

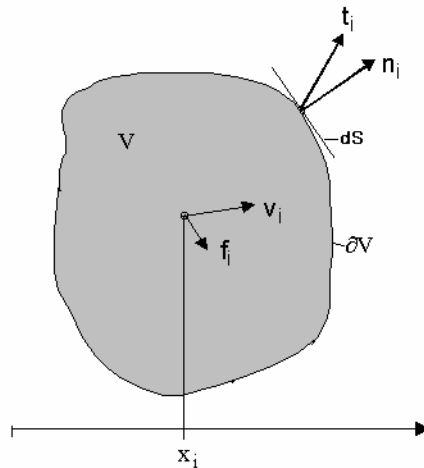
3 ΤΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΤΗΣ ΟΡΙΑΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΕΩΣ

| | | |
|-------|--|-----|
| 3 | ΤΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΤΗΣ ΟΡΙΑΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΕΩΣ | 71 |
| 3.1 | Αρχή Διατηρήσεως της Ενέργειας | 73 |
| 3.1.1 | Γενική διατύπωση | 73 |
| 3.1.2 | Ελαστικότητα | 76 |
| 3.1.3 | Πλαστικότητα | 78 |
| 3.2 | Η Αρχή των Δυνατών Έργων | 79 |
| 3.3 | Ασυνεχή Πεδία | 84 |
| 3.3.1 | Ασυνέχειες στην ένταση | 84 |
| 3.3.2 | Ασυνέχειες στην ταχύτητα | 85 |
| 3.4 | Τα Θεωρήματα της Οριακής Αναλύσεως | 88 |
| 3.4.1 | Το θεώρημα "άνω ορίου" | 89 |
| 3.4.2 | Το θεώρημα "κάτω ορίου" | 95 |
| 3.5 | Επίπεδη Παραμόρφωση | 97 |
| 3.5.1 | Ορισμοί και το κριτήριο διαρροής | 97 |
| 3.5.2 | Άνω φράγμα φορτίου αστοχίας πεδιλοδοκού | 100 |
| 3.5.3 | Κάτω φράγμα φορτίου αστοχίας πεδιλοδοκού | 107 |
| 3.6 | Προβλήματα | 109 |
| 3.6.1 | Ροπή καταρρεύσεως δοκού σε καθαρή κάμψη | 109 |
| 3.6.2 | Οριακή ώθηση συνεκτικού εδαφικού υλικού επί πασσάλου | 113 |

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζουμε τα δύο βασικά θεωρήματα της οριακής ανάλυσεως που ισχύουν για ιδεατά-πλαστικά, απολύτως-στερεά υλικά και που υπακούουν στο κριτήριο διαρροής κατά v. Mises, και στον αντίστοιχο συνηρημένο νόμο πλαστικής ροής. Η εφαρμογή των θεωρημάτων αυτών για την εκτίμηση του φορτίου καταρρεύσεως απλών κατασκευών γίνεται σε μία σειρά παραδειγμάτων δανεισμένων από την Γεωτεχνική και την Δομοστατική.

3.1 Αρχή Διατηρήσεως της Ενέργειας¹

3.1.1 Γενική διατύπωση



Εικ. 3-1: Δυνάμεις πεδίου, δυνάμεις επαφής και ταχύτητα υλικού σημείου

Σε ένα Συνεχές Σώμα B δεχόμεθα ότι οι δυνάμεις που ασκούνται είναι δύο ειδών (Εικ. 3-1): α) καθολικές δυνάμεις, f_i , όπως π.χ. οι δυνάμεις λόγω του πεδίου βαρύτητας, και β) επιφανειακές δυνάμεις, $t_i dS$, δηλαδή δυνάμεις εξ αιτίας της επαφής του σώματος αυτού με το περιβάλλον του.

Συνεπώς η ισχύς των εξωτερικών δυνάμεων που ασκούνται σε ένα υλικό σώμα, που τη δεδομένη χρονική στιγμή κατέχει τον όγκο V και περιβάλλεται από την επιφάνεια ∂V αποτελείται από την ολική ισχύ των καθολικών και επιφανειακών δυνάμεων αντιστοίχως,

$$W^{(ext)} = \int_V (f_x v_x + f_y v_y + f_z v_z) dV + \int_{\partial V} (t_x v_x + t_y v_y + t_z v_z) dS \quad (3.1)$$

Στην παραπάνω έκφραση για την ισχύ των εξωτερικών δυνάμεων με $v_x(x, y, z, t)$ κ.λπ. συμβολίζουμε το πεδίο ταχυτήτων των υλικών σημείων του σώματος.

Η κινητική ενέργεια $K(t)$ του Συνεχούς μέσου δίδεται ως το ολοκλήρωμα της κινητικής ενέργειας όλων των υλικών των σημείων: Εστω ρ η πυκνότητα του Συνεχούς, τότε η κινητική ενέργεια του σώματος υπολογίζεται από το ολοκλήρωμα,

$$K(t) = \int_B \frac{1}{2} (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) dm = \int_V \frac{1}{2} (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) \rho dV \quad (3.2)$$

Με τη βοήθεια των παραπάνω ορισμών μπορούμε να προβούμε στην εξής διατύπωση: Η ολική ενέργεια ενός σώματος μπορεί να αναλυθεί σε δύο μέρη:

$$E(t) = K(t) + U(t) \quad (3.3)$$

όπου το ένα μέρος της ολικής ενέργειας του σώματος εξαρτάται από την κινητική του κατάσταση και λέγεται κινητική ενέργεια το δε υπόλοιπο μέρος της ολικής ενέργειας

¹ Πρβλ. I. Βαρδουλάκη. *Εισαγωγή στη Μηχανική του Συνεχούς Μέσου*, Εκδ. Συμμετρία, 2008.

αυτού δεν εξαρτάται από την κινητική του κατάσταση και λέγεται εσωτερική ενέργεια. Θα παρατηρήσουμε ότι η εσωτερική ενέργεια ενός σώματος ορίζεται γενικά μέσω της ειδικής εσωτερικής ενέργειάς του,

$$U(t) = \int_B edm = \int_V \rho edV \quad (3.4)$$

Η ειδική εσωτερική ενέργεια εξαρτάται με τη σειρά της από την κατάσταση στην οποία βρίσκεται το σώμα. Π.χ. από τη θερμοκρασία του, την εντατική του κατάσταση ή και από άλλες μεταβλητές, που καθορίζουν την κατάστασή του,

$$e = e(\theta, \sigma_{ij}, \dots) \quad (3.5)$$

Έχοντας τώρα ορίσει την ενέργεια ενός σώματος και ως εφαρμογή του 1^{ου} θερμοδυναμικού αξιώματος απαιτούμε όπως η μεταβολή της ολικής ενέργειας

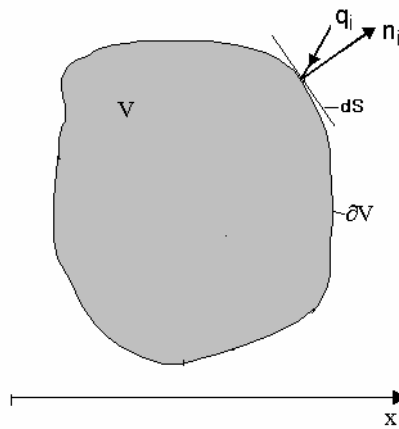
$$\dot{E} = \frac{dE}{dt} \quad (3.6)$$

του σώματος αυτού εξισορροπείται: α) από το έργο των εξωτερικών δυνάμεων που ασκούνται πάνω σ' αυτό ανά μονάδα χρόνου και β) από την ενέργεια που παρέχεται ανά μονάδα χρόνου στο σώμα αυτό από τον περιβάλλοντα χώρο,

$$\dot{E} = W^{(ext)} + Q \quad (3.7)$$

Στην παραπάνω έκφραση της Αρχής Διατηρήσεως της Ενέργειας (Α.Δ.Ε.) με Q συμβολίζουμε την ολική μη-μηχανική ενέργεια που παρέχεται στο εν λόγω σώμα απ' έξω. Η ενέργεια που παρέχεται στο σώμα απ' έξω μπορεί να είναι πολλών ειδών. Στην ειδική περίπτωση που η παρεχόμενη ενέργεια είναι καθαρά λόγω ροής θερμότητας, τότε η ολική εισροή ενέργειας στον θεωρούμενο όγκο V διαμέσου του συνόρου ∂V θα εκφρασθεί συναρτήσει του διανύσματος ροής θερμότητας ανά μονάδα χρόνου ανά μονάδα επιφάνειας:

$$Q = - \int_{\partial V} (q_x n_x + q_y n_y + q_z n_z) dS \quad (3.8)$$



Εικ. 3-2: Ορισμός του διανύσματος ροής θερμότητας

Το πρόσημο $(-)$ στην εξ. (3.8) σημειώνει ότι το διάνυσμα ροής της θερμότητας θα είναι θετικό όταν θα έχουμε εισροή θερμότητας, δηλαδή όταν το q_i έχει κατεύθυνση αντίθετη

από το εξωτερικό μοναδιαίο διάνυσμα n_i , που είναι κάθετο προς το στοιχείο dS του εξωτερικού συνόρου του θεωρούμενου όγκου (Εικ. 3-2).

Για την περαιτέρω επεξεργασία της Α.Δ.Ε., εξ. (3.7) πραγματοποιούμε κατ' αρχήν την κατά μέλη χρονική παραγωγή της εξ. (3.3):

$$\dot{E} = \dot{K} + \dot{U} \quad (3.9)$$

όπου κάνοντας χρήση του θεωρήματος Reynolds και της αρχής διατηρήσεως της μάζας

$$\dot{U} = \int_V \rho \dot{e} dV \quad (3.10)$$

Συνδυάζοντας τις εξ. (3.7) και (3.9) έχουμε την εξής έκφραση της Α.Δ.Ε.:

$$\dot{K} + \dot{U} = W^{(ext)} + Q \quad (3.11)$$

Για την περαιτέρω επεξεργασία της ενεργειακής εξ. (3.11) υπενθυμίζουμε το παρακάτω θεμελιώδες

Θεώρημα²:

Η διαφορά μεταξύ της ισχύος των εξωτερικών δυνάμεων και της μεταβολής της κινητικής ενέργειας ισούται με την ισχύ των "εσωτερικών" δυνάμεων,

$$W^{(ext)} - \dot{K} = W^{(int)} \quad (3.12)$$

όπου η ισχύς των εσωτερικών δυνάμεων ορίζεται ως το ολοκλήρωμα:

$$W^{(int)} = \int_V P dV \quad (3.13)$$

και ποσότητα P ορίζεται ως η ισχύς του τανυστή των τάσεων³,

$$P = \sigma_{xx} \dot{\epsilon}_{xx} + \sigma_{xy} \dot{\epsilon}_{xy} + \dots + \sigma_{zz} \dot{\epsilon}_{zz} \quad (3.14)$$

και όπου $\dot{\epsilon}_{ij}$ είναι ο τανυστής του ρυθμού παραμορφώσεως,

$$\dot{\epsilon}_{xx} = \frac{\partial v_x}{\partial x}, \quad \dot{\epsilon}_{xy} = \dot{\epsilon}_{yx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right), \dots \quad (3.15)$$

Υπογραμμίζουμε ότι η ενεργειακή εξ. (3.12) είναι ανεξάρτητη της Α.Δ.Ε., εξ. (3.5), και τούτο γιατί η τελευταία προκύπτει από τον ορισμούς της ισχύος των εξωτερικών, των εσωτερικών δυνάμεων και της κινητικής ενέργειας καθώς και από τις δυναμικές εξισώσεις, που με τη σειρά τους είναι απόρροια της Αρχής Διατηρήσεως της Ορμής. Επίσης παρατηρούμε ότι στην ειδική περίπτωση όπου η κινητική κατάσταση του συνεχούς είναι σταθερή (π.χ. στην περίπτωση στατικής ισορροπίας) από το παραπάνω θεώρημα προκύπτει το εξής γνωστό από την Τεχνική Μηχανική,

² Για την απόδειξη του θεωρήματος αυτού ιδέ: I. Βαρδουλάκη, *Εισαγωγή στη Μηχανική του Συνεχούς Μέσου*, Εκδ. Συμμετρία, Κεφ. 7.2.3, 2008.

³ Αγγλ. *specific stress power*, Γερ. *Elementarleistung*

Λήμμα:

Για οιονεί στατικές παραμορφώσεις από το παραπάνω Θεώρημα προκύπτει η ισότητα των 'έργων' εσωτερικών και εξωτερικών δυνάμεων,

$$\dot{K} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad W^{(ext)} = W^{(int)} \quad (3.16)$$

ή

$$\int_{\partial V} t_k v_k dS + \int_V F_k v_k dV = \int_V \sigma_{km} \dot{\epsilon}_{km} dV \quad (3.17)$$

Στην περίπτωση αυτή η ενεργειακή εξίσωση παίρνει την εξής μορφή

$$W^{(ext)} = \dot{U} - Q \quad (3.18)$$

Για την επεξήγηση των εξ. (3.16) έως (3.18) θα θεωρήσουμε στη συνέχεια δύο ακραίες περιπτώσεις: α) Την περίπτωση ενός ελαστικού υλικού και β) την περίπτωση ενός ιδεατά πλαστικού-απολύτως στερεού υλικού.

