύσεις για την κλίση $\tan \alpha$ όταν η διακρίνουσά της είναι θετική,

$$\Delta^2 = (a_{14} + a_{23})^2 - 4a_{13}a_{24} > 0 \quad (4.40)$$

Στην περίπτωση αυτή διαπιστώνουμε ότι υπάρχουν δύο λύσεις για τις χαρακτηριστικές διευθύνσεις,

$$\tan \alpha_{1,2} = \frac{a_{14} + a_{23} \pm \Delta}{2a_{13}} \quad (4.41)$$

Παρατηρούμε επίσης ότι από την ταυτότητα

$$\frac{1}{2} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{vmatrix} = a_{12}a_{34} - a_{13}a_{24} + a_{14}a_{23} = 0 \quad (4.42)$$

έπονται οι σχέσεις:

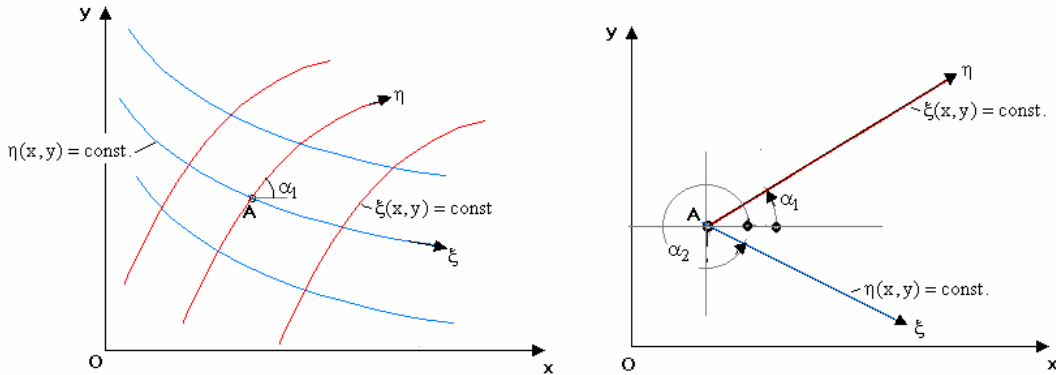
$$\tan \alpha_1 = -\frac{\xi_x}{\xi_y} = \frac{a_{14} + a_{23} + \Delta}{2a_{13}} = \frac{2a_{24}}{a_{14} + a_{23} - \Delta} \quad (4.43)$$

$$\tan \alpha_2 = -\frac{\eta_x}{\eta_y} = \frac{a_{14} + a_{23} - \Delta}{2a_{13}} = \frac{2a_{24}}{a_{14} + a_{23} + \Delta} \quad (4.44)$$

Αντιστοίχως διακρίνουμε δύο οικογένειες Χ.Γ. (Εικ. 4-4),

$$\eta - (\text{Χ.Γ.}) : \xi(x, y) = \text{const.}, \quad -\frac{\xi_x}{\xi_y} = \tan \alpha_1 \quad (4.45)$$

$$\xi - (\text{Χ.Γ.}) : \eta(x, y) = \text{const.}, \quad -\frac{\eta_x}{\eta_y} = \tan \alpha_2 \quad (4.46)$$



Εικ. 4-4: Συζυγείς χαρακτηριστικές γραμμές και ορισμός των χαρακτηριστικών γωνιών των κλίσεων αυτών

Έχοντας τώρα διαπιστώσει την ύπαρξη δύο οικογενειών (Χ.Γ.) στο επίπεδο $O(x, y)$

$$\xi = \xi(x, y), \quad \eta = \eta(x, y) \quad (4.47)$$

πραγματοποιούμε το μετασχηματισμό από τις καρτεσιανές συντεταγμένες (x, y) στις καμπυλόγραμμες συντεταγμένες των (Χ.Γ.),

$$x = x(\xi, \eta), \quad y = y(\xi, \eta) \quad (4.48)$$

Ο μετασχηματισμός αυτός είναι πράγματι αντιστρέψιμος, όταν η ιακωβιανή του είναι διάφορη του μηδενός

$$J = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} \neq 0 \quad (4.49)$$

Επιστρέφουμε τώρα χάριν γενικότητας στο αρχικό γενικό σύστημα Μ.Δ. Εξ. (4.12), και παρατηρούμε ότι,

$$u_x \equiv \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x \quad (4.50)$$

Αντιστοίχως μετασχηματίζονται και τα u_y, v_x, v_y , οπότε το αρχικό σύστημα των εξ. (4.12) γράφεται,

$$\begin{bmatrix} a_1 \xi_x + a_2 \xi_y & a_3 \xi_x + a_4 \xi_y \\ b_1 \xi_x + b_2 \xi_y & b_3 \xi_x + b_4 \xi_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_\xi \\ v_\xi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - (a_1 \eta_x + a_2 \eta_y) u_\eta - (a_3 \eta_x + a_4 \eta_y) v_\eta \\ B - (b_1 \eta_x + b_2 \eta_y) u_\eta - (b_3 \eta_x + b_4 \eta_y) v_\eta \end{bmatrix} \quad (4.51)$$

Παρατηρούμε τώρα ότι λόγω της εξ. (4.36) η ορίζουσα του συστήματος των εξ. (4.51) μηδενίζεται. Οι συναρτήσεις u και v όπως και οι μερικές τους παράγωγοι u_ξ , u_η και v_ξ , v_η είναι ορισμένες και συνεχείς κατά μήκος της η -(X.Γ.), $\xi = const.$. Άρα για να είναι συμβατή η συνθήκη (4.36) με την ύπαρξη λύσεως για τα u_ξ και v_ξ από το σύστημα των εξ. (4.51) πρέπει επί πλέον να απαιτήσουμε την εξής συνθήκη:

$$D_1 = \begin{vmatrix} A - (a_1\eta_x + a_2\eta_y)u_\eta - (a_3\eta_x + a_4\eta_y)v_\eta & a_3\xi_x + a_4\xi_y \\ B - (b_1\eta_x + b_2\eta_y)u_\eta - (b_3\eta_x + b_4\eta_y)v_\eta & b_3\xi_x + b_4\xi_y \end{vmatrix} = 0 \quad (4.52)$$

Η σχέση αυτή είναι μια γραμμική εξίσωση για τις τιμές u_η και v_η ,

$$(a_{13}\xi_x\eta_x + a_{14}\xi_y\eta_x + a_{23}\xi_x\eta_y + a_{24}\xi_y\eta_y)u_\eta - a_{34}Jv_\eta = A_3\xi_x + A_4\xi_y \quad (4.53)$$

όπου

$$A_i = Ab_i - Ba_i \quad (i=1,2,3,4) \quad (4.54)$$

Λόγω των εξ. (4.37) και (4.38) ο συντελεστής του παράγοντα u_η στην εξ. (4.53) γράφεται

$$\begin{aligned} & \xi_y \left((-a_{13} \tan \alpha_1 + a_{14}) \eta_x + (-a_{23} \tan \alpha_1 + a_{24}) \eta_y \right) \\ &= \xi_y \left((-a_{13} \tan \alpha_1 + a_{14}) \eta_x + \tan \alpha_1 (-a_{13} \tan \alpha_1 + a_{14}) \eta_y \right) \\ &= \xi_y \left(\eta_x - \eta_y \frac{\xi_x}{\xi_y} \right) (-a_{13} \tan \alpha_1 + a_{14}) \\ &= J (a_{13} \tan \alpha_1 - a_{14}) \end{aligned} \quad (4.55)$$

Οπότε η εξ. (4.52) παίρνει την μορφή,

$$Jv_\eta - q_1 Ju_\eta = -\frac{A_3\xi_x + A_4\xi_y}{a_{34}} \quad (4.56)$$

όπου λόγω των εξ. (4.43)

$$q_1 = \frac{a_{13} \tan \alpha_1 - a_{14}}{a_{34}} = \frac{-a_{14} + a_{23} + \Delta}{2a_{34}} = \frac{2a_{12}}{-a_{14} + a_{23} - \Delta} \quad (4.57)$$

Έστω τώρα $s = s_1$ το μήκος τόξου κατά μήκος της η -(X.Γ.), $\xi = const.$. Τότε

$$\begin{aligned} \frac{dv}{ds} &= \frac{\partial v}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial s} = v_\eta (\eta_x x_s + \eta_y y_s) \\ &= v_\eta x_s \left(\eta_x + \eta_y \frac{dy}{dx} \right) \\ &= v_\eta x_s \left(\eta_x - \eta_y \frac{\xi_x}{\xi_y} \right) \\ &= -\frac{v_\eta x_s}{\xi_y} J \end{aligned} \quad (4.58)$$

και ομοίως

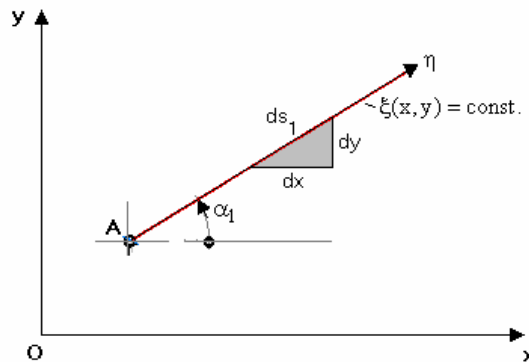
$$\frac{du}{ds} = -\frac{u_\eta x_s}{\xi_y} J \quad (4.59)$$

Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι,

$$\begin{aligned} x_s &= \cos \alpha_1 \\ -\frac{\xi_x}{\xi_y} &= \tan \alpha_1 \end{aligned} \quad (4.60)$$

παίρνουμε τελικά ότι κατά μήκος της η -(X.Γ.) οι συναρτήσεις u και v ικανοποιούν την εξής κανονική διαφορική εξίσωση (Εικ. 4-5)

$$\left(\frac{dv}{ds_1} - q_1 \frac{du}{ds_1} \right)_{\xi=\text{const.}} = -\frac{A_3}{a_{34}} \sin \alpha_1 + \frac{A_4}{a_{34}} \cos \alpha_1 \quad (4.61)$$



Εικ. 4-5: Η η -(X.Γ.), $\xi = \text{const}$ και η γωνία κλίσεώς της

Όσον αφορά τώρα την εξίσωση που διέπει τη μεταβολή των πεδίων u και v ανά μήκος της ξ -(X.Γ.) έχουμε αντίστοιχα την κανονική διαφορική εξίσωση,

$$\left(\frac{dv}{ds_2} - q_2 \frac{du}{ds_2} \right)_{\eta=\text{const.}} = -\frac{A_3}{a_{34}} \sin \alpha_2 + \frac{A_4}{a_{34}} \cos \alpha_2 \quad (4.62)$$

Όπου

$$q_2 = \frac{-a_{14} + a_{23} - \Delta}{2a_{34}} = \frac{2a_{12}}{-a_{14} + a_{23} + \Delta} \quad (4.63)$$

Οι εξ. (4.61) και (4.62) συνιστούν τη λεγόμενη «κανονική μορφή» του αρχικού συστήματος (4.12). Συμπεραίνουμε λοιπόν τα εξής: Όταν το αρχικό σύστημα εξισώσεων είναι υπερβολικού τύπου, τότε η πληροφορία που εμπεριέχεται στις εξ. (4.61) και (4.62) για τις συναρτήσεις u και v διαδίδεται μόνο κατά μήκος των (X.Γ.) και όχι εγκάρσια προς αυτές. Κατά συνέπεια οι αρχικές εξισώσεις (4.12) μετασχηματίζονται στο καμπυλόγραμμο σύστημα συντεταγμένων των (X.Γ.) σε κανονικές Δ.Ε. ως προς τις εξαρτημένες μεταβλητές u και v και ολοκληρώνονται απ' ευθείας κατά μήκος αυτών.

4.3 Σύνοψη αποτελεσμάτων

Το αρχικό οιονεί γραμμικό σύστημα Μ.Δ. Εξ.

$$a_1 \frac{\partial u}{\partial x} + a_2 \frac{\partial u}{\partial y} + a_3 \frac{\partial v}{\partial x} + a_4 \frac{\partial v}{\partial y} = A \tag{4.64}$$

$$b_1 \frac{\partial u}{\partial x} + b_2 \frac{\partial u}{\partial y} + b_3 \frac{\partial v}{\partial x} + b_4 \frac{\partial v}{\partial y} = B$$

είναι υπερβολικού τύπου όταν,

$$\Delta^2 = (a_{14} + a_{23})^2 - 4a_{13}a_{24} > 0 \tag{4.65}$$

όπου

$$a_{ij} = a_i b_j - a_j b_i \quad (i, j = 1, 2, 3, 4) \tag{4.66}$$

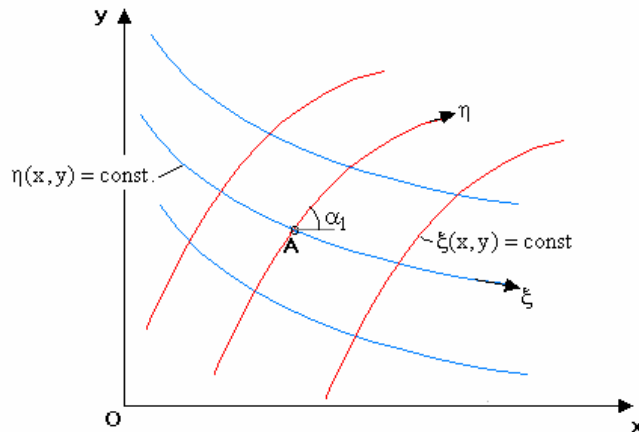
Τότε υπάρχουν δύο οικογένειες (Χ.Γ.), Εικ. 4-6:

$$\eta - (\text{Χ.Γ.}) : \xi(x, y) = \text{const.}, \quad -\frac{\xi_x}{\xi_y} = \tan \alpha_1 \tag{4.67}$$

$$\xi - (\text{Χ.Γ.}) : \eta(x, y) = \text{const.}, \quad -\frac{\eta_x}{\eta_y} = \tan \alpha_2$$

με χαρακτηριστικές κλίσεις αντιστοίχως

$$\tan \alpha_{1,2} = \frac{a_{14} + a_{23} \pm \Delta}{2a_{13}} = \frac{2a_{24}}{a_{14} + a_{23} \mp \Delta} \tag{4.68}$$



Εικ. 4-6: Συζυγείς χαρακτηριστικές γραμμές

Κατά μήκος των (Χ.Γ.) το αρχικό σύστημα Μ.Δ. Εξ. (4.64) μετασχηματίζεται σε σύστημα Κ. Δ. Εξ.,

$$\left(\frac{dv}{ds_1} - q_1 \frac{du}{ds_1} \right)_{\xi=const.} = -\frac{A_3}{a_{34}} \sin \alpha_1 + \frac{A_4}{a_{34}} \cos \alpha_1 \quad (4.69)$$

$$\left(\frac{dv}{ds_2} - q_2 \frac{du}{ds_2} \right)_{\eta=const.} = -\frac{A_3}{a_{34}} \sin \alpha_2 + \frac{A_4}{a_{34}} \cos \alpha_2$$

Όπου

$$q_{1,2} = \frac{-a_{14} + a_{23} \pm \Delta}{2a_{34}} = \frac{2a_{12}}{-a_{14} + a_{23} \mp \Delta} \quad (4.70)$$

$$A_i = Ab_i - Ba_i \quad (i=1,2,3,4) \quad (4.71)$$

4.4 Το Λήμμα Hadamard και το Θεώρημα Maxwell

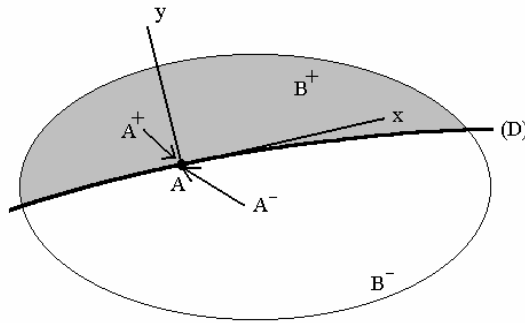
Θωρούμε την καμπύλη

$$D: y = f(x) \quad (4.72)$$

και τη συνάρτηση

$$z = \hat{z}(x, y) \quad (4.73)$$

Η καμπύλη D χωρίζει το αρχικό χωρίο \mathbf{B} σε δύο υποχωρία \mathbf{B}^+ και \mathbf{B}^- (Εικ. 4-7). Έστω, $z^- = \hat{z}(x, y)$, $(x, y) \in \mathbf{B}^-$: $z^- = \hat{z}^-(x, y)$ (4.74)



Εικ. 4-7: Λήμμα του Hadamard

Έστω

$$z_D = \hat{z}^-(x, f(x)) : z_D = \hat{z}_D^-(x) \quad (4.75)$$

τότε

$$\frac{dz_D^-}{dx} = \frac{\partial \hat{z}^-}{\partial x} \Big|_D + \frac{\partial \hat{z}^-}{\partial y} \Big|_D \frac{df}{dx} \quad (4.76)$$

Θέτοντας την αρχή των αξόνων στο σημείο A επί της D και τον άξονα x εφαπτομενικό της D στο A , τότε παίρνουμε

$$\frac{df}{dx} = 0 \Rightarrow \left. \frac{\partial \hat{z}^-}{\partial x} \right|_D = \frac{dz_D^-}{dx} \quad (4.77)$$

Ομοίως έχουμε ότι,

$$\left. \frac{\partial \hat{z}^+}{\partial x} \right|_D = \frac{dz_D^+}{dx} \quad (4.78)$$

Υποθέτοντας την ύπαρξη των μονοπλεύρων ορίων ανεξαρτήτων της οδεύσεως

$$\begin{aligned} Z^+ &= \lim_{A^+ \rightarrow A} (\hat{z}^+(A^+)) \\ Z^- &= \lim_{A^- \rightarrow A} (\hat{z}^-(A^-)) \end{aligned} \quad (4.79)$$

ορίζουμε το άλμα

$$[[z]] = Z^+ - Z^- \quad (4.80)$$

Αν το πεδίο z είναι συνεχές εγκαρσώς της D , τότε το άλμα του μηδενίζεται⁷,

$$[[z]] = 0 \Leftrightarrow z_D^- \equiv z_D^+ \quad \forall A \in D \quad (4.81)$$

Από τις εξ. (4.77) και (4.78) προκύπτει το εξής,

Θεώρημα του Maxwell

Όταν ένα πεδίο $z(x, y)$ είναι συνεχές τότε ως προς μία καμπύλη (επιφάνεια) D μόνο η βαθμίδα του καθέτως προς αυτή μπορεί να εμφανίζει ασυνέχεια⁸,

$$[[\partial_i z]] = \zeta n_i \quad (4.82)$$

όπου n_i είναι το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα επί της D στο σημείο A .

Από το θεώρημα Maxwell έπεται ότι η κλίση του πεδίου $z(x, y)$ κατά μήκος της D είναι συνεχής.