3.1.2 Ελαστικότητα

Για ισόθερμες παραμορφώσεις θα δεχθούμε ότι

$$Q = 0 \quad (3.19)$$

Οπότε για οιονεί στατικές, ισόθερμες παραμορφώσεις από την εξ. (3.9) παίρνουμε την εξής ενεργειακή εξίσωση:

$$W^{(ext)} = \dot{U} \quad (3.20)$$

Από τις εξ. (3.16) και (3.16) παίρνουμε εν προκειμένω ότι η αλλαγή της εσωτερικής ενέργειας ισούται με την ισχύ των εσωτερικών δυνάμεων,

$$\dot{U} = W^{(int)} \quad (3.21)$$

Από τις εξ. (3.10), (3.13), (3.14) και (3.21) παίρνουμε,

$$\int_V \rho \dot{e} dV = \int_V P dV \Rightarrow \rho \dot{e} = \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} \quad (3.22)$$

Στην περίπτωση ελαστικού υλικού ταυτίζουμε το ρυθμό παραμορφώσεως με το ρυθμό ελαστικών τροπών,

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = 0 \Rightarrow \dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij}^e \quad (3.23)$$

Για μικρές παραμορφώσεις δεχόμεθα ότι η αλλαγή της πυκνότητας του υλικού είναι αμελητέα:

$$\frac{\rho}{\rho^{(0)}} = \frac{dV}{dV^{(0)}} \Rightarrow \rho = \frac{\rho^{(0)}}{1 + \epsilon_{kk}} \approx \rho^{(0)} (1 - \epsilon_{kk}) \approx \rho^{(0)} \quad (3.24)$$

όπου $\rho^{(0)}$ είναι η πυκνότητα του υλικού στην αφόρτιστη κατάσταση ($\sigma_{ij} = 0$). Οπότε για μικρές παραμορφώσεις παίρνουμε τη σχέση

$$\rho \dot{\epsilon} \approx \rho^{(0)} \dot{\epsilon} = \dot{w}^e \Rightarrow \dot{w}^e \approx \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^e \quad (\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij}^e) \quad (3.25)$$

Με βάση την παραπάνω εξ. (3.25) δεχόμεθα την ύπαρξη μιας ισότροπης συναρτήσεως της (ελαστικής) τροπής,

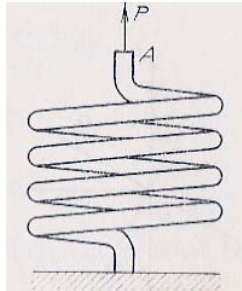
$$w = w^e(\epsilon_{ij}) \quad (3.26)$$

όπου η ποσότητα ϵ_{ij} μετρά την απειροστική τροπή του σώματος από την αφόρτιστη κατάσταση. Η συνάρτηση $w = w^e(\epsilon_{ij})$ καλείται πυκνότητα τροπικής ελαστικής ενέργειας⁴. Σημειώνουμε ότι ένα υλικό, για το οποίο δεχόμαστε την ύπαρξη της πυκνότητας τροπικής ελαστικής ενέργειας, καλείται υπερ-ελαστικό υλικό⁵.

Από τις εξ. (3.20) έως (3.25) παίρνουμε

$$dW^{(ext)} = dw^e \quad (3.27)$$

Άρα για οιονεί στατικές, ισόθερμες παραμορφώσεις ενός υπερελαστικού υλικού το ολικό έργο των εξωτερικών δυνάμεων αποθηκεύεται στο σώμα υπό μορφή ελαστικής ενέργειας. Το αντίστοιχο μηχανικό μοντέλο είναι το ελαστικό έλασμα (Εικ. 3-3).



Εικ. 3-3: Το ελαστικό έλασμα ως το μηχανικό μοντέλο ενός ελαστικού υλικού, όπου όλο το έργο των εξωτερικών δυνάμεων αποθηκεύεται ως εσωτερική ελαστική ενέργεια.

Είναι φανερό ότι η ύπαρξη ενός ελαστικού τροπικού δυναμικού, εξασφαλίζει το γεγονός, ότι για ένα υπερελαστικό υλικό το συνολικό έργο των εξωτερικών δυνάμεων για μία κλειστή τροπική όδευση μηδενίζεται

$$dW^{(ext)} = dw^e \Rightarrow \oint dW^{(ext)} \approx \oint \frac{\partial w^e}{\partial \epsilon_{ij}} d\epsilon_{ji} = \oint dw^e = 0 \quad (3.28)$$

Στην περίπτωση που εξετάζουμε από την εξ. (3.25) έπεται ότι τάσεις να έχουν τη συνάρτηση πυκνότητας τροπικής ελαστικής ενέργειας ως δυναμικό,

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial w^e}{\partial \epsilon_{ij}} \quad (3.29)$$

Επίσης παρατηρούμε, ότι, συμφώνως προς το θεμελιώδες θεώρημα αναπαράστασης ισότροπων τανυστικών συναρτήσεων⁶, έχουμε ότι η γενική αναπαράσταση των σχέσεων της ελαστικότητας που προκύπτει από την εξ. (3.29) είναι μια συνάρτηση της μορφής (Εικ. 3-4)

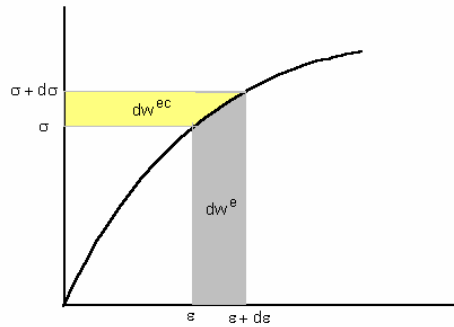
⁴ Αγγλ. *elastic strain energy density function*

⁵ Αγγλ. *hyperelastic material*

⁶ I. Βαρουλάκης, *Στοιχεία Μηχανικής του Συνεχούς Μέσου*, Κεφ. 2.7, 2007.

$$\sigma_{ij} = c_0 \delta_{ij} + c_1 \varepsilon_{ij} + c_2 \varepsilon_{ik} \varepsilon_{kj} \quad (3.30)$$

όπου οι συντελεστές c_ν ($\nu = 1, 2, 3$) είναι συναρτήσεις των αναλλοίωτων του τανυστή των τροπών. Ένα υλικό για το οποίο ισχύει ο καταστατικός νόμος (3.30) λέγεται ελαστικό υλικό. Από την εξ. (3.30) της θεωρίας της ελαστικότητας προκύπτει μια αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ τάσεων και τροπών. Επίσης προκύπτει και ότι για μία κλειστή τασική όδευση οι τροπές είναι μηδέν. Με άλλα λόγια οι "ελαστικές" τροπές είναι πλήρως αντιστρεπτές.



Εικ. 3-4: Σχηματική παράσταση σχέσεως τάσεων τροπών για ελαστικό υλικό

Σημειώνουμε τέλος ότι ο νόμος του Hooke της ισότροπης, γραμμικής, ισόθερμης ελαστικότητας,

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2G \varepsilon_{ij} \quad (3.31)$$

όπου λ και $2G$ είναι οι λεγόμενες σταθερές Lamé, είναι μία ειδική περίπτωση της γενικής εξ. (3.30), η οποία που προκύπτει από αυτή αν δεχθούμε ότι οι συντελεστές παίρνουν τις εξής τιμές:

$$c_0 = \lambda I_{1\varepsilon}, \quad c_1 = 2G, \quad c_2 = 0 \quad (3.32)$$

Στην περίπτωση αυτή έχουμε την εξής συνάρτηση πυκνότητας ελαστικής ενέργειας παραμορφώσεως

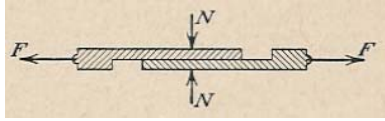
$$w^e = \frac{1}{2} \lambda \varepsilon_{mm} \varepsilon_{nn} + G \varepsilon_{mn} \varepsilon_{nm} \quad (3.33)$$

3.1.3 Πλαστικότητα

Αντιθέτως προς την περίπτωση του ελαστικού υλικού στην περίπτωση όπου το υλικό θα θεωρηθεί ότι είναι ιδεατά πλαστικό-απολύτως στερεό θα δεχθούμε ότι το υλικό αυτό δεν έχει την δυνατότητα αποταμιεύσεως εσωτερικής ενέργειας και ότι ο ρυθμός παραμορφώσεως είναι μη-αντιστρεπτός, ταυτιζόμενος με τον πλαστικό ρυθμό παραμορφώσεως

$$(\dot{\varepsilon}_{ij}^e = 0 \Rightarrow \dot{U} = 0) \wedge \dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}^p \quad (3.34)$$

Το αντίστοιχο μηχανικό μοντέλο είναι ο ιδεατός τριβέας (Εικ. 3-5).



Εικ. 3-5: Ο ιδεατός τριβέας ως το μηχανικό μοντέλο ενός ιδεατά πλαστικού υλικού, όπου το έργο των εξωτερικών δυνάμεων χάνεται πλήρως

Στην περίπτωση αυτή και συμφώνως προς την εξ. (3.18) το συνολικό έργο των εξωτερικών δυνάμεων ανά μονάδα χρόνου αναλύσεται σε θερμότητα, η οποία και διαφεύγει από το σώμα μέσω θερμικής διαχύσεως. Για το λόγο αυτό αντί της "εισροής" θερμότητας θα χρησιμοποιήσουμε εν προκειμένω την ολική εκροή θερμότητας

$$W^{(diss)} = -Q \quad (3.35)$$

Οπότε η εξ.(3.18) παίρνει τη μορφή:

$$W^{(ext)} = W^{(diss)} \quad (3.36)$$

Στην περίπτωση αυτή ταυτοποιούμε την ισχύ των εσωτερικών δυνάμεων με το λεγόμενο "πλαστικό έργο" ανά μονάδα χρόνου

$$w^p = \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^p \quad (3.37)$$

η δε εξίσωση

$$W^{(int)} = \int_V w^p dV \quad (3.38)$$

οδηγεί στη σχέση

$$W^{(int)} = W^{(diss)} \quad (3.39)$$

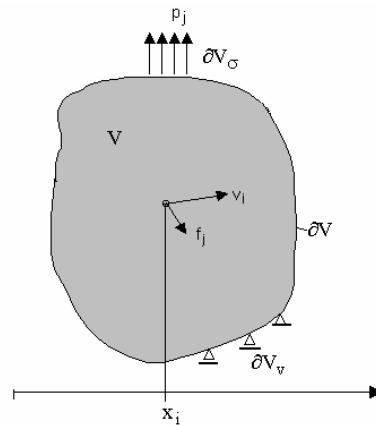
Οι εξ. (3.36) έως (3.39) ερμηνεύονται ως εξής: Σε ένα ιδεατά πλαστικό-απολύτως στερεό σώμα το συνολικό έργο των εξωτερικών δυνάμεων αναλύσεται εξ' ολοκλήρου σε θερμότητα, η οποία και διαφεύγει από το σώμα μέσω του μηχανισμού της μοριακής διαχύσεως. Η αντίστοιχη "κατανάλωση" ενέργειας $W^{(diss)}$ ανά μονάδα χρόνου, υπολογίζεται από την ισχύ των εσωτερικών δυνάμεων, η οποία με τη σειρά της ταυτίζεται με το συνολικό "πλαστικό έργο" των τάσεων ανά μονάδα χρόνου.

3.2 Η Αρχή των Δυνατών Έργων

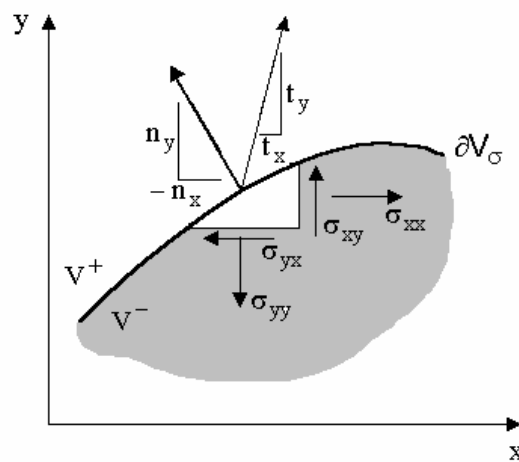
Θεωρούμε ένα Συνεχές Σώμα B , το οποίο καταλαμβάνει τον όγκο V και περιβάλλεται από την επιφάνεια ∂V (Εικ. 3-6). Το εν λόγω Συνεχές Μέσο είναι εφοδιασμένο με ένα πεδίο ταχυτήτων $v_i(x_k)$ και με ένα εντατικό πεδίο $\sigma_{ij}(x_k)$. Θα δεχθούμε ότι τα πεδία αυτά είναι τμηματικός συνεχή και αρκούντως παραγωγίσιμα. Τυχόν ασυνέχειες θα εξετασθούν ξεχωριστά. Δεχόμεθα ότι στο τυχόν υλικό σημείο στο χωρίο V ασκούνται καθολικές δυνάμεις $f_i dV$, ενώ πάνω σε μία δεδομένη στοιχειώδη επιφάνεια dS , στο σύνορο του σώματος ∂V εμφανίζεται μία στοιχειώδης δύναμη $dt_i = t_i dS$, η οποία υπολογίζεται από τον τανυστή των τάσεων σ_{ij} και το μοναδιαίο εξωτερικό διάνυσμα n_i πάνω στην στοιχειώδη επιφάνεια (Εικ. 3-7)

$$t_i = \sigma_{ki} n_k \quad (3.40)$$

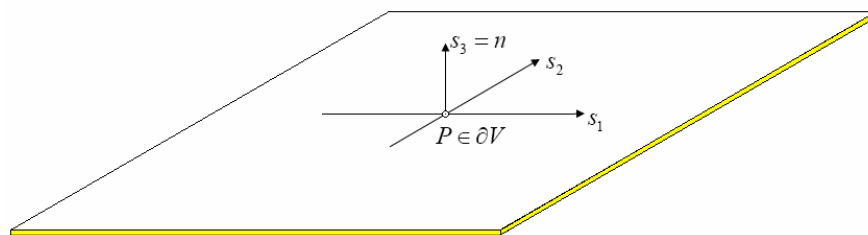
Η διανυσματική ποσότητα t_i , με διαστάσεις τάσεως, λέγεται διάνυσμα τάσεως ή ελκυστή⁷.



Εικ. 3-6: Καθολικές δυνάμεις, συνοριακές δυνάμεις και κινηματικοί περιορισμοί



Εικ. 3-7: Ισορροπία στο σύνορο



Εικ. 3-8: Συνοριακό σημείο $P(x_k)$ και τοπικοί βαθμοί ελευθερίας

⁷ Αγγλ. stress vector, traction

Παρατηρούμε ότι στο τυχόν σημείο $P(x_k) \in \partial V$ το θεωρούμενο απλό Συνεχές μέσο διαθέτει 3 βαθμούς ελευθερίας (Εικ. 3-8). Αυτό σημαίνει ότι κατά μήκος κάποιων τμηματικώς συνεχών γραμμών ($s_\alpha, \alpha=1,2$) στην επιφάνεια του συνόρου και στην κατεύθυνση $s_3 = n$, καθέτως προς την επιφάνεια του συνόρου, θα δίδεται η πληροφορία σχετικά είτε με την συνιστώσα της ταχύτητας v_α είτε με την συνιστώσα t_α του ελκυστή των τάσεων. Ως εκ τούτου το σύνορο ∂V χωρίζεται σε δύο συμπληρωματικά υποσύνολα (Εικ. 3-6),

$$\partial V_v \cup \partial V_\sigma = \partial V \quad \wedge \quad \partial V_v \cap \partial V_\sigma = \emptyset \quad (3.41)$$

έτσι ώστε $\partial V_v = \{P(x_k), \alpha \in \{J_v\}\}$ και $\partial V_\sigma = \{P(x_k), \alpha \in \{J_\sigma\}\}$, όπου $\{J\}$ είναι τα σύνολα των αντίστοιχων βαθμών ελευθερίας στο σημείο. Π.χ. αν σε κάποιο σημείο του συνόρου περιορίζεται μόνο το διάνυσμα της ταχύτητας έχουμε, $\{J_v\} = \{1,2,3\} \wedge \{J_\sigma\} = \{\emptyset\}$ κ.ο.κ. Άρα στο σύνολο ∂V_v να καθορίζεται η συνιστώσα του διανύσματος της ταχύτητας,

$$v_\alpha = q_\alpha \quad \alpha \in \{J_v\} \quad (3.42)$$

και στο σύνολο ∂V_σ να δίδεται η συνιστώσα του διανύσματος του ελκυστή των τάσεων

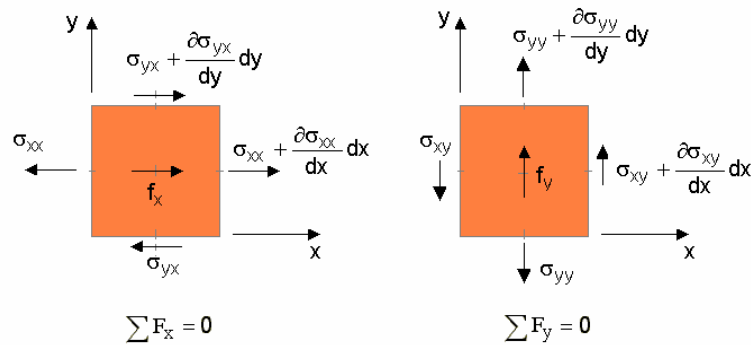
$$t_\alpha = p_\alpha \quad \alpha \in \{J_\sigma\} \quad (3.43)$$

Η εντατική κατάσταση που περιγράφεται από το πεδίο των τάσεων σ_{ij} καλείται πεδίο ισορροπίας, όταν οι καθολικές δυνάμεις $f_i dV$ και οι επιφανειακές δυνάμεις $p_i dS$ βρίσκονται σε ισορροπία με τον τανυστή των τάσεων σ_{ij} τόσο στο χωρίο V (Εικ. 3-9)

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + f_j = 0 \quad , \quad in \quad V \quad (3.44)$$

όσο και στο σύνορο αυτού ∂V_σ ,

$$\sigma_{ij} n_i = p_j \quad , \quad on \quad \partial V_\sigma \quad (3.45)$$



Εικ. 3-9: Ισορροπία σε δύο διαστάσεις

Αντιστοίχως θεωρούμε ένα πεδίο ταχυτήτων v_i , το οποίο ικανοποιεί τις κινηματικές συνθήκες εξ. (3.42) στο σύνορο ∂V_v ,

$$v_i = q_i \quad , \quad on \quad \partial V_v \quad (3.46)$$

Στο πεδίο ταχυτήτων αυτό αντιστοιχεί το εξής πεδίο ρυθμού παραμορφώσεως,

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (3.47)$$

Οι εξ. (3.47) γράφονται καμιά φορά και με τη μορφή,

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) - \dot{\varepsilon}_{ij} = 0 \quad , \quad in \ V \quad (3.48)$$

και καλούνται εξισώσεις συμβιβαστού για το πεδίο $\dot{\varepsilon}_{ij}$.

Με βάση τα παραπάνω η Α.Δ.Ε. διατυπώνεται τώρα ως εξής ολοκληρωτική εξίσωση,

$$\int_V \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} dV = \int_V f_i v_i dV + \int_{\partial V_v} t_i q_i dS + \int_{\partial V_\sigma} p_i v_i dS \quad (3.49)$$

Θεώρημα:

Η Α.τ.Δ.Ε., εξ. (3.49) είναι ισοδύναμη προς τις εξισώσεις ισορροπίας και τις εξισώσεις συμβιβαστού παντού στο χωρίο V και στο σύνορό του ∂V .

Απόδειξη

Για την απόδειξη του θεωρήματος αυτού στο σύνορο του σώματος παρατηρούμε ότι αν υποθέσουμε ότι, α) ο τανυστής των τάσεων είναι συμμετρικός και ότι βρίσκεται σε ισορροπία με τις καθολικές δυνάμεις στο χωρίο, τότε

$$\begin{aligned} \int_V \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} dV - \int_V f_i v_i dV &= \int_V \sigma_{ij} \partial_i v_j dV + \int_V \partial_j \sigma_{ji} v_i dV \\ &= \int_V \partial_j (\sigma_{ji} v_i) dV = \int_{\partial V} n_j \sigma_{ji} v_i dS = \int_{\partial V} t_i v_i dS \end{aligned} \quad (3.50)$$

όπου κάναμε χρήση του θεωρήματος αποκλίσεως.

Από τον ορισμό του ελκυστή των τάσεων, εξ. (3.40), την εξ. (3.50) και την Α.Δ.Ε. εξ. (3.49) έπεται

$$\int_{\partial V_\sigma} (t_i - p_i) v_i dS + \int_{\partial V_v} t_i (v_i - q_i) dS = 0 \quad (3.51)$$

Αν ισχύουν οι συνοριακές συνθήκες εξ. (3.43) και (3.42), τότε η εξ. (3.51) ικανοποιείται. Αντιστρόφως από την εξ. (3.51) και, α) για τυχαία επιλογή του πεδίου v_i και για $t_i = 0$ στο ∂V_v , έπεται η συνοριακή συνθήκη για τον ελκυστή, εξ. (3.43), και β) για τυχαία επιλογή του πεδίου t_i και για $v_i = 0$ στο ∂V_σ , έπεται η συνοριακή συνθήκη για την ταχύτητα, εξ. (3.42).

Για την απόδειξη του θεωρήματος στο εσωτερικό του σώματος, η Α.Δ.Ε. γράφεται ως εξής:

$$\begin{array}{c}
 \text{σύνολο ισορροπίας} \\
 \int_V \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} dV = \int_V f_i v_i dV + \int_{\partial V} t_i v_i dS \\
 \text{συμβατό σύνολο}
 \end{array}
 \tag{3.52}$$

Το σύνολο $\{f_i, t_i, \sigma_{ij}\}$ ικανοποιεί τις εξισώσεις ισορροπίας, εξ. (3.44) και (3.45), και ως εκ τούτου καλείται *σύνολο ισορροπίας*, ενώ το σύνολο $\{v_i, \dot{\varepsilon}_{ij}\}$ ικανοποιεί τις εξισώσεις συμβιβαστού, εξ. (3.48) και (3.46), και καλείται *συμβατό σύνολο*.

Κάνοντας χρήση του ορισμού του ελκυστή των τάσεων, εξ. (3.40), παρατηρούμε ότι το δεύτερο ολοκλήρωμα στο δεξιό μέρος της εξ. (3.52) μετασχηματίζεται ως εξής,

$$\begin{aligned}
 \int_{\partial V} t_i v_i dS &= \int_{\partial V} \sigma_{ji} n_j v_i dS = \int_V \partial_j (\sigma_{ji} v_i) dV = \int_V \partial_j \sigma_{ji} v_i dV + \int_V \sigma_{ij} \partial_j v_i dV \\
 &= \int_V \partial_j \sigma_{ji} v_i dV + \frac{1}{2} \left(\int_V \sigma_{ij} \partial_j v_i dV + \int_V \sigma_{ji} \partial_i v_j dV \right) \\
 &= \int_V \partial_j \sigma_{ji} v_i dV + \int_V \sigma_{ij} \frac{1}{2} (\partial_j v_i + \partial_i v_j) dV
 \end{aligned}
 \tag{3.53}$$

όπου κάναμε χρήση του θεωρήματος αποκλίσεως και της συμμετρίας του τανυστή των τάσεων.

Συνδυάζοντας τώρα τις εξ. (3.52) και (3.53) παίρνουμε,

$$\int_V \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} dV = \int_V f_i v_i dV + \int_V \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} v_i dV + \int_V \sigma_{ij} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) dV
 \tag{3.54}$$

ή

$$\int_V \left(\dot{\varepsilon}_{ij} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right) \sigma_{ij} dV = \int_V \left(f_i + \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} \right) v_i dV
 \tag{3.55}$$

Ευθύ:

Η Α.Δ.Ε. έπεται από τις εξισώσεις ισορροπίας και συμβιβαστού.

Αν δεχθούμε ότι το πεδίο ρυθμού παραμορφώσεως $\dot{\varepsilon}_{ij}$ παράγεται από ένα πεδίο ταχύτητας v_i , βάσει των εξισώσεων συμβιβαστού (3.48), τότε μηδενίζεται το ολοκλήρωμα στο αριστερό μέρος της εξ. (3.55). Επειδή το πεδίο των τάσεων σ_{ij} ικανοποιεί τις εξισώσεις ισορροπίας (3.44), μηδενίζεται και το ολοκλήρωμα στο δεξιό μέρος της εξ. (3.55). Άρα ισχύει η εξίσωση (3.55).

Αντίστροφο:

Από την Α.Δ.Ε. έπονται οι εξισώσεις συμβιβαστού και ισορροπίας.

Έστω ένα τυχαίο πεδίο τάσεων σ_{ij} , που ικανοποιεί τις εξισώσεις ισορροπίας (3.44), τότε από την Α.Δ.Ε. εξ. (3.55) έπεται

$$\int_V \left(\dot{\varepsilon}_{ij} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right) \sigma_{ij} dV = 0 \quad (3.56)$$

Αν απαιτήσουμε να ισχύει η Α.Δ.Ε. εξ. (3.30) για κάθε τέτοιο πεδίο σ_{ij} , τότε έχουμε σαν αποτέλεσμα τις εξισώσεις συμβιβαστού (3.48).

Έστω ένα τυχαίο πεδίο ταχυτήτων v_i , που ικανοποιεί τις εξισώσεις συμβιβαστού (3.48). Τότε από την Α.Δ.Ε. εξ. (3.55) έπεται

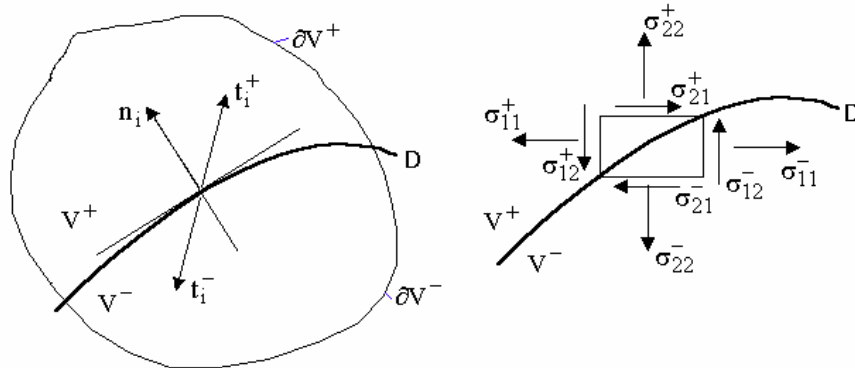
$$\int_V \left(f_i + \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} \right) v_i dV = 0 \quad (3.57)$$

Αν απαιτήσουμε να ισχύει η Α.Δ.Ε. εξ. (3.57) για κάθε τέτοιο πεδίο v_i , τότε έχουμε ως αποτέλεσμα τις εξισώσεις ισορροπίας (3.44).

3.3 Ασυνεχή Πεδία

Έστω μια σταθερή ως προς τα υλικά σημεία ενός σώματος B επιφάνεια D , η οποία χωρίζει το σώμα σε δύο τμήματα B^+ και B^- . Δεχόμεθα ότι πάνω στην επιφάνεια αυτή τα διάφορα πεδία μπορούν να εμφανίσουν ασυνέχειες.

3.3.1 Ασυνέχειες στην ένταση



Εικ. 3-10: Ασυνέχεια στην ένταση

Εκατέρωθεν μιας επιφάνειας ασυνέχειας της εντάσεως D θα διακρίνουμε δύο τανυστές, σ_{ij}^+ και σ_{ij}^- (Εικ. 3-10). Η διαφορά τους

$$[[\sigma_{ij}]] = \sigma_{ij}^+ - \sigma_{ij}^- \quad (3.58)$$

καλείται άλμα⁸ του τανυστή των τάσεων. Όταν το άλμα είναι μηδέν, τότε ο τανυστής είναι συνεχής.