4.5 Εξισώσεις Hencky

Θεωρούμε το στατικό πρόβλημα της θεωρίας της Οριακής Αναλύσεως για αβαρές υλικό,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma}{\partial x} - 2c \sin 2\psi \frac{\partial \psi}{\partial x} + 2c \cos 2\psi \frac{\partial \psi}{\partial y} &= 0 \\ 2c \cos 2\psi \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \sigma}{\partial y} + 2c \sin 2\psi \frac{\partial \psi}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \quad (4.83)$$

Με την ταυτοποίηση, $u \equiv \sigma_M = \sigma(x, y)$, $v \equiv \psi_I = \psi(x, y)$ και,

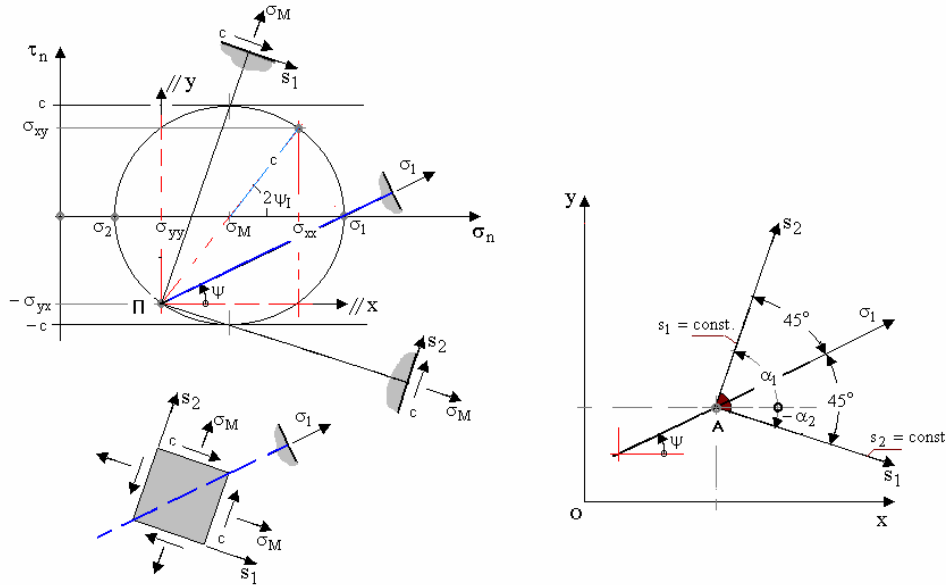
$$\begin{aligned} a_1 &= 1, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = -2c \sin 2\psi, \quad a_4 = 2c \cos 2\psi, \quad A = 0 \\ b_1 &= 0, \quad b_2 = 1, \quad b_3 = 2c \cos 2\psi, \quad b_4 = 2c \sin 2\psi, \quad B = 0 \end{aligned} \quad (4.84)$$

⁷ Η εξ. (4.81) είναι γνωστή ως λήμμα του Hadamard

⁸ Η εξ. (4.82) είναι γνωστή ως συνθήκη Maxwell

από την παραπάνω σύνοψη αποτελεσμάτων του Κεφ. 4.3 παίρνουμε ότι πράγματι το σύστημα των εξ. (4.83) είναι υπερβολικού τύπου, και ότι οι χαρακτηριστικές κατευθύνσεις δίδονται από τις γωνίες κλίσεως (Εικ. 4-8),

$$\alpha_{1,2} = \psi \pm \frac{\pi}{4} \tag{4.85}$$



Εικ. 4-8: Χαρακτηριστικές γραμμές στο στατικό πρόβλημα της Οριακής Αναλύσεως (γραμμές διαρροής)

Όπως φαίνεται και από τον κύκλο Mohr των τάσεων, οι (Χ.Γ.) του στατικού προβλήματος είναι κάθετες μεταξύ τους και η κατεύθυνση της μέγιστης κυρίας τάσεως σ_1 συμπίπτει με την εσωτερική διχοτόμο της γωνίας που αυτές σχηματίζουν. **Οι χαρακτηριστικές κατευθύνσεις συμπίπτουν με τις κατευθύνσεις των επιπέδων μέγιστης διατμητικής τάσεως**, που αντιστοιχούν στα επίπεδα εκείνα, πάνω στα οποία η διατμητική τάση ισούται με την τάση διαρροής c του υλικού. Για τον λόγο αυτό οι (Χ.Γ.) του στατικού προβλήματος ονομάζονται και «*γραμμές διαρροής*» (Γ.Δ.)⁹, αφού αυτές ταυτίζονται με πιθανά επίπεδα αστοχίας.

Η κανονική μορφή των στατικών εξισώσεων κατά μήκος των (Γ.Δ.) είναι η εξής,

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{ds_1} - 2c \frac{d\psi}{ds_1} &= 0 \\ \frac{d\sigma}{ds_2} + 2c \frac{d\psi}{ds_2} &= 0 \end{aligned} \tag{4.86}$$

Οι εξισώσεις αυτές αναφέρονται στη βιβλιογραφία ως οι εξισώσεις Hencky¹⁰.

Ασκήσεις

⁹ Αγγλ. *yield lines*

¹⁰ H. Hencky (1923). Ueber einige statisch bestimmte Faelle des Gleichgewichts in plastischen Koerpern. ZAMM, bd. 3 H. 4, 241-250.

1. Να αποδειχθούν οι Εξ. (4.85) και (4.86) βάσει του γενικού σχήματος υπολογισμού του Κεφ. 4.3.
2. Να βρεθεί η κανονική μορφή των στατικών εξισώσεων για βαρύ υλικό ($\gamma > 0$)

Παρατηρούμε ότι κατά μήκος των χαρακτηριστικών :

- s_1 --(Γ.Δ.) ($s_2 = const.$)

$$\frac{dy}{dx} = \tan \alpha_2 = -\tan(\pi/4 - \psi) \quad (4.87)$$

και

$$\eta = \sigma - 2c\psi = const. \quad (4.88)$$

- s_2 --(Γ.Δ.) ($s_1 = const.$)

$$\frac{dy}{dx} = \tan \alpha_1 = \tan(\pi/4 + \psi) \quad (4.89)$$

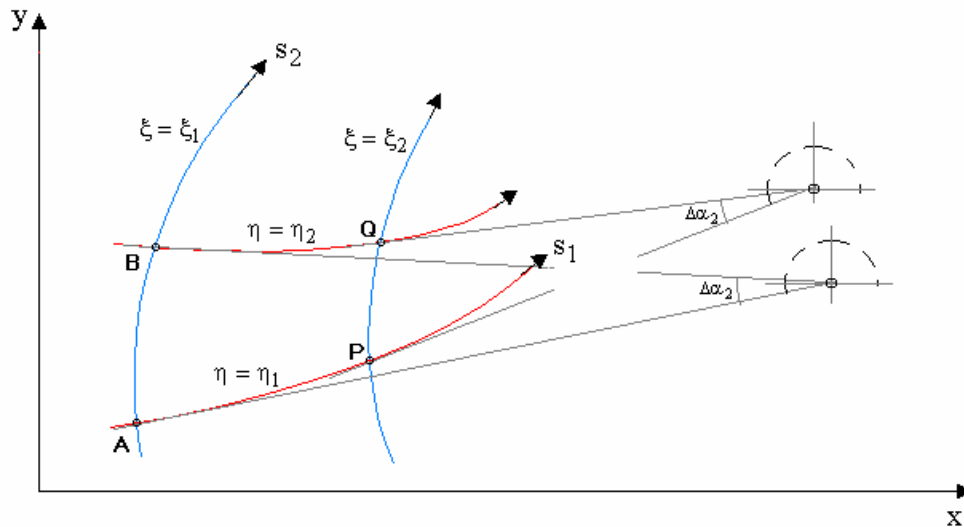
και

$$\xi = \sigma + 2c\psi = const. \quad (4.90)$$

1^ο Θεώρημα Hencky

Οι ποσότητες ξ και η παραμένουν αναλλοίωτες¹¹ κατά μήκος μίας εκ των αντίστοιχων (Γ.Δ.).

2^ο Θεώρημα Hencky



Εικ. 4-9: Γραφική απεικόνιση του 2^{ου} Θεωρήματος του Hencky

¹¹ Στη μαθηματική βιβλιογραφία οι ποσότητες ξ και η καλούνται αναλλοίωτες Riemann του αντίστοιχου υπερβολικού συστήματος μ.δ.ε.. (B. Riemann, Ueber die Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungsweite, Abh. D. Goettinger Ges. D. Wiss. 1860. Ges. Werke, S. 156.)

Η γωνία $\Delta\alpha_2$ που σχηματίζουν δύο (Γ.Δ.) της οικογένειας s_1 στο σημείο που τέμνονται από μία (Γ.Δ.) της οικογένειας s_2 είναι σταθερή¹².

Απόδειξη:

Κάνοντας χρήση του 1^{ου} θεωρήματος του Hencky, από την Εικ. 4-9 διαβάζουμε για την όδευση (APQ) τη σχέση,

$$\begin{aligned}\sigma_A - \sigma_Q &= (\sigma_A - \sigma_P) + (\sigma_P - \sigma_Q) \\ &= (\eta_1 + 2c\psi_A - \eta_1 - 2c\psi_P) + (\xi_2 - 2c\psi_P - \xi_2 + 2c\psi_Q) \\ &= 2c(\psi_A - \psi_P) + 2c(\psi_P + \psi_Q) = 2c(\psi_A - 2\psi_P + \psi_Q)\end{aligned}$$

Ομοίως για την όδευση (ABQ) έχουμε,

$$\begin{aligned}\sigma_A - \sigma_Q &= (\sigma_A - \sigma_B) + (\sigma_B - \sigma_Q) \\ &= (\xi_1 - 2c\psi_A - \xi_1 + 2c\psi_B) + (\eta_2 + 2c\psi_B - \eta_2 - 2c\psi_Q) \\ &= -2c(\psi_A - \psi_B) + 2c(\psi_B - \psi_Q) = -2c(\psi_A - 2\psi_B + \psi_Q)\end{aligned}$$

Άρα,

$$\begin{aligned}\psi_A - 2\psi_P + \psi_Q &= -(\psi_A - 2\psi_B + \psi_Q) \Rightarrow \\ (\psi_A - \psi_B) &= (\psi_P - \psi_Q) = \Delta\psi = \text{const.}\end{aligned}\tag{4.91}$$

Αλλά οι γωνίες κλίσεως της s_1 -(Γ.Δ.), που διέρχεται από τα σημεία Α και Β στα σημεία αυτά είναι αντιστοίχως

$$\begin{aligned}\alpha_2^A &= \psi_A - \pi/4 \\ \alpha_2^B &= \psi_B - \pi/4\end{aligned}$$

ενώ οι γωνίες κλίσεως της s_1 -(Γ.Δ.), που διέρχεται από τα σημεία Ρ και Q στα σημεία αυτά είναι αντιστοίχως

$$\begin{aligned}\alpha_2^P &= \psi_P - \pi/4 \\ \alpha_1^Q &= \psi_Q - \pi/4\end{aligned}$$

Άρα,

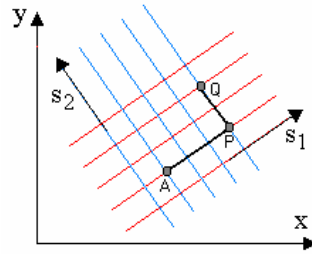
$$\Delta\alpha_2 = \alpha_2^A - \alpha_2^B = \alpha_1^P - \alpha_1^Q = \Delta\psi = \text{const.}$$

ο.ε.δ.