Οι οποιεσδήποτε ασυνέχειες στον τανυστή των τάσεων περιορίζονται από το γεγονός ότι εκατέρωθεν της επιφάνειας ασυνέχειας πρέπει να ισχύει ισορροπία, δηλαδή

$$t_i^+ = -t_i^- \Rightarrow \sigma_{ki}^+ n_k^+ = -\sigma_{ki}^- n_k^- \quad (3.59)$$

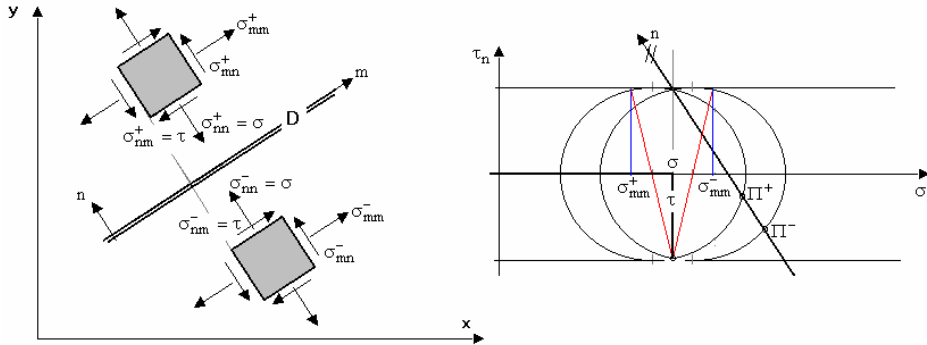
και επειδή,

⁸ Αγγλ. *jump*

$$n_i = n_i^+ = -n_i^- \quad (3.60)$$

έπεται,

$$0 = \sigma_{ki}^+ n_k^+ + \sigma_{ki}^- n_k^- = (\sigma_{ki}^+ - \sigma_{ki}^-) n_i \Rightarrow [[\sigma_{ki}]] n_k = 0 \quad (3.61)$$



Εικ. 3-11: Συνθήκες ισορροπίας εκατέρωθεν επιφάνειας ασυνέχειας της εντάσεως

Όπως φαίνεται και στην Εικ. 3-11, η παραπάνω έκφραση για το άλμα της τάσεως, εξ. (3.61), σημαίνει ότι οι συνιστώσες του τανυστή των τάσεων στο εφαπτομενικό επίπεδο προς την επιφάνεια ασυνέχειας είναι συνεχείς και μόνο η ορθή συνιστώσα σ_{mm} του τανυστή των τάσεων, που δρα σε επίπεδο που είναι κάθετο στην ασυνέχεια, μπορεί να εμφανίσει ασυνέχειες.

Με βάση τα παραπάνω η Α.Δ.Ε., εξ. (3.52) μπορεί να γραφεί για κάθε ένα από τα τμήματα B^+ και B^- ξεχωριστά

$$\int_{V^+} \sigma_{ij}^+ \dot{\epsilon}_{ij} dV = \int_{V^+} f_i v_i dV + \int_{\partial V^+} t_i^+ v_i dS + \int_D t_i^+ v_i dS \quad (3.62)$$

$$\int_{V^-} \sigma_{ij}^- \dot{\epsilon}_{ij} dV = \int_{V^-} f_i v_i dV + \int_{\partial V^-} t_i^- v_i dS + \int_D t_i^- v_i dS$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις εκφράσεις αυτές και λόγω της συνθήκης ισορροπίας (3.59), τα ολοκληρώματα πάνω στην επιφάνεια ασυνέχειας αλληλοαναιρούνται, και η έκφραση της Α.Δ.Ε. παραμένει αναλλοίωτη ως έχει. Άρα ασυνέχειες στην τάση, που δεν παραβιάζουν τις συνθήκες ισορροπίας, δεν επηρεάζουν την μαθηματική διατύπωση της Α.Δ.Ε..

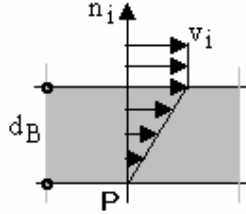
3.3.2 Ασυνέχειες στην ταχύτητα

Θεωρούμε μία οικογένεια επιφανειών $D^{(\alpha)}$ ($\alpha = 1, 2, \dots$), πάνω στις οποίες εμφανίζονται ασυνέχειες του πεδίου ταχύτητας. Μέσα στα πλαίσια της θεωρίας πλαστικότητας όλκιμων υλικών, οι ασυνέχειες αυτές του διανύσματος της ταχύτητας περιορίζονται στη συνιστώσα της ταχύτητας που είναι παράλληλη προς το εφαπτομενικό επίπεδο στο τυχόν σημείο P της επιφάνειας $D^{(\alpha)}$. Η υπόθεση αυτή είναι συμβατή με την παρατήρηση ότι ασυνέχειες στην ταχύτητα εμφανίζονται εκατέρωθεν μίας ζώνης ολισθήσεως, απειροστικού πάχους ($d_B \rightarrow 0$, Εικ. 3-12). Επειδή το υλικό θεωρείται ασυμπίεστο, γι' αυτό και η κάθετη προς τη ζώνη ολισθήσεως συνιστώσα της ταχύτητας είναι συνεχής

$$[[v_n]] = [[v_i n_i]] = 0 \quad (3.63)$$

όπου v_i είναι το διάνυσμα της ταχύτητας και n_i το μοναδιαίο διάνυσμα, κάθετο στο τυχόν σημείο P στην επιφάνεια $D^{(\alpha)}$. Άρα το άλμα της ταχύτητας περιορίζεται στην εφαπτομενική συνιστώσα της,

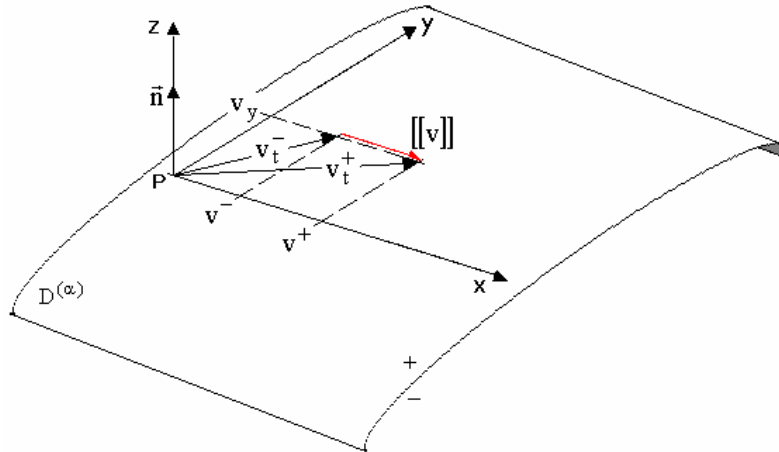
$$v_i^+ = v_i - v_n n_i \Rightarrow [[v_i]] = [[v_i^+]] \quad (3.64)$$



Εικ. 3-12: Κανονικοποίηση ασυνέχειας στο πεδίο ταχυτήτων

Επιλέγουμε τώρα ένα τοπικό σύστημα συντεταγμένων $P(x, y, z)$ με τον άξονα z στην κατεύθυνση του διανύσματος n_i και τον άξονα x παράλληλο προς το διάνυσμα του άλματος, οπότε (Εικ. 3-13)

$$[[v_x]] = v^+ - v^-, \quad [[v_y]] = [[v_z]] = 0 \quad (3.65)$$



Εικ. 3-13: Εφαπτομενικό άλμα στην ταχύτητα

Θεωρούμε τώρα ότι η επιφάνεια $D^{(\alpha)}$ χωρίζει το σώμα σε δύο τμήματα B^+ και B^- . Αντιστοίχως δε στην Α.Δ.Ε. εμφανίζονται επιφανειακά ολοκληρώματα της μορφής

$$\int_{D^{(\alpha)}} t_i^+ v_i^+ dS = - \int_{D^{(\alpha)}} (\sigma_n v_n + \sigma_{zy} v_y + \sigma_{zx} v^+) dS \quad (3.66)$$

$$\int_{D^{(\alpha)}} t_i^- v_i^- dS = \int_{D^{(\alpha)}} (\sigma_n v_n + \sigma_{zy} v_y + \sigma_{zx} v^-) dS$$

Οπότε με τον συμβολισμό $\tau = \sigma_{zx}$, το άθροισμα των επιμέρους όρων δίδει την συνεισφορά της ασυνέχειας στην ταχύτητα

$$- \int_{D^{(\alpha)}} \tau (v^+ - v^-) dS \quad (3.67)$$

Η παρατήρηση αυτή μας οδηγεί στην εξής γενική μορφή της Α.Δ.Ε.,

$$\int_V f_i v_i dV + \int_{\partial V} t_i v_i dS = \int_V \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} dV + \sum_{(\alpha) D^{(\alpha)}} \int \tau[[v]] dS \quad (3.68)$$

Η παραπάνω εξίσωση αποδίδεται ως εξής:

$$W^{(ext)} = W^{(diss)} \quad (3.69)$$

όπου $W^{(ext)}$ είναι η ισχύς των εξωτερικών φορτίων

$$W^{(ext)} = \int_V f_i v_i dV + \int_{\partial V} t_i v_i dS \quad (3.70)$$

και $W^{(diss)}$ είναι ο ρυθμός αναλίσκόμενης σε θερμότητα ενέργειας⁹ στο εσωτερικό του σώματος

$$W^{(diss)} = \int_V \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} dV + \sum_{(\alpha) D^{(\alpha)}} \int \tau[[v]] dS \quad (3.71)$$

Κατ' αρχήν παρατηρούμε ότι με $\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij}^p$ και τις εξ. (2.50) και (2.51)

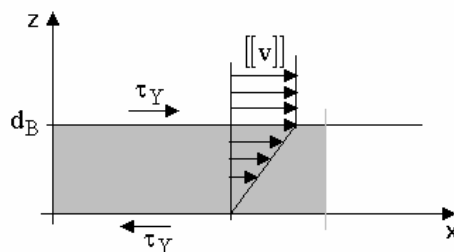
$$\dot{\epsilon}_{kk}^p = 0, \quad \frac{\dot{\epsilon}_{ij}^p}{\dot{g}^p} = \frac{s_{ij}}{2T}, \quad \dot{g}^p = \sqrt{2\dot{\epsilon}_{ij}^p \dot{\epsilon}_{ij}^p} \quad (3.72)$$

το πλαστικό έργο στον πρώτο όρο της παραπάνω εκφράσεως, εξ. (3.71), για την κατανάλωση μηχανικής ενέργειας υπολογίζεται ως εξής,

$$w^p = \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^p = \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^p = s_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^p = T \frac{2\dot{\epsilon}_{ij}^p \dot{\epsilon}_{ij}^p}{\dot{g}^p} = T \dot{g}^p \quad (3.73)$$

Οι θεωρούμενες επιφάνειες ασυνέχειας της ταχύτητας είναι μια προσέγγιση του μηχανισμού διατμήσεως κατά μήκος μιας λεπτής ζώνης διατμήσεως, πάχους d_B (Εικ. 3-14). Η διάτμηση στη ζώνη αυτή είναι σταθερή καθ' ύψος και ίση προς

$$\dot{\gamma} = \frac{[[v]]}{d_B} \quad (3.74)$$



Εικ. 3-14: Λεπτή ζώνη διατμήσεως

⁹ Αγγλ. rate of energy dissipation

Σε ένα τοπικό σύστημα συντεταγμένων με τον άξονα x , παράλληλο προς τη ζώνη ολισθήσεως και τον άξονα z κάθετο σ' αυτήν ο τανυστής του ρυθμού (πλαστικής) παραμορφώσεως δίδεται από τον παρακάτω πίνακα,

$$[\dot{e}_{ij}^p] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dot{\gamma}/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ \dot{\gamma}/2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.75)$$

Οπότε από την καταστατική σχέση,

$$\frac{\dot{e}_{ij}^p}{\dot{g}^p} = \frac{s_{ij}}{2T} \quad (3.76)$$

παίρνουμε αντιστοίχως

$$[s_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tau_Y \\ 0 & 0 & 0 \\ \tau_Y & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.77)$$

και

$$T = \sqrt{\frac{1}{2} s_{ij} s_{ji}} = \tau_Y \quad (3.78)$$

Άρα η έκφραση για την κατανάλωση μηχανικής ενέργειας παίρνει τη μορφή,

$$W^{(diss)} = \tau_Y \left\{ \int_V \dot{g}^p dV + \sum_{(\alpha)} \int_{D^{(\alpha)}} [[v]] dS \right\} \quad (3.79)$$

3.4 Τα Θεωρήματα της Οριακής Αναλύσεως

Τα θεωρήματα της οριακής αναλύσεως (Ο.Α.) βασίζονται στις εξής υποθέσεις:

- (Y1) Μικρές παραμορφώσεις μέχρι του σημείου της πλαστικής καταρρεύσεως.
- (Y2) Απολύτως πλαστικό υλικό που υπακούει σε συνηρημένο νόμο πλαστικής ροής.

Εν προκειμένω θεωρούμε ένα ιδεατά πλαστικό και απολύτως στερεό σώμα \mathbf{B} που υπακούει στην συνθήκη διαρροής κατά von Mises και στο νόμο καθετότητας. Επίσης θεωρούμε ότι το σώμα \mathbf{B} καταρρέει πλαστικά για δεδομένες τιμές των εξωτερικών φορτίων

$$t_i = p_i^c \text{ on } \partial V_\sigma \quad (3.80)$$

Έστω σ_{ij}^c το αντίστοιχο ("πραγματικό") οριακό εντατικό πεδίο, το οποίο ικανοποιεί την συνθήκη διαρροής,

$$T = \sqrt{\frac{1}{2} s_{ij}^c s_{ji}^c} = \tau_Y = \sqrt{\frac{3}{2}} k \quad (3.81)$$

και προκαλεί ένα μηχανισμό καταρρεύσεως, ο οποίος περιγράφεται από το "πραγματικό" πεδίο ταχυτήτων v_i^c που ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες θέσεως

$$v_i = q_i \text{ on } \partial V_v \quad (3.82)$$

Το δε αντίστοιχο πεδίο ρυθμού παραμορφώσεως

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^c = (\partial_i v_j^c + \partial_j v_i^c) / 2 \quad (3.83)$$

ικανοποιεί το νόμο διαρροής

$$\dot{\varepsilon}_{kk}^c = 0 \quad , \quad \dot{\varepsilon}_{ij}^c = \frac{s_{ij}^c}{2\tau_Y} \quad , \quad \dot{g}^c = \sqrt{2\dot{\varepsilon}_{ij}^c \dot{\varepsilon}_{ij}^c} \quad (3.84)$$

Στη βάση αυτών των ορισμών η Α.Δ.Ε., εξ. (3.68) για τη θεωρούμενη πραγματική λύση γράφεται,

$$\int_V \sigma_{ij}^c \dot{\varepsilon}_{ij}^c dV + \sum_{(\alpha)} \int_{D^{(\alpha)}} \tau^c [[v^c]] dS = \int_V f_i v_i^c dV + \int_{\partial V} t_i v_i^c dS \quad (3.85)$$

ή λόγω των εξ. (3.77) και (3.81)

$$\tau_Y \left\{ \int_V \dot{g}^c dV + \sum_{(\alpha)} \int_{D^{(\alpha)}} [[v^c]] dS \right\} = \int_V f_i v_i^c dV + \int_{\partial V} t_i v_i^c dS \quad (3.86)$$

Για τη διατύπωση των θεωρημάτων της Ο.Α. θα γίνει χρήση της Α.Δ.Ε., όπως αυτή διατυπώθηκε πιο πάνω καθώς επίσης και χρησιμοποιηθούν οι κάτωθι:

Ορισμοί:

- *Κινηματικώς επιτρεπτό πεδίο ταχυτήτων* καλείται ένα πεδίο ταχυτήτων $v_i(x_k)$, το οποίο ικανοποιεί: α) τις συνοριακές συνθήκες για την ταχύτητα, και β) τις συνθήκες συμβιβαστού μεταξύ ρυθμού παραμορφώσεως και ταχύτητας.
- *Στατικώς επιτρεπτό πεδίο τάσεων* καλείται ένα εντατικό πεδίο $\sigma_{ij}(x_k)$, το οποίο ικανοποιεί: α) τις εξισώσεις ισορροπίας, β) τις συνοριακές συνθήκες για τις τάσεις, και γ) δεν παραβιάζει πουθενά τη συνθήκη διαρροής.