3^ο Θεώρημα Hencky

Αν σε ένα χωρίο οι (Γ.Δ.) είναι ευθείες γραμμές (χωρίο Rankine, Εικ. 4-10), τότε στο χωρίο αυτό η ένταση είναι σταθερή.

¹² Το θεώρημα ισχύει αν αντικαταστήσουμε το s_1 με το s_2 και αντιστρόφως.



Εικ. 4-10: Ζώνη Rankine σε ιδεατά πλαστικό, όλκιμο υλικό

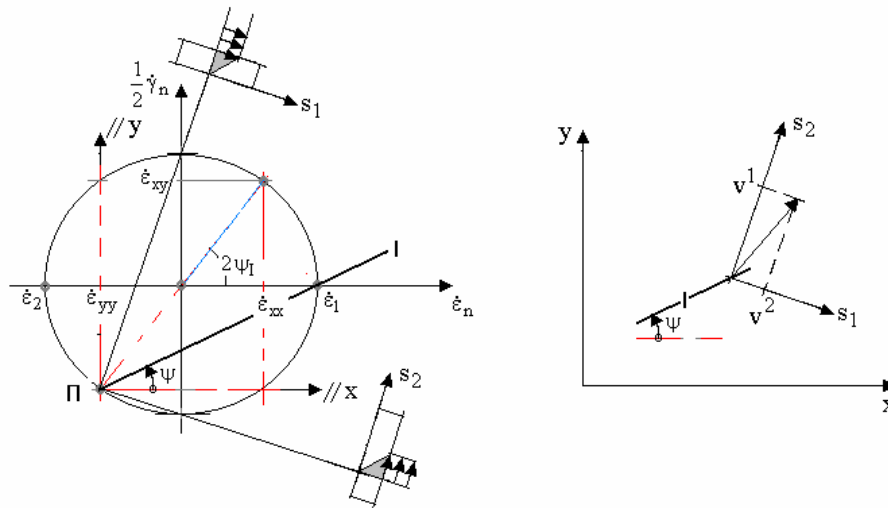
Απόδειξη:

Κάνοντας χρήση του 2^{ου} θεωρήματος του Hencky, εξ. (4.91), και για

$$\psi_A = \psi_P = \psi_Q \Rightarrow \sigma_A = \sigma_Q$$

ο.ε.δ.

4.6 Εξισώσεις Geiringer



Εικ. 4-11: Χαρακτηριστικές γραμμές στο κινηματικό πρόβλημα της Οριακής Αναλύσεως (γραμμές ολισθήσεως)

Παρατηρούμε κατ' αρχήν ότι, όπως αναφέραμε και πιο πάνω, οι πόλοι των κύκλων Mohr των τάσεων και του ρυθμού (πλαστικής) παραμορφώσεως είναι ομόθετοι. Αυτό σημαίνει ότι οι (Χ.Γ.) του στατικού προβλήματος συμπίπτουν με τις γραμμές μηδενικής ορθής τροπής¹³. Άρα κατά μήκος των γραμμών αυτών μπορούν να αναπτυχθούν όντως λεπτές ζώνες διατμήσεως, οι οποίες μακροσκοπικά συμπεριφέρονται ως γραμμές ολισθήσεως¹⁴ (Γ.Ο).

Αποδεικνύεται ότι το σύστημα των κινηματικών εξισώσεων

¹³ Αγγλ. zero extension lines

¹⁴ Αγγλ. slip lines

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$$

$$\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \tan 2\psi + \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) = 0 \quad (4.92)$$

είναι επίσης υπερβολικού τύπου, οι (X.Γ.) του οποίου συμπίπτουν με τις (X.Γ.) του στατικού προβλήματος (γιατί;). Αυτό πάλι σημαίνει ότι οι κοινές (X.Γ.) του στατικού και του κινηματικού προβλήματος ταυτίζονται αφ' ενός μεν με τις γραμμές διαρροής (Γ.Δ.= γραμμές μέγιστης διατμητικής τάσεως) αφ' ετέρου δε και με τις γραμμές ολισθήσεως (Γ.Ο.= γραμμές μηδενικής ορθής τροπής).

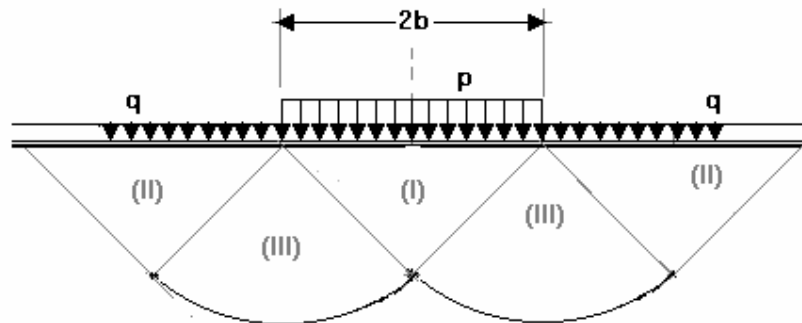
Έστω v^1 και v^2 οι ανταλλοιώτες συνιστώσες του διανύσματος της ταχύτητας στο (γενικά) καμπυλόγραμμο σύστημα (s_1, s_2) των (Γ.Ο.). Αποδεικνύεται ότι η κανονική μορφή των κινηματικών εξισώσεων στο σύστημα αυτό είναι η εξής (γιατί;),

$$\frac{dv^2}{ds_1} - v^1 \frac{d\psi}{ds_1} = 0$$

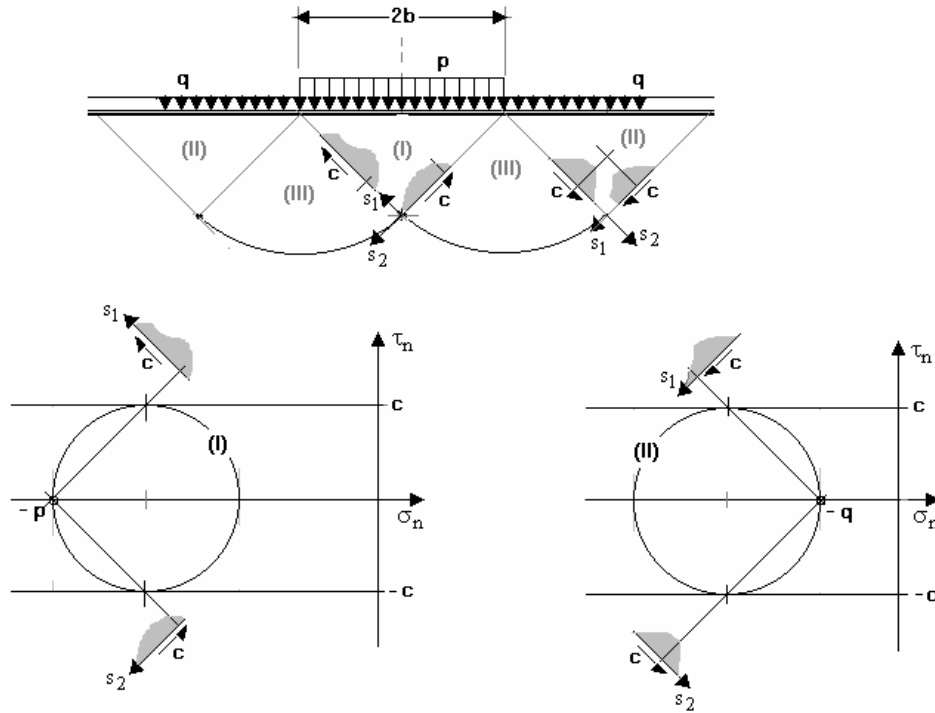
$$\frac{dv^1}{ds_2} + v^2 \frac{d\psi}{ds_2} = 0 \quad (4.93)$$

Οι εξισώσεις αυτές είναι γνωστές στη βιβλιογραφία ως εξισώσεις Geiringer,

4.7 Φορτίο Καταρρεύσεως Πεδιλοδοκού κατά Prandtl



Εικ. 4-12: Φόρτιση ημίχωρου με φορτίο $p > q$ εκτεινόμενο σε πλάτος $2b$



Εικ. 4-13: Ενεργητική και παθητική ζώνη Rankine, και ζώνη Prandtl

Θεωρούμε έναν ημίχωρο από αβαρές, απολύτως στερεό, ιδεατά πλαστικό, συνεκτικό υλικό, του οποίου η ελεύθερη επιφάνεια φορτίζεται από ομοιόμορφο καταναμημένο φορτίο p σε πλάτος $2b$. Έξω από αυτήν τη λωρίδα το καταναμημένο φορτίο είναι q ($0 \leq q < p$, Εικ. 4-12). Δεχόμαστε ότι κάτω από την επίδραση του φορτίου p το υλικό σε μία περιοχή κάτω από το φορτίο βρίσκεται σε οριακή ισορροπία. Για τον υπολογισμό της κρίσιμης τιμής για το φορτίο p δεχόμαστε ότι το χωρίο κάτω από την φόρτιση χωρίζεται συμμετρικά στις εξής τρεις ζώνες (Εικ. 4-13):

- 'ενεργητική' ζώνη Rankine, σε ισορροπία με το φορτίο p
- 'παθητική' ζώνη Rankine, σε ισορροπία με το φορτίο q
- ζώνη Prandtl, συμβατή με τις διπλανές ζώνες Rankine.