3.4.1 Το θεώρημα "άνω ορίου"

Για την απόδειξη του λεγόμενου και "κινηματικού" θεωρήματος θεωρούμε ένα κινηματικά επιτρεπτό σύνολο $\{v_i^*, \dot{\varepsilon}_{ij}^*\}$, δηλαδή ένα συμβατό σύνολο που ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες για την ταχύτητα

$$v_i^* = q_i \text{ on } \partial V_v \quad (3.87)$$

και του οποίου το αντίστοιχο πεδίο ρυθμού παραμορφώσεως

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^* = (\partial_i v_j^* + \partial_j v_i^*) / 2 \quad (3.88)$$

ικανοποιεί τη συνθήκη για ισόχωρη παραμόρφωση,

$$\dot{\varepsilon}_{kk}^* = 0 \quad (3.89)$$

Βάσει του νόμου διαρροής στο πεδίο $\dot{\varepsilon}_{ij}^* = \dot{\varepsilon}_{ij}^*$ αντιστοιχεί ένα εντατικό πεδίο, s_{ij}^* ,

$$s_{ij}^* = 2\tau_Y \frac{\dot{\epsilon}_{ij}^*}{\dot{g}^*}, \quad \dot{g}^* = \sqrt{2\dot{\epsilon}_{ij}^* \dot{\epsilon}_{ij}^*} \neq 0 \quad (3.90)$$

Έτσι ορίζουμε κατά προσέγγιση μίας ισότροπης τάσεως p^* ένα εντατικό πεδίο

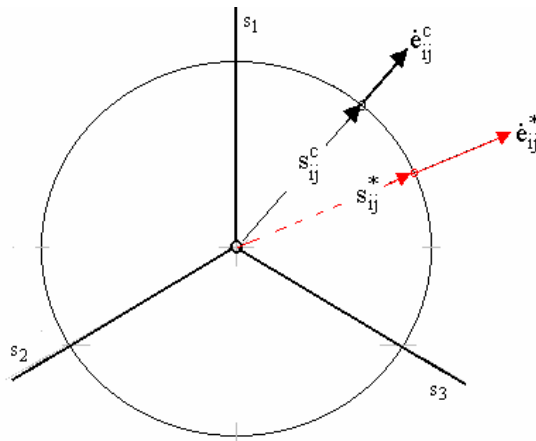
$$\sigma_{ij}^* = p^* \delta_{ij} + s_{ij}^* \quad (3.91)$$

στο οποίο αντιστοιχεί ένα σύνολο συνοριακών φορτίων t_i^* με βάση το νόμο των τάσεων κατά Cauchy

$$t_i^* = \sigma_{ki}^* n_k \text{ on } \partial V_\sigma \quad (3.92)$$

Όπως φαίνεται στην Εικ. 3-15 το δοκιμαστικό πεδίο $\dot{\epsilon}_{ij}^*$ και το πραγματικό πεδίο $\dot{\epsilon}_{ij}^c$ γενικώς θα διαφέρουν. Αυτό σημαίνει ότι το εντατικό πεδίο σ_{ij}^* γενικώς δεν θα ικανοποιεί τις συνθήκες ισορροπίας στο χωρίο V ,

$$\frac{\partial \sigma_{ij}^*}{\partial x_i} + f_j \neq 0 \quad (3.93)$$



Εικ. 3-15: Πραγματικό και δοκιμαστικό πεδία

Τέλος δεχόμεθα ότι το κινηματικώς επιτρεπτό πεδίο ταχυτήτων v_i^* είναι δυνατόν να εμφανίζει ασυνέχειες σε ένα σύνολο επιφανειών $D_*^{(\alpha)}$.

Μετά από αυτούς τους ορισμούς θα συγκρίνουμε το πραγματικό πεδίο ταχυτήτων v_i^c με το κινηματικώς επιτρεπτό v_i^* . Για τον σκοπό αυτό γράφουμε την Α.Δ.Ε. για το σύνολο ισορροπίας $\{f_i, p_i^c, \sigma_{ij}^c\}$, και το συμβατό σύνολο $\{v_i^*, \dot{\epsilon}_{ij}^*\}$,

$$\int_V \sigma_{ij}^c \dot{\epsilon}_{ij}^* dV - \int_V f_i v_i^* dV - \int_{\partial V} t_i v_i^* dS + \tau_Y \sum_{(\alpha) D_*^{(\alpha)}} \int [[v^c]] dS = 0 \quad (3.94)$$

Παρατηρούμε ότι στο χώρο των τάσεων τα διανύσματα s_{ij}^c και \dot{e}_{ij}^* γενικώς δεν είναι παράλληλα (Εικ. 3-15), οπότε για τη δοκιμαστική λύση προκύπτει το παρακάτω άνω φράγμα για το δυνατό πλαστικό έργο

$$w^* = \sigma_{ij}^c \dot{e}_{ij}^* = \sigma_{ij}^c \dot{e}_{ij}^* = s_{ij}^c \dot{e}_{ij}^* \leq s_{ij}^* \dot{e}_{ij}^* = \tau_Y \frac{2\dot{e}_{ij}^* \dot{e}_{ij}^*}{\dot{g}^*} = \tau_Y \dot{g}^* \quad (3.95)$$

Άρα η εξ. (3.94) δίδει,

$$0 = \int_V \sigma_{ij}^c \dot{e}_{ij}^* dV + \tau_Y \sum_{(\alpha)} \int_{D_i^{(\alpha)}} [[v^*]] dS - \int_V f_i v_i^* dV - \int_{\partial V} t_i v_i^* dS \leq \quad (3.96)$$

$$\tau_Y \int_V \dot{g}^* dV + \tau_Y \sum_{(\alpha)} \int_{D_i^{(\alpha)}} [[v^*]] dS - \int_V f_i v_i^* dV - \int_{\partial V} t_i v_i^* dS$$

Επίσης παρατηρούμε ότι το δυνατό πλαστικό έργο στις επιφάνειες ασυνέχειας φράσσεται ως εξής,

$$w_D^* = \tau_Y [[v^*]] \leq \tau_Y |[[v^*]]| \quad (3.97)$$

άρα

$$\tau_Y \int_V \dot{g}^* dV + \tau_Y \sum_{(\alpha)} \int_{D_i^{(\alpha)}} |[[v^*]]| dS - \int_V f_i v_i^* dV - \int_{\partial V} t_i v_i^* dS \geq 0 \quad (3.98)$$

και

$$0 = \tau_Y \left\{ \int_V \dot{g}^c dV + \sum_{(\alpha)} \int_{D_i^{(\alpha)}} [[v^c]] dS \right\} - \int_V f_i v_i^c dV - \int_{\partial V_v} t_i q_i dS - \int_{\partial V_\sigma} p_i v_i^c dS \leq \quad (3.99)$$

$$\tau_Y \left\{ \int_V \dot{g}^* dV + \sum_{(\alpha)} \int_{D_i^{(\alpha)}} |[[v^*]]| dS \right\} - \int_V f_i v_i^* dV - \int_{\partial V_v} t_i q_i dS - \int_{\partial V_\sigma} p_i v_i^* dS$$

ή

$$\tau_Y \left\{ \int_V \dot{g}^c dV + \sum_{(\alpha)} \int_{D_i^{(\alpha)}} [[v^c]] dS \right\} - \left\{ \int_V f_i v_i^c dV + \int_{\partial V_\sigma} p_i v_i^c dS \right\} \leq \quad (3.100)$$

$$\tau_Y \left\{ \int_V \dot{g}^* dV + \sum_{(\alpha)} \int_{D_i^{(\alpha)}} |[[v^*]]| dS \right\} - \left\{ \int_V f_i v_i^* dV + \int_{\partial V_\sigma} p_i v_i^* dS \right\}$$

Ορισμός:

Ως *ολική ισχύ*¹⁰ $P[v_i]$ ορίζουμε εκείνο το συναρτησιακό ενός πεδίου ταχυτήτων που υπολογίζεται από την διαφορά αναλυσκόμενης μηχανικής ενέργειας και ισχύος των εξωτερικών δυνάμεων για το πεδίο αυτό,

¹⁰ Αγγλ. *total power*

$$P[v_i] = W^{(diss)}[v_i] - \bar{W}^{(ext)}[v_i] \quad (3.101)$$

όπου

$$W^{(diss)} = \tau_Y \left\{ \int_V \dot{\mathbf{g}}^p dV + \sum_{(\alpha) D^{(\alpha)}} \int [[v]] dS \right\} \quad (3.102)$$

και

$$\bar{W}^{(ext)} = \int_V f_i v_i dV + \int_{\partial V_\sigma} p_i^c v_i dS \quad (3.103)$$

Άρα οι ποσότητες

$$\begin{aligned} P^c &= P[v_i^c] = W_c^{(diss)} - \bar{W}_c^{(ext)} \\ &= \tau_Y \left\{ \int_V \dot{\mathbf{g}}^c dV + \sum_{(\alpha) D^{(\alpha)}} \int [[v^c]] dS \right\} - \left\{ \int_V f_i v_i^c dV + \int_{\partial V_\sigma} p_i^c v_i^c dS \right\} \end{aligned} \quad (3.104)$$

και

$$\begin{aligned} P^* &= P[v_i^*] = W_*^{(diss)} - \bar{W}_*^{(ext)} \\ &= \tau_Y \left\{ \int_V \dot{\mathbf{g}}^* dV + \sum_{(\alpha) D^{(\alpha)}} \int |[[v^*]]| dS \right\} - \left\{ \int_V f_i v_i^* dV + \int_{\partial V_\sigma} p_i^c v_i^* dS \right\} \end{aligned} \quad (3.105)$$

παριστάνουν την ολική πραγματική και δυνατή ισχύ αντιστοίχως.

Συμφώνως προς τα ανωτέρω αποδείξαμε ότι, η ολική ισχύς είναι ελάχιστη για το πραγματικό πεδίο ταχύτητας,

$$P^c \leq P^* \quad (3.106)$$

Παρατηρούμε τέλος ότι (γιατί:),

$$P^c = \int_{\partial V_v} t_i q_i dS \quad (3.107)$$

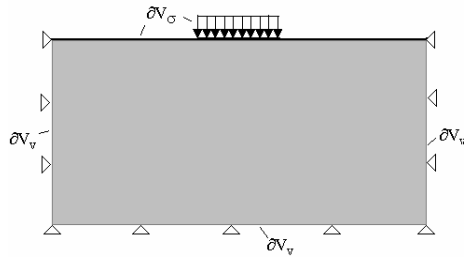


Figure 3-1: Πρόβλημα συνοριακών τιμών με ακλόνητα στηρίγματα

Υποθέτουμε τώρα ότι οι συνοριακές συνθήκες θέσεως αντιστοιχούν σε ακλόνητα στηρίγματα (Εικ. 3-15)¹¹,

$$v_i = q_i = 0 \text{ on } \partial V_v \quad (3.108)$$

¹¹ Η περίπτωση αυτή καλύπτει τα προβλήματα εκείνα όπου μελετάται η έναρξη της διαρροής (Αγγλ. *incipient flow*) και αντιδιαστέλλεται από προβλήματα μόνιμης πλαστικής ροής (Αγγλ. *steady flow*).

Στην περίπτωση αυτή από την εξ. (3.107) παίρνουμε

$$P^c = 0 \tag{3.109}$$

που ερμηνεύεται ως εξής: Στη θέση οριακής ισορροπίας η ολική ισχύς των πραγματικών φορτίων είναι μηδέν, δηλαδή το έργο των εξωτερικών φορτίων αναλύσκειται εξ ολοκλήρου σε θερμότητα

$$W_c^{(ext)} = W_c^{(diss)} \text{ (οριακή ισορροπία)} \tag{3.110}$$

Με τις εξ. (3.108) και (3.109) η ανισότητα (3.106) δίδει,

$$\int_{\partial V_\sigma} p_i^c v_i^* dS \leq \tau_Y \left\{ \int_V \dot{g}^* dV + \sum_{(\alpha)} \int_{D_s^{(\alpha)}} |[[v^*]]| dS \right\} - \int_V f_i v_i^* dV \tag{3.111}$$

Υποθέτουμε τώρα ότι τα πραγματικά φορτία p_i^c , για τα οποία ισχύει η πλαστική κατάρρευση του σώματος, είναι ανάλογα εκείνων που εξισορροπούν το αναλυσκόμενο έργο και το έργο των καθολικών δυνάμεων για το δεδομένο κινηματικώς αποδεκτό πεδίο ταχυτήτων,

$$p_i^c = \eta_k p_i^{k*} \tag{3.112}$$

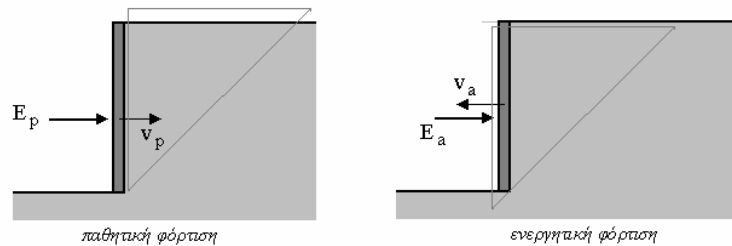
Ο συντελεστής αναλογίας η_k στην εξ. (3.112) καλείται κινηματικός συντελεστής φορτίσεως¹².

Δεχόμεθα ότι τα φορτία p_i^{k*} ικανοποιούν την εξίσωση

$$\int_{\partial V_\sigma} p_i^{k*} v_i^* dS = \tau_Y \left\{ \int_V \dot{g}^* dV + \sum_{(\alpha)} \int_{D_s^{(\alpha)}} |[[v^*]]| dS \right\} - \int_V f_i v_i^* dV \tag{3.113}$$

Αν η φόρτιση είναι «παθητική»¹³, τότε το φορτίο και το διάνυσμα της ταχύτητας στο φορτιζόμενο σύνορο είναι ομόρροπα (Εικ. 3-16). Στην αντίθετη περίπτωση η φόρτιση καλείται «ενεργητική»¹⁴,

$$p_i^{k*} v_i^* = \begin{cases} < 0 & \text{ενεργητική} \\ > 0 & \text{παθητική} \end{cases} \Rightarrow \int_{\partial V_\sigma} p_i^{k*} v_i^* dS = \begin{cases} < 0 & \text{ενεργητική} \\ > 0 & \text{παθητική} \end{cases} \tag{3.114}$$



Εικ. 3-16: Παθητική και ενεργητική φόρτιση

¹² Αγγλ. kinematic loading factor

¹³ Αγγλ. passive loading

¹⁴ Αγγλ. active loading

Από τις εξ. (3.111) και (3.112) παίρνουμε την ανισότητα

$$\eta_k \int_{\partial V_\sigma} p_i^{k*} v_i^* dS \leq \tau_Y \left\{ \int_V \dot{g}^* dV + \sum_{(\alpha) D_i^{(\alpha)}} \int |[[v^*]]| dS \right\} - \int_V f_i v_i^* dV \quad (3.115)$$

η οποία στην περίπτωση παθητικής φορτίσεως δίδει,

$$\eta_k \leq \frac{\tau_Y \left\{ \int_V \dot{g}^* dV + \sum_{(\alpha) D_i^{(\alpha)}} \int |[[v^*]]| dS \right\} - \int_V f_i v_i^* dV}{\int_{\partial V_\sigma} p_i^{k*} v_i^* dS} = \eta_k^* \quad (3.116)$$

Λόγω όμως της εξ. (3.113) έχουμε ότι

$$\eta_k^* = 1$$

Άρα

$$\eta_k \leq 1 \Rightarrow p_i^{k*} = \frac{p_i^c}{\eta_k} \geq p_i^c \quad (3.117)$$

και ως εκ τούτου αποδείξαμε το κάτωθι,

Θεώρημα «άνω ορίου» της Ο.Α.¹⁵:

Τα φορτία p_i^{k*} , που υπολογίζονται από την κινηματική εξίσωση

$$\int_{\partial V_\sigma} p_i^{k*} v_i^* dS = \tau_Y \left\{ \int_V \dot{g}^* dV + \sum_{(\alpha) D_i^{(\alpha)}} \int |[[v^*]]| dS \right\} - \int_V f_i v_i^* dV \quad (3.118)$$

αποτελούν στην περίπτωση μιας παθητικής (ενεργητικής) φορτίσεως ένα άνω (κάτω) φράγμα των πραγματικών φορτίων p_i^c , που προκαλούν πλαστική κατάρρευση. Άρα εν προκειμένω η εκτίμηση για το φορτίο καταρρεύσεως προκύπτει ως λύση ενός προβλήματος ελαχιστοποιήσεως.

Παρατήρηση:

Στην ανισότητα (3.106) το συναρτησιακό της ολικής ισχύος μπορεί να αντικατασταθεί από το συναρτησιακό του ρυθμού της κινητικής ενέργειας,

$$\dot{K}[v_i] = -P[v_i] = W^{(ext)}[v_i] - W^{(diss)}[v_i] \quad (3.119)$$

Η ταυτοποίηση του συναρτησιακού \dot{K} ως τη δυνητική μεταβολή της κινητικής ενέργειας δικαιολογείται, αφού το \dot{K} είναι η διαφορά της δυνατής ισχύος των εξωτερικών και εσωτερικών δυνάμεων, η οποία, βάσει της Αρχής Διατηρήσεως της Ορμής, είναι ίση με τον ρυθμό της κινητικής ενέργειας ενός σώματος. Στην περίπτωση τώρα που οι συνοριακές συνθήκες θέσεως αντιστοιχούν σε ακλόνητα στηρίγματα, τότε έχουμε ότι,

$$\dot{K}^c = -P^c = 0 \quad (3.120)$$

¹⁵ Αγγλ. *upper bound Theorem of Limit Analysis*

και στην περίπτωση αυτή η ανισότητα (3.106) δίδει,

$$\dot{K}^* \leq 0$$

Με βάση αυτή την παρατήρηση θα βρούμε συχνά στην βιβλιογραφία την εξής ισοδύναμη διατύπωση του θεωρήματος του «άνω ορίου»: Ένα σώμα από ιδεατά πλαστικό υλικό, που υπακούει σε συντηρημένο νόμο πλαστικής ροής, δεν αστοχεί, εάν δεν υπάρχει ένα κινηματικός επιτρεπτό πεδίο ταχυτήτων, το οποίο να παράγει (θετική) κινητική ενέργεια.

3.4.2 Το θεώρημα "κάτω ορίου"

Για την απόδειξη του λεγόμενου «στατικού» θεωρήματος θεωρούμε ένα στατικώς επιτρεπτό πεδίο τάσεων, δηλαδή ένα σύνολο ισορροπίας $\{f_i, t_i^*, \sigma_{ij}^*\}$, που ικανοποιεί τις εξισώσεις ισορροπίας

$$\frac{\partial \sigma_{ij}^*}{\partial x_j} + f_j = 0 \text{ in } V \quad (3.121)$$

και δεν παραβιάζει την συνθήκη διαρροής

$$T^* = \sqrt{\frac{1}{2} s_{ij}^* s_{ji}^*} \leq \tau_Y \quad (3.122)$$

Παρατηρούμε ότι το αντίστοιχο πεδίο

$$\dot{\varepsilon}_{kk}^* = \dot{\varepsilon}_{kk}^* \quad , \quad \frac{\dot{\varepsilon}_{ij}^*}{\dot{g}^*} = \frac{s_{ij}^*}{2\tau_Y} \quad , \quad \dot{g}^* = \sqrt{2\dot{\varepsilon}_{ij}^* \dot{\varepsilon}_{ij}^*} \neq 0 \quad (3.123)$$

δεν είναι κατ' ανάγκη συμβατό με ένα πεδίο ταχυτήτων, δηλαδή δεν υπάρχει κατ' ανάγκη ένα πεδίο ταχυτήτων, το οποίο να έχει το $\dot{\varepsilon}_{ij}^* = \dot{\varepsilon}_{ij}^*$ ως αντίστοιχο πεδίο ρυθμού παραμορφώσεως.

Εφαρμόζουμε τώρα την Α.Δ.Ε. για το σύστημα $\{p_i^c, f_i, \sigma_{ij}^c \mid v_i^c, \dot{\varepsilon}_{ij}^c\}$

$$\int_V \sigma_{ij}^c \dot{\varepsilon}_{ij}^c dV + \tau_Y \sum_{(\alpha)} \int_{D^{(\alpha)}} [[v^c]] dS = \int_V f_i v_i^c dV + \int_{\partial V} t_i^c v_i^c dS \quad (3.124)$$

και για το σύστημα $\{p_i^*, f_i, \sigma_{ij}^* \mid v_i^c, \dot{\varepsilon}_{ij}^c\}$

$$\int_V \sigma_{ij}^* \dot{\varepsilon}_{ij}^c dV + \sum_{(\alpha)} \int_{D^{(\alpha)}} \tau^* [[v^c]] dS = \int_V f_i v_i^c dV + \int_{\partial V} t_i^* v_i^c dS \quad (3.125)$$

Αφαιρώντας τις παραπάνω εξισώσεις κατά μέλη παίρνουμε,

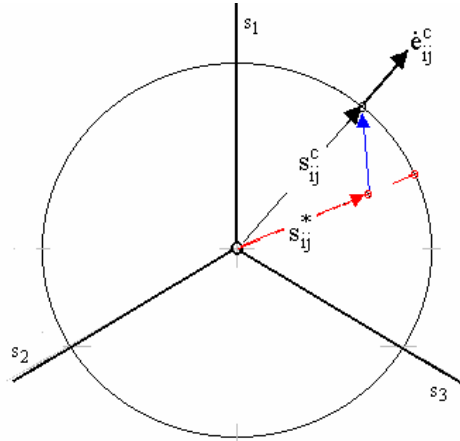
$$\int_V (\sigma_{ij}^c - \sigma_{ij}^*) \dot{\varepsilon}_{ij}^c dV + \sum_{(\alpha)} \int_{D^{(\alpha)}} (\tau_Y - \tau^*) [[v^c]] dS = \int_{\partial V_\sigma} (p_i^c - p_i^*) v_i^c dS + \int_{\partial V_v} (t_i^c - t_i^*) q_i dS \quad (3.126)$$

Αν τώρα υποθέσουμε πάλι ότι οι συνοριακές συνθήκες θέσεως αντιστοιχούν σε ακλόνητα στηρίγματα

$$v_i = q_i = 0 \text{ on } \partial V_v \quad (3.127)$$

τότε η εξ. (3.126) δίδει (Εικ. 3-17),

$$\int_V (\sigma_{ij}^c - \sigma_{ij}^*) \dot{\varepsilon}_{ij}^c dV + \sum_{(\alpha)} \int_{D^{(\alpha)}} (\tau_Y - \tau^*) [[v^c]] dS = \int_{\partial V_\sigma} (p_i^c - p_i^{s*}) v_i^c dS \quad (3.128)$$



Εικ. 3-17: Το έργο της διαφοράς πραγματικού και δοκιμαστικού πεδίου εντάσεως

Ορίζοντας τώρα ένα στατικό συντελεστή φορτίσεως,

$$\eta_s = \frac{p_i^c}{p_i^{s*}} > 0 \Rightarrow p_i^c = \eta_s p_i^{s*} \quad (3.129)$$

τότε από την εξ. (3.128) παίρνουμε,

$$\int_V (\sigma_{ij}^c - \sigma_{ij}^*) \dot{\varepsilon}_{ij}^c dV + \sum_{(\alpha)} \int_{D^{(\alpha)}} (\tau_Y - \tau^*) [[v^c]] dS = (\eta_s - 1) \int_{\partial V_\sigma} p_i^{s*} v_i^c dS \quad (3.130)$$

Παρατηρούμε τώρα ότι βάσει της ανισότητας Drucker, εξ. (2.74),

$$(\sigma_{ij}^c - \sigma_{ij}^*) \dot{\varepsilon}_{ij}^c \geq 0 \Rightarrow \int_V (\sigma_{ij}^c - \sigma_{ij}^*) \dot{\varepsilon}_{ij}^c dV \geq 0 \quad (3.131)$$

Επίσης όπως δείξαμε στο Κεφ. 1.6, εξ. (1.84), ισχύει η ανισότητα

$$0.87T \leq \tau_{\max} \leq T \quad (3.132)$$

που σημαίνει εν προκειμένω ότι,

$$\tau^* \leq |\tau^*| \leq \tau_{\max}^* \leq T^* \leq \tau_Y \Rightarrow \tau_Y - \tau^* \geq 0 \quad (3.133)$$

και

$$\int_{D^{(\alpha)}} (\tau_Y - \tau^*) [[v^c]] dS \geq 0$$

Άρα η εξ. (3.130) δίδει την ανισότητα

$$(\eta_s - 1) \int_{\partial V_\sigma} p_i^{s*} v_i^c dS \geq 0 \quad (3.134)$$

Με την παρατήρηση ότι:

$$\int_{\partial V_{\sigma}} p_i^{s*} v_i^c dS = \begin{cases} \leq 0 & \text{ενεργητική} \\ \geq 0 & \text{παθητική} \end{cases} \Rightarrow \eta_s = \begin{cases} \leq 1 & \text{ενεργητική} \\ \geq 1 & \text{παθητική} \end{cases} \quad (3.135)$$

Συμπεραίνουμε ότι στην περίπτωση μιας παθητικής (ενεργητικής) φορτίσεως τα φορτία p_i^{s*} συνιστούν ένα κάτω (άνω) φράγμα των πραγματικών φορτίων p_i^c , που προκαλούν πλαστική κατάρρευση.

Θεώρημα κάτω «ορίου» της Ο.Α.¹⁶

Μία στατικώς επιτρεπτή λύση σ_{ij}^* ,

$$T^* = \sqrt{\frac{1}{2} s_{ij}^* s_{ji}^*} \leq \tau_Y \quad (3.136)$$

που ικανοποιεί τις εξισώσεις ισορροπίας

$$\frac{\partial \sigma_{ij}^*}{\partial x_i} + f_j = 0 \quad \text{in } V \quad (3.137)$$

δίδει πάντοτε ένα κάτω φράγμα για το φορτίο καταρρεύσεως,

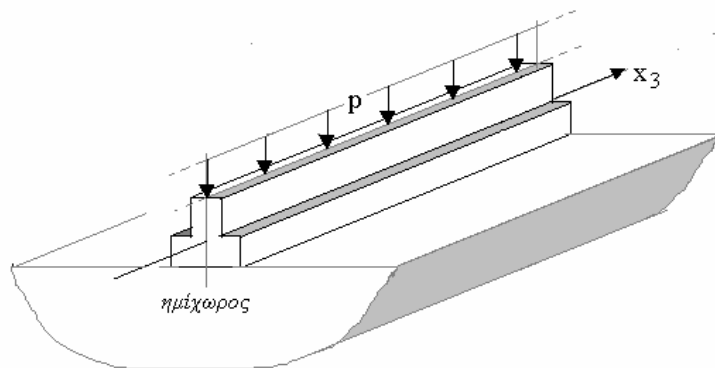
$$\text{on } \partial V_{\sigma} : p_i^{s*} = \sigma_{ki}^* n_k = \eta_s p_i^c, \eta_s \geq 1 \quad (3.138)$$

Άρα στην περίπτωση αυτή η εκτίμηση για το φορτίο καταρρεύσεως προκύπτει ως λύση ενός προβλήματος μεγιστοποίησης,

Μία ισοδύναμη διατύπωση του ίδιου θεωρήματος είναι η εξής: Ένα σώμα αποτελούμενο από ιδεατά πλαστικό υλικό που ικανοποιεί την ανισότητα του Drucker και που βρίσκεται κάτω από την δράση δεδομένων φορτίων δεν καταρρέει, αρκεί να βρεθεί ένα εντατικό πεδίο σ_{ij}^* , που ικανοποιεί τις εξισώσεις ισορροπίας και που δεν παραβιάζει τη συνθήκη διαρροής.