Κατασκευή ζωνών Rankine:

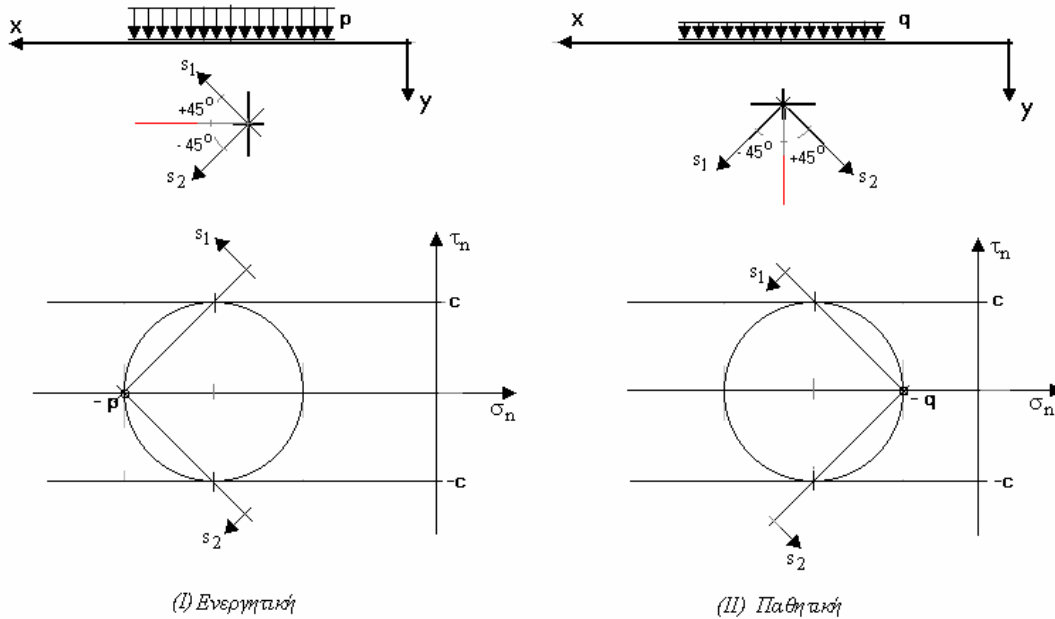
Οι ζώνες αυτές χαρακτηρίζονται από το γεγονός ότι οι Χ.Γ. είναι ευθείες, η εντατική κατάσταση σταθερή και ότι οι τάσεις είναι σε ισορροπία με τα αντίστοιχα συνοριακά φορτία (Εικ. 4-14):

Στην παθητική ζώνη (II) η μέγιστη κύρια τάση (που είναι ίση κατ' απόλυτη τιμή μικρότερη κυρία τάση) ισούται με το κατακόρυφο επιφανειακό φορτίο,

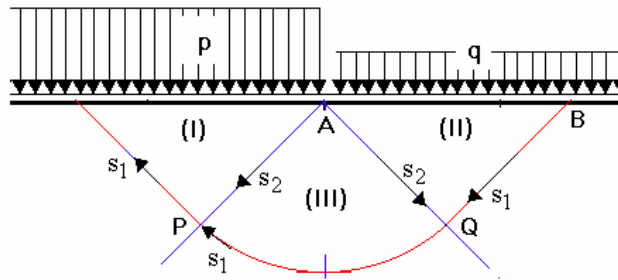
$$\psi = \pi/2, \sigma_2 = -q \Rightarrow \sigma_1 = -q - 2c \quad (4.94)$$

Στην ενεργητική ζώνη (I) αντίθετα η ελάχιστη κύρια τάση (που είναι ίση κατ' απόλυτη τιμή με την μεγαλύτερη κύρια τάση) ισούται με το επιφανειακό φορτίο,

$$\psi = 0, \sigma_1 = -p \Rightarrow \sigma_2 = -p + 2c \quad (4.95)$$



Εικ. 4-14: Οριακή εντατική κατάσταση στις ζώνες Rankine



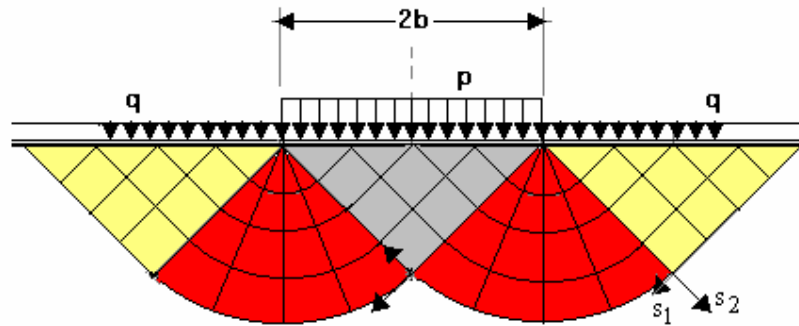
Εικ. 4-15: Ζώνη Prandtl

- Στη ζώνη Rankine (II) έχουμε: $\sigma_B = \sigma_Q = -q - c$, $\psi_B = \psi_Q = \frac{\pi}{2}$
- Στη ζώνη Rankine (I) έχουμε: $\sigma_A = \sigma_P = -p + c$, $\psi_A = \psi_P = 0$
- Στη ζώνη Prandtl (III) δεχόμαστε ότι οι (X.Γ.) είναι αντιστοίχως κύκλοι και δέσμη ευθειών με κέντρο το σημείο Prandtl A. Η εξίσωση Hencky κατά μήκος της (X.Γ.) (QP)

$$\frac{d\sigma}{ds_1} - 2c \frac{d\psi}{ds_1} = 0 \Rightarrow \sigma_P - \sigma_Q = 2c(\psi_P - \psi_Q) \Rightarrow$$

$$-p + c + q + c = 2c(0 - \frac{\pi}{2}) \Rightarrow$$

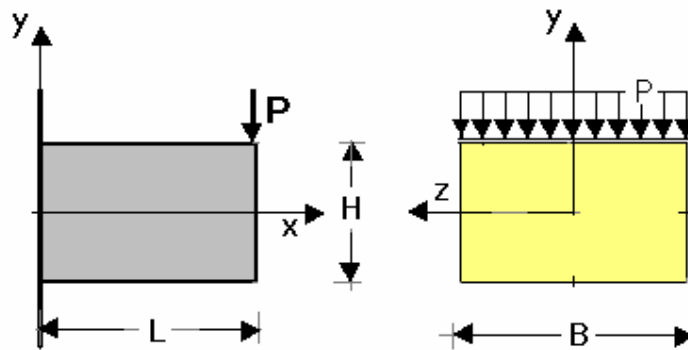
$$p - q = (2 + \pi)c \approx 5.14c \tag{4.96}$$



Εικ. 4-16: Λύση Prandtl σε ιδεατά πλαστικό συνεκτικό υλικό

Η παραπάνω λύση αποδίδεται στον Prandtl και χαρακτηρίζεται ως ατελής, επειδή το πεδίο των (Χ.Γ.) εκτείνεται σε περιορισμένη περιοχή κάτω από τη φόρτιση και όχι σε όλο τον ημίχωρο (Εικ. 4-16). Όπως απέδειξε ο Shield¹⁵ η λύση εξ. (4.96) είναι η πραγματική λύση, $p_c \approx q + 5.14c$. Η λύση αυτή κείται πράγματι ανάμεσα στα άνω και κάτω φράγματα, που υπολογίσαμε στο Κεφ. 3.5.; $5c < p_c - q < 5.5c$.

4.8 Κάμψη Κοντού Προβόλου κατά Green



Εικ. 4-17: Κάμψη κοντού προβόλου

Θεωρούμε έναν πρόβολο μήκους L , ορθογωνικής διατομής διαστάσεων $H \times B$. Δεχόμεθα ότι ο πρόβολος είναι άκαμπτα πακτωμένος και ότι φορτίζεται από φορτίο P ανά μονάδα μήκους κάθετα προς το επίπεδο του σχήματος (Εικ. 4-17). Στην περίπτωση όπου το πλάτος της διατομής είναι αρκετά μεγάλο σε σύγκριση με το ύψος της¹⁶ μπορούμε να δεχθούμε ότι η παραμόρφωση είναι με καλή προσέγγιση επίπεδη και το επίπεδο της παραμορφώσεως ταυτίζεται με το μέσο επίπεδο (x, y) . Στο Κεφ. 3.6.1 υπολογίσαμε άνω και κάτω φράγματα για την ροπή καταρρεύσεως στην περίπτωση καθαρής κάμψεως. Από τη λύση αυτή, και για $\sigma_y = 2c$ παίρνουμε την εξής έκφραση για το κρίσιμο φορτίο καταρρεύσεως σε καθαρή κάμψη

¹⁵ Αποδεικνύεται ότι η λύση Prandtl είναι συγχρόνως και κινηματικά αποδεκτή. Αρα η λύση αυτή αντιστοιχεί συγχρόνως σε κάτω και άνω όριο (R.T. Shield (1954). Plastic potential theory and Prandtl bearing capacity solution. J.Appl. Mech., 21, 193-194).

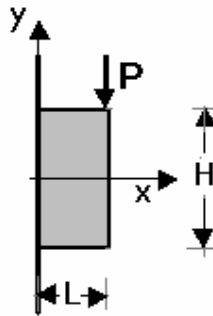
¹⁶ Τουλάχιστον $B > 3H$. Πρβλ. A.P. Green (1953). The plastic yielding of notched bars due to bending., Quart. Appl. Mech. and Appl. Math., 6(2), 223-239.

$$0.25(BH^2)\sigma_Y < M_c < 0.345 \cdot (BH^2)\sigma_Y \quad , \quad M_c = (P_b B)L \Rightarrow \quad (4.97)$$

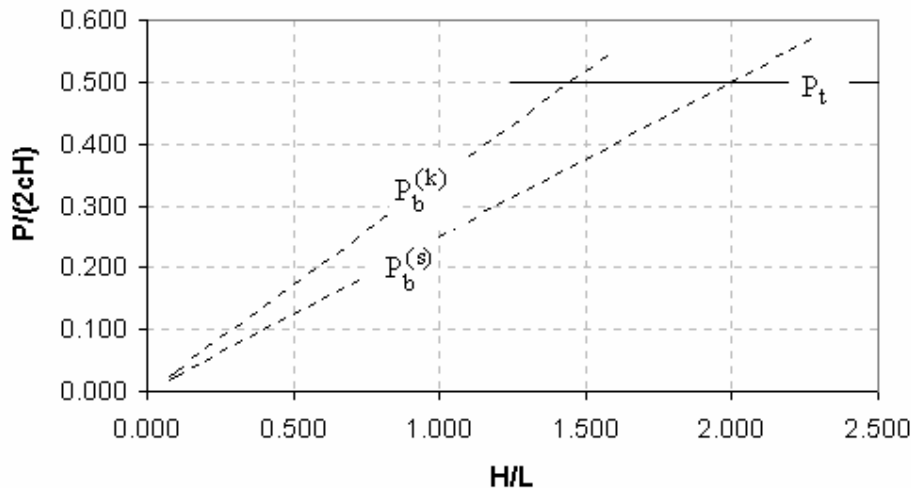
$$0.25\left(\frac{H}{L}\right) < \frac{P_b}{2cH} < 0.345\left(\frac{H}{L}\right) \quad (4.98)$$

Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε την περίπτωση **κάμψεως με διάτμηση**. Ας δεχθούμε προς στιγμή αναπόδεικτα ότι η παραπάνω εκτίμηση, εξ. (4.98), για το φορτίο καταρρεύσεως δικαιώνεται και στην περίπτωση όπου υπάρχει διάτμηση, αρκεί ο πρόβολος να μην είναι "υψίκορμος", δηλαδή αρκεί ο λόγος ύψους προς μήκος να είναι μικρός σχετικά αριθμός $(H/L) \ll 1$. Αυτή η υπόθεση, όπως θα δούμε στην συνέχεια, είναι σωστή και έρχεται να επιβεβαιώσει μια βασική αρχή της Τεχνικής Μηχανικής, ότι δηλαδή για βραχύκορμες δοκούς προεξάρχοντα ρόλο παίζει η κάμψη και δευτερεύοντα ρόλο η διάτμηση. Στην άλλη άκρη των πιθανών τιμών για το λόγο ύψους προς μήκος προβόλου βρίσκεται η περίπτωση όπου το μήκος του προβόλου είναι εξαιρετικά μικρό (Εικ. 4-18). Στην περίπτωση αυτή οι επίδραση της ροπής κάμψεως είναι αμελητέα, αφού $(L/H) \ll 1$ συνεπάγεται και ότι $M = (PB)L \ll 1$. Η κατάρρευση στην ακραία αυτή περίπτωση χαρακτηρίζεται από κατ' ευθείαν διάτμηση κατά μήκος της πακτώσεως, το δε φορτίο καταρρεύσεως σε κατ' ευθείαν διάτμηση εκτιμάται ως

$$P_t = cH \Rightarrow \frac{P_t}{2cH} = 0.5 \quad (4.99)$$



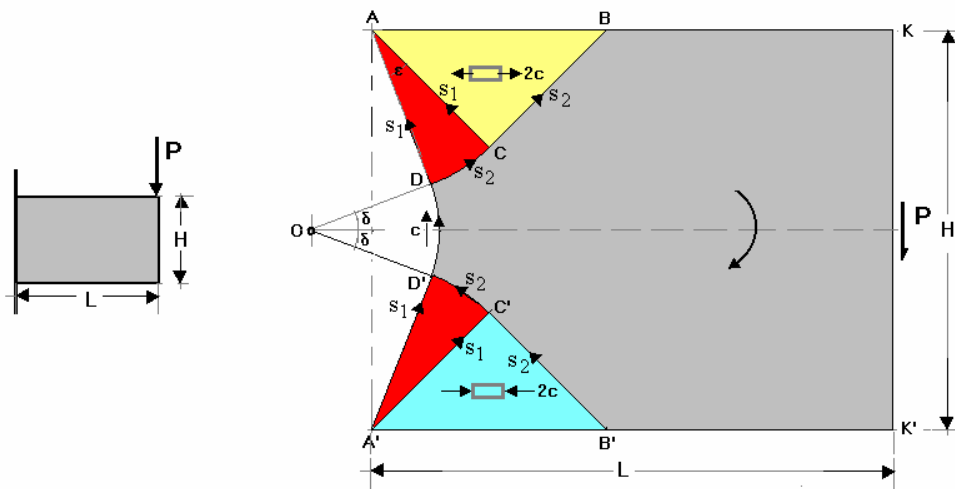
Εικ. 4-18: Κοντός πρόβολος φορτιζόμενος από συγκεντρωμένο φορτίο στο άκρο του



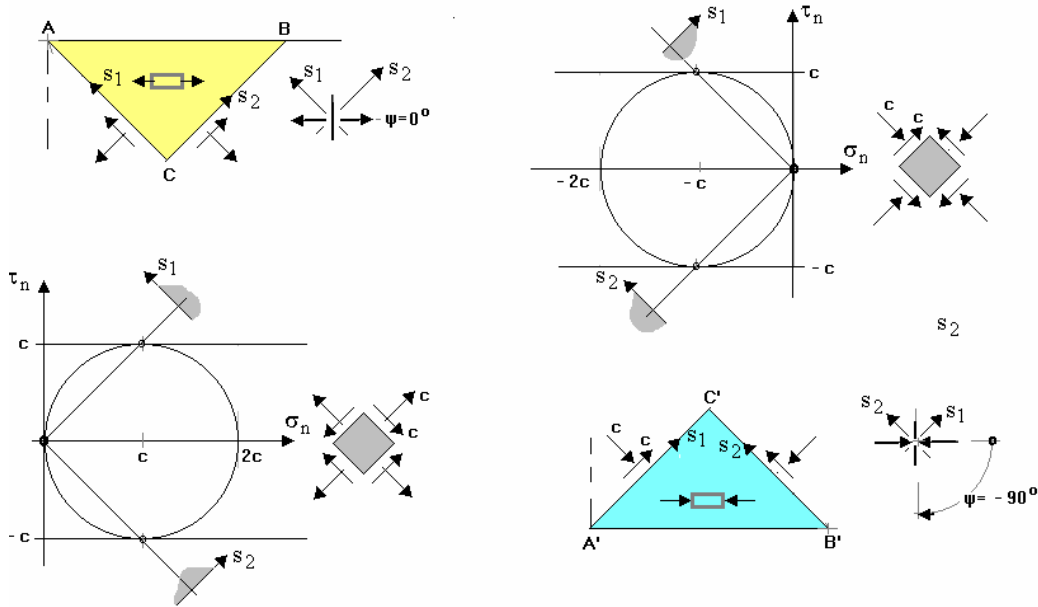
Εικ. 4-19: Προσεγγιστικές λύσεις για το φορτίο καταρρέυσεως προβόλου φορτιζόμενου από συγκεντρωμένο φορτίο στο άκρο του

Οι παραπάνω εκτιμήσεις του φορτίου καταρρέυσεως για πολύ μικρές και πολύ μεγάλες τιμές αντιστοίχως του λόγου H/L (Εικ. 4-19) μας επιτρέπουν να αναζητήσουμε την πραγματική λύση για ενδιάμεσες τιμές του λόγου H/L . Για τον σκοπό αυτό αναλύουμε τον μηχανισμό καταρρέυσεως του σχήματος που προτάθηκε αρχικά από τον Green (1953, Εικ. 4-20). Ο μηχανισμός αυτός είναι συμμετρικός ως προς τον άξονα της δοκού και αποτελείται από δύο τριγωνικές ζώνες Rankine, (ABC) και $(A'B'C')$, που αντιστοιχούν σε μονοαξονικό εφελκυσμό και μονοαξονική θλίψη αντιστοίχως (Εικ. 4-21). Οι ζώνες Rankine συνορεύουν με ζώνες Prandtl (ACD) και $(A'C'D')$ που ορίζονται από την επίκεντρη γωνία, $\angle(CAD) = \varepsilon$. Οι δύο αυτές περιοχές πλαστικής διαρροής συνδέονται μεταξύ τους με μια κυκλική $s_1 - (Γ.Ο.)$ που έχει κέντρο το σημείο O και επίκεντρη γωνία $\angle(DOD') = 2\delta$. Οι ακτίνες AD και OD (καθώς και οι συμμετρικές τους) είναι κάθετες μεταξύ τους. Από τη γεωμετρική κατασκευή του σχήματος προκύπτει ότι,

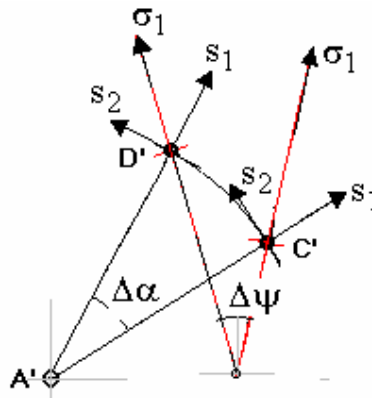
$$\delta = \frac{\pi}{4} - \varepsilon \tag{4.100}$$



Εικ. 4-20: Μηχανισμός καταρρέυσεως προβόλου κατά Green (1953)



Εικ. 4-21: Εφελκόμενη και θλιβόμενη ζώνη Rankine



Εικ. 4-22: Μεταβολή της γωνιακής συναρτήσεως ψ σε μία ζώνη Prandtl

Παρατηρούμε τώρα ότι σε μία ζώνη Prandtl η γωνιακή συνάρτηση ψ είναι σταθερή κατά μήκος των ακτινών και αλλάζει κατά μήκος των κυκλικών τόξων όπως και η επίκεντρη γωνία (Εικ. 4-22).

Στατική επίλυση μέσω του δικτύου (X.I.)