3.5 Επίπεδη Παραμόρφωση

3.5.1 Ορισμοί και το κριτήριο διαρροής



Εικ. 3-18: Πεδιλοδοκός ως ένα τυπικό παράδειγμα επιμήκους κατασκευής, όπου η υπόθεση της επίπεδης παραμορφώσεως θα γίνει για την μελέτη της φέρουσας ικανότητας του φορέα.

¹⁶ Αγγλ. lower bound Theorem of Limit Analysis

Θεωρούμε την περίπτωση ισόχωρης, επίπεδης παραμορφώσεως και επιλέγουμε τον άξονα x_3 κάθετο στο επίπεδο της παραμορφώσεως (Εικ. 3-18)

$$\dot{\varepsilon}_{33} = 0, \dot{\varepsilon}_{kk} = 0 \Rightarrow \dot{\varepsilon}_{33} = 0 \quad (3.139)$$

Από την καταστατική σχέση,

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{\dot{g}}{2\tau_Y} s_{ij}, \quad g = \sqrt{2\dot{\varepsilon}_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}} \quad (3.140)$$

έπεται ότι,

$$s_{33} = 0 \Rightarrow \sigma_{33} = \frac{1}{2}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) \quad (3.141)$$

Η εντατική κατάσταση στην περίπτωση αυτή δίδεται από τον πίνακα των τάσεων,

$$[\bar{\sigma}] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & (\sigma_{11} + \sigma_{22})/2 \end{bmatrix} \quad (3.142)$$

του οποίου ο αποκλίνων είναι

$$[\bar{s}] = \begin{bmatrix} (\sigma_{11} - \sigma_{22})/2 & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & -(\sigma_{11} - \sigma_{22})/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.143)$$

Η 2^η και 3^η αναλλοίωτος του αποκλίνοντος δίδονται γενικώς από τις σχέσεις:

$$J_{2s} = \frac{1}{6} \left((\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 \right) + \sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2$$

$$J_{3s} = \begin{vmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{vmatrix} \quad (3.144)$$

Στην περίπτωση ισόχωρης επίπεδης παραμορφώσεως τελικά παίρνουμε,

$$J_{2s} = \left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2} \right)^2 + \sigma_{12}^2 \quad (3.145)$$

$$J_{3s} = 0 \quad (3.146)$$

Λαμβάνοντας υπ' όψη ότι

$$\cos 3\alpha_{s0} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{J_{3s}}{J_{2s}^{3/2}}, \quad 0 \leq \alpha_{s0} \leq \pi/3 \quad (3.147)$$

παίρνουμε τις εξής λύσεις

$$\begin{aligned}\alpha_s^{(1)} &= \alpha_{s_0} = \frac{\pi}{6} \quad (1): 0 \leq \alpha_s \leq \pi/3 \quad (s_2 \leq s_3 \leq s_1) \\ \alpha_s^{(3)} &= \alpha_{s_0} + \frac{2\pi}{3} = \frac{5\pi}{6} \quad (3): 2\pi/3 \leq \alpha_s \leq \pi \quad (s_1 \leq s_2 \leq s_3) \\ \alpha_s^{(5)} &= \alpha_{s_0} + \frac{4\pi}{3} = \frac{3\pi}{2} \quad (5): 4\pi/3 \leq \alpha_s \leq 5\pi/3 \quad (s_3 \leq s_1 \leq s_2)\end{aligned} \quad (3.148)$$

Οι αντίστοιχες τιμές των παραμέτρων Lode και b είναι:

$$\begin{aligned}L_\sigma &= 2 \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{\sigma_2 - \sigma_1} - 1 = 2 \frac{\sin \alpha_{s_0}}{\sin(\pi/3 + \alpha_{s_0})} - 1 = 0, \quad (\sigma_2 \leq \sigma_3 \leq \sigma_1) \\ b &= \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{\sigma_2 - \sigma_1} = 1 - \frac{1}{2}(L_\sigma + 1) = 1 - \frac{\sin \alpha_{s_0}}{\sin(\pi/3 + \alpha_{s_0})} = \frac{1}{2}, \quad (\sigma_2 \leq \sigma_3 \leq \sigma_1)\end{aligned} \quad (3.149)$$

Τέλος σημειώνουμε ότι οι κύριες αποκλίνουσες τάσεις δίδονται από τις παρακάτω σχέσεις

$$\begin{aligned}s_1 &= \frac{2\sqrt{J_{2s}}}{\sqrt{3}} \cos(\alpha_{s_0}) = T \\ s_2 &= -\frac{2\sqrt{J_{2s}}}{\sqrt{3}} \cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha_{s_0}\right) = -T \\ s_3 &= -\frac{2\sqrt{J_{2s}}}{\sqrt{3}} \cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha_s\right) = 0\end{aligned} \quad (3.150)$$

Στην περίπτωση αυτή

$$T = \sqrt{J_{2s}} = \tau_{\max} \quad (3.151)$$

Γράφοντας το κριτήριο διαρροής κατά von Mises συναρτήσει της εντάσεως διατμητικής τάσεως

$$T = \sqrt{J_{2s}} = \tau_Y \quad (3.152)$$

διαπιστώνουμε ότι στη θεωρούμενη περίπτωση το κριτήριο αυτό ταυτίζεται με το κριτήριο μέγιστης διατμητικής τάσεως κατά Tresca,

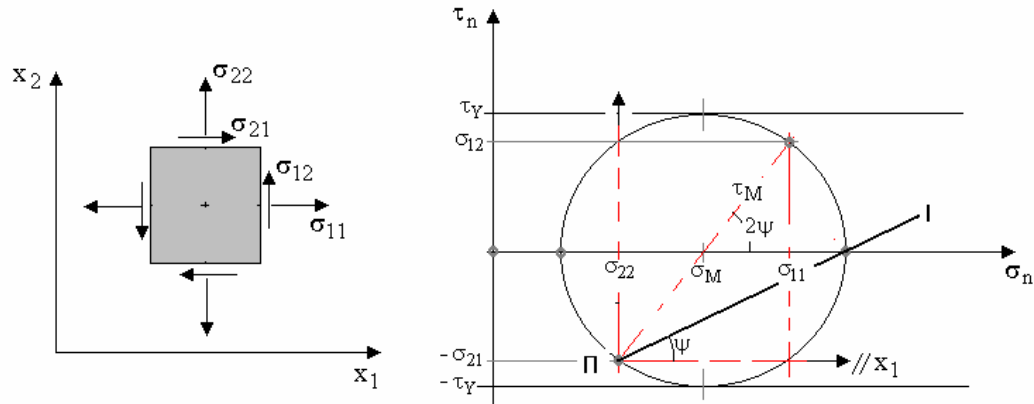
$$\sqrt{\left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\right)^2 + \sigma_{12}^2} = \tau_Y \quad (3.153)$$

Όπως φαίνεται στην Εικ. 3-19 η γεωμετρική παράσταση του κριτηρίου αυτού στο επίπεδο Mohr είναι ένας κύκλος με κέντρο τη μέση τάση,

$$\sigma_M = \frac{1}{2}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) \quad (3.154)$$

και ακτίνα την τάση διαρροής,

$$\tau_M = \tau_Y \quad (3.155)$$



Εικ. 3-19: Οριακός κύκλος Mohr των τάσεων σε επίπεδη παραμόρφωση για υλικό που ικανοποιεί το κριτήριο διαρροής κατά von Mises

Για το λόγο αυτό σε πολλές εφαρμογές κυρίως από την Γεωμηχανική θα δούμε ότι στην θέση της τάσης διαρροής τ_Y να χρησιμοποιείται η λεγόμενη «συνεκτικότητα» c του υλικού,

$$\tau_Y \equiv c \quad (3.156)$$

3.5.2 Άνω φράγμα φορτίου αστοχίας πεδילוδοκού

3.5.2.1 Μηχανισμός καταρρέυσεως εξ απολύτως στερεών σωμάτων

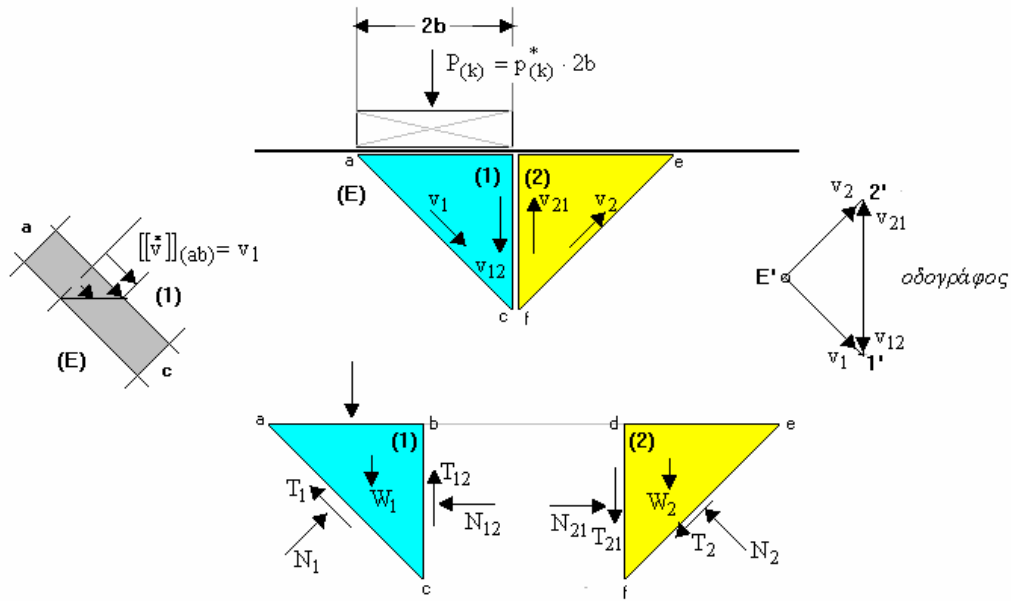
Θεωρούμε μια πεδילוδοκό πλάτους $2b$ που εδράζεται πάνω σε ένα ημίχωρο, ο οποίος αποτελείται από ιδεατά πλαστικό, απολύτως στερεό υλικό, που υπακούει στο νόμο διαρροής, εξ. (3.153). Π.χ. θεμέλιο επί κανονικώς στερεοποιημένης αργίλου, φορτιζόμενο αποτόμως, έτσι ώστε να εξασφαλίζονται αστράγγιστες συνθήκες. Στην περίπτωση αυτή η κρίσιμη τάση διαρροής ταυτίζεται με την «αστράγγιστη» συνεκτικότητα¹⁷ της αργίλου και ο νόμος διαρροής παίρνει την εξής μορφή

$$\sqrt{\left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\right)^2 + \sigma_{12}^2} = c_u \quad (3.157)$$

Η πεδילוδοκός εκτείνεται σε μεγάλο μήκος καθέτως προς το επίπεδο του σχήματος οπότε κάνουμε την υπόθεση επίπεδης παραμορφώσεως (Εικ. 3-18). Για την εκτίμηση του μέγιστου φορτίου με το οποίο μπορεί να φορτιστεί η δοκός θεωρούμε τον μηχανισμό καταρρέυσεως της Εικ. 3-20. Ο δοκιμαζόμενος μηχανισμός καταρρέυσεως είναι μια κινηματική αλυσίδα με ένα βαθμό ελευθερίας κινήσεως. Ο μηχανισμός αυτός αποτελείται από δύο απολύτως στερεά σώματα (1) και (2), τα οποία χωρίζονται μεταξύ τους και από τον περιβάλλοντα ημίχωρο (E) από επίπεδες επιφάνειες ασυνέχειας της ταχύτητας. Π.χ. κάθετα προς την επιφάνεια (ac), που διαχωρίζει το στερεό (1) από το έδαφος (E) εμφανίζεται μία σταθερή ασυνέχεια της ταχύτητας

$$[[v^*]]_{(ac)} = v_1 \quad (3.158)$$

¹⁷ Αγγλ. *undrained cohesion*



Εικ. 3-20: Μηχανισμός καταρρεύσεως εδάφους θεμελιώσεως αποτελούμενος από δύο απολύτως στερεά σώματα (1 και 2)

Με δεδομένη τη γεωμετρία του μηχανισμού καταρρεύσεως, παρατηρούμε ότι οι απόλυτες και σχετικές ταχύτητες των στερεών (1) και (2) συσχετίζονται μέσω του οδογράφου (ή διαγράμματος ταχυτήτων). Πράγματι αν τα σώματα (1) και (2) είναι ισοσκελή ορθογώνια πρίσματα, τότε,

$$v_1 = v_2 = v, \quad v_{12} = v_{21} = \sqrt{2}v \quad (3.159)$$

Το φορτίο καταρρεύσεως εκτιμάται βάσει του κινηματικού θεωρήματος από τη σχέση,

$$W^{*(ext)} = W^{*(diss)} \quad (3.160)$$

όπου $W^{*(ext)}$ είναι η ισχύς των εξωτερικών φορτίων

$$W^{*(ext)} = \int_V f_i v_i^* dV + \int_{\partial V_\sigma} p_i^* v_i^* dS \quad (3.161)$$

και $W^{*(diss)}$ είναι ο ρυθμός αναλίσκόμενης ενέργειας στο εσωτερικό του σώματος

$$W^{*(diss)} = c_u \left\{ \int_V \dot{g}^* dV + \sum_{(\alpha) D^{(\alpha)}} \int |[[v^*]]| dS \right\} \quad (3.162)$$

Επειδή τα στερεά σώματα (1) και (2) είναι ίσα¹⁸ και οι κατακόρυφες συνιστώσες των ταχυτήτων τους είναι αντίθετες, τα έργα των καθολικών δυνάμεων στην έκφραση για το $W^{*(ext)}$ αλληλοαναιρούνται,

$$\int_V f_i v_i^* dV = W_1 \frac{\sqrt{2}}{2} v_1 - W_2 \frac{\sqrt{2}}{2} v_2 = 0 \quad (3.163)$$

¹⁸ Όπως θα δούμε και σε Παρατήρηση στο τέλος της παραγράφου, αυτό σημαίνει ότι υποθέτουμε, ότι σε προβλήματα με οριζόντια επιφάνεια δυνάμεις βαρύτητας δεν επηρεάζουν το φορτίο καταρρεύσεως.