- Σημείο (C): $\sigma_C = c$, $\psi_C = 0$
- Τόξο (DC): $\psi_C - \psi_D = \varepsilon \Rightarrow \psi_D = -\varepsilon$
- Κατά μήκος της $s_2 - (DC)$, εξ. (4.86):

$$\sigma_C + 2c\psi_C = \sigma_D + 2c\psi_D \Rightarrow \sigma_D = c(1 + 2\varepsilon) \tag{4.101}$$
- Σημείο (C'): $\sigma_{C'} = -c$, $\psi_{C'} = -\pi/2$
- Τόξο (D'C'): $\psi_{D'} - \psi_{C'} = \varepsilon \Rightarrow \psi_{D'} = -\pi/2 + \varepsilon$

- Κατά μήκος της $s_2 - (C'D')$:

$$\sigma_{C'} + 2c\psi_{C'} = \sigma_{D'} + 2c\psi_{D'} \Rightarrow \sigma_{D'} = -c(1 + 2\varepsilon) \quad (4.102)$$

- Κατά μήκος της $s_1 - (D'D)$:

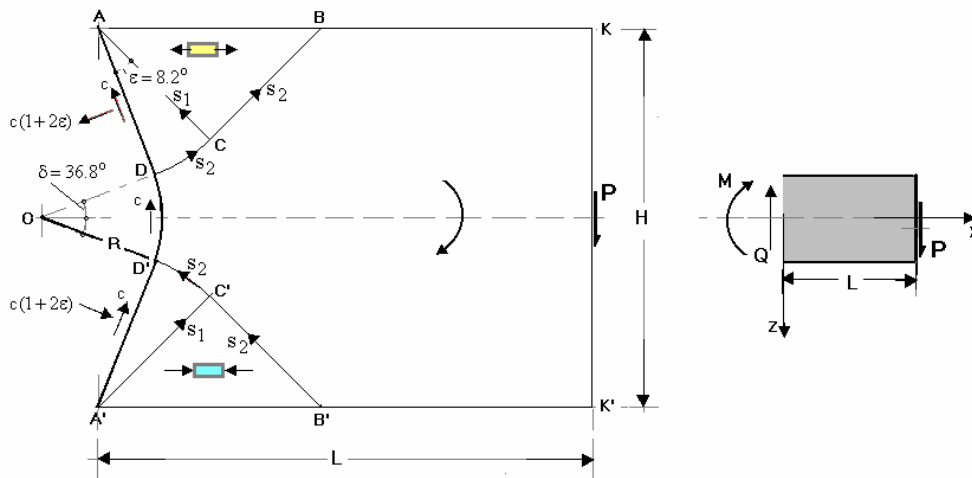
$$\sigma_{D'} - 2c\psi_{D'} = \sigma_D - 2c\psi_D \Rightarrow \varepsilon = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} = 0.1427 \quad (4.103)$$

Άρα από τις εξ. (4.100) ως (4.103) παίρνουμε (Εικ. 4-23)

$$\varepsilon = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}, \quad \delta = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4} \quad (\varepsilon = 8.2^\circ, \delta = 36.8^\circ) \quad (4.104)$$

και

$$\sigma_D = -\sigma_{D'} = \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right)c \quad (\sigma_D = -\sigma_{D'} = 1.2854c) \quad (4.105)$$



Εικ. 4-23: Πεδίο Χ.Γ. στο πρόβλημα του καμπτόμενου προβόλου

Έστω

$$(OD) = R, \quad (AD) = d \quad (4.106)$$

από το σχήμα (Εικ. 4-23) προκύπτει επίσης ότι

$$R \sin \delta + d \cos \delta = \frac{H}{2} \quad (4.107)$$

Για τον προσδιορισμό μίας επιπλέον σχέσεως μεταξύ της ακτίνας R και του μήκους d θεωρούμε την ισορροπία των κατακόρυφων δυνάμεων που ασκούνται στο στερεό $(ADD'A'K'K)$ ¹⁷:

$$Q = P \quad (4.108)$$

¹⁷ Παρατηρούμε ότι όπως και σε αντίστοιχα προβλήματα κάμψεως της Τεχνικής Μηχανικής η ισορροπία των αξονικών δυνάμεων επαληθεύεται εκ ταυτότητος.

ή

$$\begin{aligned} & (-\sigma_D \sin \delta + c \cos \delta) d + (-\sigma_{D'} \sin(-\delta) + c \cos(-\delta)) d \\ & - \int_{-\delta}^{\delta} \sigma \sin \phi R d\phi + \int_{-\delta}^{\delta} c \cos \phi R d\phi = P \end{aligned} \quad (4.109)$$

Για τον υπολογισμό του πρώτου ολοκληρώματος στην παραπάνω εξ. (4.109) ισορροπίας τεμνουσών δυνάμεων παρατηρούμε ότι κατά μήκος της s_1 – (Γ.Δ.): $D'D$ έχουμε ότι,

$$\sigma - 2c\psi = \eta = \sigma_D - 2c\psi D = c(1 + 2\varepsilon) - 2c(-\varepsilon) = c(1 + 4\varepsilon) = c \frac{\pi}{2} \quad (4.110)$$

Η γωνιακή συνάρτηση ψ κατά μήκος αυτής της (Γ.Δ.) μεταβάλλεται γραμμικά με την επίκεντρη γωνία φ ,

$$\psi = c_1 + c_2\varphi \quad (4.111)$$

έτσι ώστε για

$$\varphi = \delta : \psi = \psi_D = -\varepsilon \quad (4.112)$$

και για

$$\varphi = -\delta : \psi = \psi_{D'} = -\frac{\pi}{2} + \varepsilon \quad (4.113)$$

Άρα

$$\psi = -\frac{\pi}{4} + \varphi, \quad -\delta \leq \varphi \leq \delta \quad (4.114)$$

Οπότε,

$$\sigma = c \frac{\pi}{2} + 2c \left(-\frac{\pi}{4} + \varphi \right) = 2c\varphi \quad (4.115)$$

Με τις εξ. (4.101), (4.102) και (4.115) η εξίσωση ισορροπίας (4.109) γράφεται ως εξής,

$$c \left(2 \left(-(1 + 2\varepsilon) \sin \delta + \cos \delta \right) d + \left(-2 \int_{-\delta}^{\delta} \varphi \sin \varphi d\varphi + \int_{-\delta}^{\delta} \cos \varphi d\varphi \right) R \right) = P \quad (4.116)$$

ή

$$\left(-(1 + 2\varepsilon) \sin \delta + \cos \delta \right) d + (-\sin \delta + 2\delta \cos \delta) R = \frac{P}{2c} \quad (4.117)$$

Ισορροπία ροπών στο στερεό ($ADD'A'K'K$) δίδει,

$$M = -PL \quad (4.118)$$

ή

$$2cRd + 2c(1 + 2\varepsilon)d \frac{d}{2} + cR2\delta R = PL' \quad (4.119)$$

ή

$$Rd + (1 + 2\varepsilon)\frac{d^2}{2} + R^2\delta = \frac{PL'}{2c} \quad (4.120)$$

όπου

$$L' = L + \left(R - d \sin \left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{4} + \varepsilon \right) \right) \right) = L + R - d \cos \left(\frac{\pi}{4} + \varepsilon \right) \quad (4.121)$$

είναι ο μοχλοβραχίονας της δύναμews P ως προς τον πόλο O.

Για την αριθμητική επίλυση του προβλήματος κανονικοποιούμε όλα τα μήκη με το μήκος L του προβόλου και εισάγουμε αντιστοίχως τα κάτωθι αδιάστατα μεγέθη,

$$\begin{aligned} R^* &= \frac{R}{L}, \quad d^* = \frac{d}{L}, \quad H^* = \frac{H}{L} \Rightarrow \\ L^* &= \frac{L'}{L} = 1 + R^* - d^* \cos \left(\frac{\pi}{4} + \varepsilon \right) \end{aligned} \quad (4.122)$$

Το φορτίο P αδιαστατοποιείται σε αντιστοιχία προς την προσεγγιστική λύση εξ. (4.98) για την περίπτωση της καθαρής κάμψεως,

$$P^* = \frac{P}{2cH} \quad (4.123)$$

Συνοψίζοντας τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι το πρόβλημα πλαστικής κάμψεως με διάτμηση ενός προβόλου διέπεται από τις εξής εξισώσεις:

$$\sin \delta R^* + \cos \delta d^* = \frac{1}{2} H^* \quad (4.124)$$

$$(-\sin \delta + 2\delta \cos \delta) R^* + (-(1 + 2\varepsilon) \sin \delta + \cos \delta) d^* = P^* H^* \quad (4.125)$$

$$\delta (R^*)^2 + d^* R^* + (1 + 2\varepsilon) \frac{(d^*)^2}{2} = P^* H^* L^* \quad (4.126)$$

όπου

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}, \quad \delta = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4} \\ L^* &= 1 + R^* - d^* \cos \left(\frac{\pi}{4} + \varepsilon \right) \end{aligned} \quad (4.127)$$

$$R^* = \frac{R}{L}, \quad d^* = \frac{d}{L}, \quad H^* = \frac{H}{L}, \quad L^* = \frac{L'}{L}$$

$$P^* = \frac{P}{2cH}$$

Η αριθμητική επίλυση των παραπάνω εξισώσεων γίνεται βάσει του εξής αλγορίθμου:

1. Δίνουμε μία τιμή στο αδιάστατο ύψος: $H^* = h$
2. Η εξ. (4.124) δίδει:

$$d^*(R^*) = \frac{1}{\cos \delta} \left(\frac{1}{2} H^* - \sin \delta R^* \right) \quad (4.128)$$

3. Η εξ. (4.125) δίδει:

$$P_Q^*(R^*) = \frac{1}{H^*} \left((-\sin \delta + 2\delta \cos \delta) R^* + (-(1+2\varepsilon)\sin \delta + \cos \delta) d^* \right) \quad (4.129)$$

4. Η εξ.(4.126) δίδει:

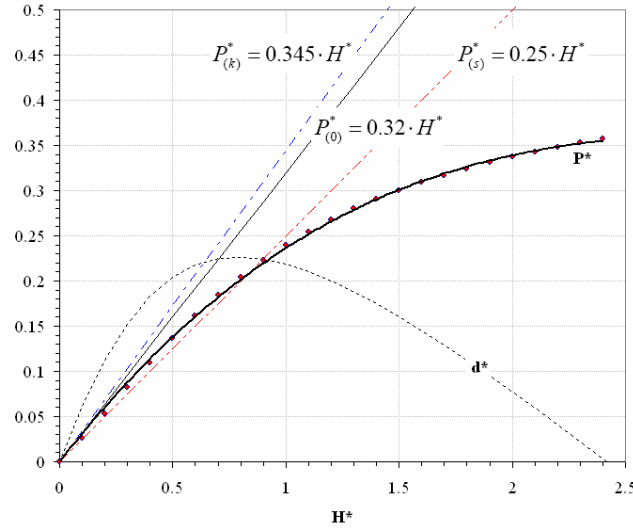
$$P_M^*(R^*) = \frac{1}{H^* L^*} \left(\delta R^{*2} + R^* d^* + \frac{1}{2} (1+2\varepsilon) d^{*2} \right) \quad (4.130)$$

5. Η λύση αντιστοιχεί σε εκείνη την τιμή της παραμέτρου $R^* = R^*(H^*)$ για την οποία οι παραπάνω εξισώσεις για το φορτίο συναληθεύουν:

$$P_Q^*(R^*) - P_M^*(R^*) = 0 \quad (4.131)$$

Η παρούσα λύση κατά Green ισχύει μέχρι την τιμή $H^* = 2.4$, διότι για την τιμή $H^* = 2.5$ έχουμε ότι $R^* = 2.107$ και από την εξ. (4.128) το αντίστοιχο $d^* = -0.018 < 0$! Επίσης παρατηρούμε ότι για σχετικά για μεγάλες τιμές του λόγου H^* (=ύψους προς μήκος προβόλου) η ακτίνα R του τόξου κύκλου DD' παίρνει μεγάλες τιμές. Η παρούσα λύση για $0 < H^* < 2.5$ δίδεται από τον εξής προσεγγιστικό τύπο (Εικ. 4-24),

$$P^* \approx 0.32H^* - 0.094H^{*2} + 0.0091H^{*3} \quad (4.132)$$



Εικ. 4-24: Αριθμητική επίλυση της εξ.(4.131) και προσδιορισμός του αδιάστατου φορτίου πλαστικής καταρρέυσεως P^* και του αντίστοιχου αδιάστατου βοηθητικού μήκους d^*

Για βραχύκορμους προβόλους ($H^* \ll 1$) η παραπάνω σχέση, εξ. (4.132), δίνει ένα καλύτερο κάτω φράγμα για το φορτίο καταρρέυσεως από ότι η ανισότητα(4.98) που προέκυψε από την προσεγγιστική ανάλυση της περιπτώσεως της καθαρής κάμψεως,

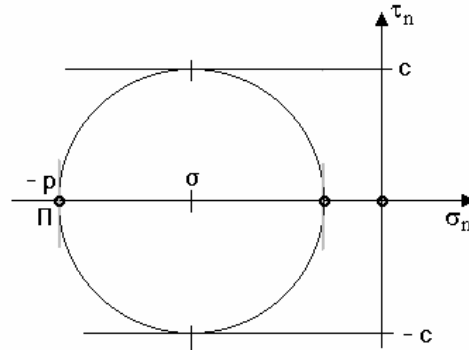
$$P_{(s)}^* = 0.25 \cdot H^* < P_{(0)}^* = 0.32 \cdot H^* < P_{(k)}^* = 0.345 \cdot H^* \quad (4.133)$$

Θεωρούμε το λεγόμενο πρόβλημα συνοριακών τιμών τύπου Cauchy (Εικ. 4-25). Ένα τέτοιο πρόβλημα σ.τ. είναι για παράδειγμα το εξής: Κατά μήκος του συνόρου: $(\Gamma): y = 0$ ενός απολύτως στερεού, ιδεατά πλαστικού σώματος \mathbf{B} σε επίπεδη παραμόρφωση προδιαγράφεται ο ελκυστής των τάσεων,

$$\sigma_n = \sigma_{yy} = -p(x), \quad \tau_n = \sigma_{yx} = 0 \quad (4.136)$$

Επειδή το σώμα βρίσκεται σε κατάσταση διαρροής, από τον αντίστοιχο κύκλο του Mohr (Εικ. 4-26) παίρνουμε την εξής πληροφορία κατά μήκος του συνόρου (Γ) ,

$$y = 0: \sigma = -p(x) + c, \quad \psi = 0 \quad (4.137)$$



Εικ. 4-26: Οριακός κύκλος του Mohr των τάσεων

Για να επεκτείνουμε την πληροφορία αυτή στο εσωτερικό του σώματος \mathbf{B} , πρέπει πρώτα να εξασφαλίσουμε ότι το σύνορο (Γ) δεν συμπίπτει με $(X.\Gamma.)$ του προβλήματος, γεγονός που στο συγκεκριμένο παράδειγμα ισχύει¹⁸, αφού συμφώνως προς την εξ. (4.85),

$$y = 0: \alpha_{1,2} = \pm \frac{\pi}{4} \quad (4.138)$$

Για την αριθμητική επίλυση του θεωρούμενου προβλήματος σ.τ. πραγματοποιούμε κατ' αρχήν μια διακριτοποίηση του συνόρου (Γ) σε σημεία,

$$\begin{aligned} A_{11}: x = 0, \quad y = 0 \\ A_{12}: x = \Delta x, \quad y = 0 \\ A_{13}: x = 2\Delta x, \quad y = 0 \dots \end{aligned} \quad (4.139)$$

Λόγω των εξ. (4.137) στα σημεία αυτά είναι γνωστές οι τασικές συναρτήσεις $\sigma(x, y)$ και $\psi(x, y)$,

$$\begin{aligned} A_{11}: \sigma = c - p(0), \quad \psi = 0 \\ A_{12}: \sigma = c - p(\Delta x), \quad \psi = 0 \\ A_{13}: \sigma = c - p(2\Delta x), \quad \psi = 0 \dots \end{aligned} \quad (4.140)$$

¹⁸ Όπως είδαμε στο Κεφ.4.2, αν η (Γ) συμπίπτει με $(X.\Gamma.)$ τότε δεν μπορούμε να επεκτείνουμε την πληροφορία εγκάρσια προς την γραμμή αυτή. Στην περίπτωση που ένα σύνορο συμπίπτει με $(X.\Gamma.)$, το αντίστοιχο πρόβλημα σ.τ. τύπου Cauchy είναι από μαθηματικής σκοπιάς κακώς ορισμένο.

Επίσης βάσει της εξ. (4.138) είναι γνωστές και οι κλίσεις των (X.Γ.) που διέρχονται από τα σημεία αυτά

$$\begin{aligned} A_{11} : \alpha_1 = \pi/4, \alpha_2 = -\pi/4 \\ A_{12} : \alpha_1 = \pi/4, \alpha_2 = -\pi/4 \\ A_{13} : \alpha_1 = \pi/4, \alpha_2 = -\pi/4 \dots \end{aligned} \quad (4.141)$$

1^ο Βήμα: Υπολογίζουμε τις συντεταγμένες των σημείων, A_{21}, A_{22}, \dots που προκύπτουν από την αλληλοτομία των συζυγών χαρακτηριστικών γραμμών, όταν αυτές, για αρκετά λεπτή διακριτοποίηση, προσεγγίζονται τοπικά από ευθύγραμμα τμήματα. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα έχουμε,

$$\begin{aligned} A_{21} : x = \frac{1}{2} \Delta x, y = \frac{1}{2} \Delta x \\ A_{12} : x = \frac{3}{2} \Delta x, y = \frac{1}{2} \Delta x \\ A_{13} : x = \frac{5}{2} \Delta x, y = \frac{1}{2} \Delta x \dots \end{aligned} \quad (4.142)$$

2^ο Βήμα: Κατά μήκος των ευθύγραμμων τμημάτων αυτών των (X.Γ.) επιλύουμε τις αντίστοιχες εξισώσεις Hencky, εξ. (4.86). Π.χ. Σημείο A_{21} :

- (X.Γ.)- $s_2 = (A_{11}A_{21}) : \sigma(A_{21}) - \sigma(A_{11}) - 2c (\psi(A_{21}) - \psi(A_{11})) = 0$
- (X.Γ.)- $s_1 = (A_{21}A_{12}) : \sigma(A_{12}) - \sigma(A_{21}) + 2c (\psi(A_{12}) - \psi(A_{21})) = 0$

ή

$$\begin{aligned} \sigma(A_{21}) - 2c\psi(A_{21}) &= \sigma(A_{11}) - 2c\psi(A_{11}) \\ -\sigma(A_{21}) - 2c\psi(A_{21}) &= -\sigma(A_{12}) - 2c\psi(A_{12}) \end{aligned} \quad (4.143)$$

Από την επίλυση του συστήματος αυτού προσδιορίζουμε τις τασικές συναρτήσεις στο σημείο A_{21} . Ομοίως και για τα σημεία A_{22}, \dots .

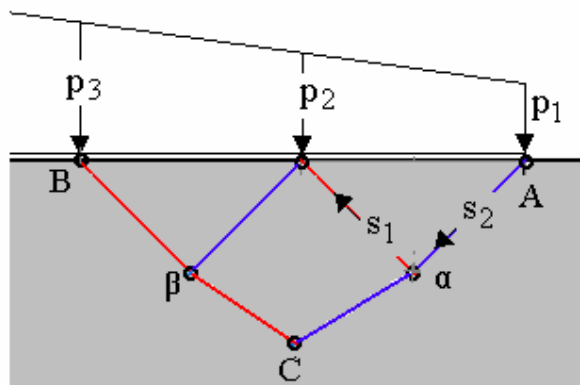
3^ο Βήμα: Από την τιμή της ψ και τις εξ. (4.85) υπολογίζουμε την κλίση των (X.Γ.) στα νέα σημεία A_{21}, A_{22}, \dots

- (X.Γ.)- $s_2 = (A_{21}A_{31}) : \alpha_1(A_{21}) = \psi(A_{21}) + \pi/4$
- (X.Γ.)- $s_1 = (A_{31}A_{22}) : \alpha_2(A_{22}) = \psi(A_{22}) - \pi/4$

κ.ο.κ.

Επιστροφή στο 1^ο Βήμα: Υπολογίζουμε τις συντεταγμένες των σημείων A_{31}, A_{32}, \dots
κ.ο.κ..

Το παραπάνω σχήμα αριθμητικής ολοκλήρωσης των εξισώσεων Hencky καλείται σχήμα Massau. Είναι φανερό ότι η πληροφορία που περιέχεται σε ένα αρχικό τμήμα (AB) του συνόρου επηρεάζει μόνο την περιοχή (ABC) που περιβάλλεται από τις αντίστοιχες (X.Γ.) (AαC) και (BβC), Εικ. 4-27.



Εικ. 4-27: Πεδίο επιρροής συνοριακών τιμών προσδιοριζόμενο από τις Χ.Γ.