οπότε,

$$W^{*(ext)} = \int_{\partial V_\sigma} p_i^* v_i^* dS = p_{(k)}^* 2b \frac{\sqrt{2}}{2} v \quad (3.164)$$

Αντιστοίχως επειδή τα σώματα (1) και (2) είναι απολύτως στερεά ο πρώτος όρος στην έκφραση για το $W^{*(diss)}$, εξ. (3.162) είναι μηδέν,

$$\int_V \dot{g}^* dV = 0 \quad (3.165)$$

Για τον θεωρούμενο μηχανισμό έχουμε μόνο τη συνεισφορά του δεύτερου όρου της εξ. (3.162),

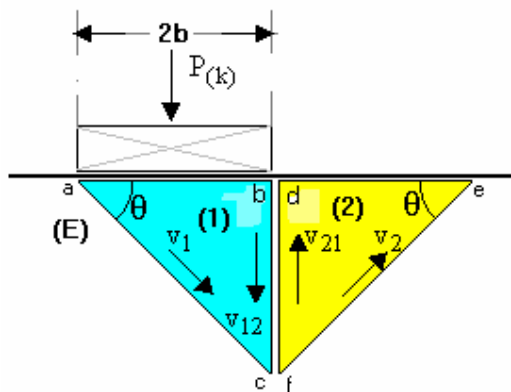
$$\begin{aligned} W^{*(diss)} &= c_u \sum_{(a) D_i^{(a)}} \int [[v^*]] dS \\ &= c_u \{ (ab)v_1 + (bc)v_{12} + (fe)v_2 \} \\ &= c_u (2b\sqrt{2} v + 2b\sqrt{2} v + 2b\sqrt{2} v) \\ &= c_u 2b3\sqrt{2}v \end{aligned} \quad (3.166)$$

Από την ενεργειακή εξ. (3.160) τελικά παίρνουμε την παρακάτω υπερεκτίμηση του φορτίου καταρρεύσεως,

$$p_{(k)}^* 2b \frac{\sqrt{2}}{2} v = c_u 2b3\sqrt{2}v \Rightarrow p_{(k)}^* = 6c_u \quad (3.167)$$

Άσκηση

Για το μηχανισμό της Εικ. 3-21 δεχόμαστε ότι τα σώματα (1) και (2) είναι ανισοσκελή ορθογώνια πρίσματα με, $\theta = \angle (bac) = \angle (def)$ να υπολογισθεί η βέλτιστη τιμή του φορτίου καταρρεύσεως της πεδύλοδοκού, $\bar{p}_{(k)}^* = \min p_{(k)}^*(\theta)$.

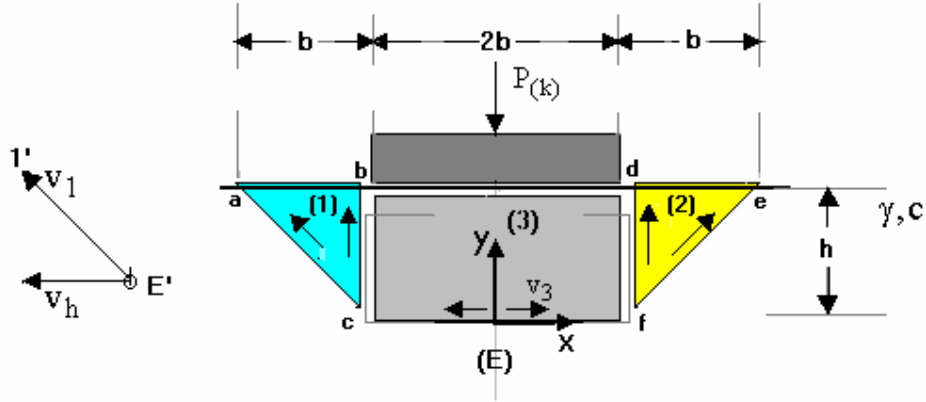


Εικ. 3-21: Μηχανισμός καταρρεύσεως αποτελούμενος από δύο ορθογώνια πρίσματα με ζητούμενη τη βέλτιστη γωνία θ

Λύση: $\bar{p}_{(k)}^* = 5.66c_u$, για $\theta_{opt} = 35.3^\circ$.

3.5.2.2 Μεικτός μηχανισμός καταρρεύσεως

Θεωρούμε το μεικτό μηχανισμό καταρρεύσεως της Εικ. 3-22, ο οποίος αποτελείται από τα δύο στερεά πρίσματα (1) και (2) και το παραμορφούμενο μεσαίο πρίσμα (3).



Εικ. 3-22: Μεικτός μηχανισμός καταρρεύσεως αποτελούμενος από δύο στερεά τριγωνικά πρίσματα (1) και (2) και ένα παραμορφούμενο ορθογώνιο πρίσμα (3)

Έστω $v_y = -v_0$ η κατακόρυφη ταχύτητα στο σύνορο $\partial V_\sigma \equiv (bd)$. Η ισχύς των εξωτερικών φορτίων είναι,

$$\int_{(bd)} p_{(k)}^* v_0 dS = p_{(k)}^* v_0 2b \quad (3.168)$$

Δεχόμεθα ότι το πρίσμα (3) υφίσταται μια ισόχωρη, ορθογωνική παραμόρφωση, έτσι ώστε η κατακόρυφη ταχύτητα στο σύνορο (cf) να είναι $v_y = 0$. Άρα ο ρυθμός παραμορφώσεως κατά y στο στερεό (3) είναι,

$$\dot{\epsilon}_{yy} = -\frac{v_0}{h} \quad (3.169)$$

Παρατηρούμε ότι οι ρυθμοί της παραμορφώσεως κατά τους άξονες x και y ικανοποιούν στο στερεό (3) το νόμο πλαστικής ροής, οπότε

$$\dot{\epsilon}_{xx} = -\dot{\epsilon}_{yy}$$

Ο μηχανισμός καταρρεύσεως έχει επιλεγεί με τέτοιο τρόπο, ώστε το συνολικό έργο των καθολικών δυνάμεων λόγω ιδίου βάρους να είναι μηδέν. Πράγματι, η οριζόντια μετατόπιση στις επιφάνειες (bc) και (df) είναι συνεχής και σταθερή,

$$v_h = \dot{\epsilon}_{xx} b = \frac{b}{h} v_0 \quad (3.170)$$

ενώ η κατακόρυφη συνιστώσα της ταχύτητας κατά μήκος των επιφανειών (bc) και (df) είναι ασυνεχής

$$v_{13} = v_{23} = v_h \quad (3.171)$$

οπότε το άλμα της ταχύτητας κατά μήκος των επιφανειών (ca) και (fe) είναι,

$$v_1 = v_2 = \sqrt{2}v_h \quad (3.172)$$

Έστω γ το ειδικό βάρος του υλικού. Με τις παραπάνω κινηματικές προϋποθέσεις το έργο των καθολικών φορτίων είναι μηδέν. Άρα

$$\begin{aligned} \int_V f_i v_i^* dV &= \int_{V_1} f_i v_i^* dV + \int_{V_2} f_i v_i^* dV + \int_{V_3} f_i v_i^* dV \\ &= -\frac{1}{2} \gamma h^2 \frac{\sqrt{2}}{2} v_1 - \frac{1}{2} \gamma h^2 \frac{\sqrt{2}}{2} v_2 + 2\gamma b h \frac{1}{2} v_0 \\ &= -\frac{1}{2} \gamma h b \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{2} \frac{b}{h} v_0 - \frac{1}{2} \gamma h b \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{2} \frac{b}{h} v_0 + 2\gamma b h \frac{1}{2} v_0 \\ &= \gamma (-b^2 + bh) v_0 = 0 \Rightarrow b = h \end{aligned} \quad (3.173)$$

και

$$W^{*(ext)} = p_{(k)}^* v_0 2b \quad (3.174)$$

Για τον υπολογισμό της καταναλώσεως μηχανικού έργου λαμβάνουμε υπ' όψιν ότι η ένταση του ρυθμού (πλαστικής) διαμητικής παραμορφώσεως στο στερεό (3) είναι,

$$\dot{g} = 2 \sqrt{\frac{1}{6} \left\{ (\dot{\epsilon}_{xx} - \dot{\epsilon}_{yy})^2 + \dot{\epsilon}_{xx}^2 + \dot{\epsilon}_{yy}^2 \right\}} = 2 \left| \dot{\epsilon}_{yy} \right|, \quad \dot{\epsilon}_{xx} = -\dot{\epsilon}_{yy} \quad (3.175)$$

Άρα,

$$\int_{(V_3)} \dot{g}^* dV = 2 \left| \frac{v_0}{h} \right| (2b \cdot h) = 4bv_0$$

Παρατηρούμε τέλος ότι το άλμα της ταχύτητας v_x κατά μήκος της (cf) είναι γραμμικά μεταβαλλόμενο,

$$[[v]]_{(cf)} = v_3 = \frac{x}{b} v_h \quad (3.176)$$

οπότε,

$$\begin{aligned} \sum_{(\alpha)} \int_{D^{(\alpha)}} [[v^*]] dS &= 2 \left((ac)v_1 + (bc)v_{13} + \int_0^x \frac{x}{b} v_h \right) \\ &= 2 \left(h\sqrt{2}\sqrt{2}v_h + hv_h + \frac{b^2}{2b}v_h \right) \\ &= 2 \left(3\frac{h}{b} + \frac{1}{2} \right) bv_0 \end{aligned}$$

και,

$$W^{*(diss)} = c_u \left(2 \left(3\frac{h}{b} + \frac{1}{2} \right) + 4 \right) bv_0 \quad (3.177)$$

Άρα,

$$W^{*(ext)} = W^{*(diss)} \Rightarrow P_{(k)}^* = \left(\left(3 \frac{h}{b} + \frac{1}{2} \right) + 2 \right) c_u \quad (3.178)$$

Για $h = b$, από την εξίσωση των ισχύων τελικά παίρνουμε την εκτίμηση,

$$P_{(k)}^* = 5.5c_u \quad (3.179)$$

Παρατήρηση

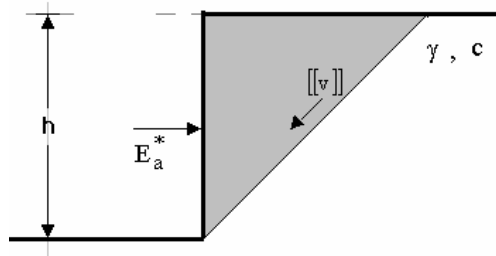
Στους μηχανισμούς καταρρέυσεως που δοκιμάσαμε πιο πάνω δεχθήκαμε ότι τα έργα από το ίδιο βάρος των διαφόρων σωμάτων αλληλοαναιρούνται, οπότε έτσι εξασφαλίζεται ότι το εκτιμώμενο φορτίο καταρρέυσεως P^* δεν εξαρτάται από το ειδικό βάρος του υλικού, $\gamma = \rho g$, όπου ρ η πυκνότητα του υλικού και g η επιτάχυνση της βαρύτητας. Δηλαδή στην περίπτωση οριζόντιας ελεύθερης επιφάνειας δεχθήκαμε ότι το φορτίο καταρρέυσεως είναι μόνο συνάρτηση της συνεκτικότητας και της διαστάσεως της φορτιζομένης επιφάνειας, $P^* = f(b, c_u)$. Μετά από διαστοσιολογική ανάλυση της σχέσεως αυτής παίρνουμε ότι η λύση δίδεται στην βάση ενός αδιάστατου αριθμού φέρουσας ικανότητας του "θεμελίου",

$$N^* = \frac{P^*}{c_u 2b} \quad (3.180)$$

Ένα άνω φράγμα για τον πραγματικό αριθμός φέρουσας ικανότητας N_c εκτιμήθηκε πιο πάνω κάνοντας χρήση του θεωρήματος άνω ορίου ως

$$N_c < N_{(k)}^* = 5.5 \quad (3.181)$$

Η παραπάνω υπόθεση ότι το φορτίο καταρρέυσεως δεν εξαρτάται από την βαρύτητα δεν είναι ορθή αν θεωρήσουμε για παράδειγμα το πρόβλημα υπολογισμού της ενεργητικής υποστηρίξεως, που απαιτείται για να μην επέλθει κατάρρευση ενός κατακόρυφου αναβαθμού (Εικ. 3-23).



Εικ. 3-23: Μηχανισμός καταρρέυσεως κατακόρυφου αναβαθμού

Όπως είναι γνωστό τέτοιοι αναβαθμοί καταρρέουν από ένα συγκεκριμένο κρίσιμο ύψος h_c και πάνω. Για παράδειγμα ο απλός μηχανισμός καταρρέυσεως της Εικ. 3-23 δίδει την εκτίμηση¹⁹,

¹⁹ Για κυκλική επιφάνεια "αστοχίας" (μηχανισμός *Fellenius*) παίρνουμε μία ασφαλέστερη εκτίμηση $n^* = 1.72$

$$\frac{E_a^*}{ch} = \frac{1}{2} \frac{\gamma h}{c} - n^*, \quad n^* = 2 \quad (3.182)$$

οπότε το κρίσιμο ύψος που εκτιμάται από τη συνθήκη $E_a^* = 0$, προκύπτει

$$h_c < 2n^* \frac{c}{\gamma} \Rightarrow n^* > n_c = \frac{\gamma h_c}{2c} \quad (3.183)$$

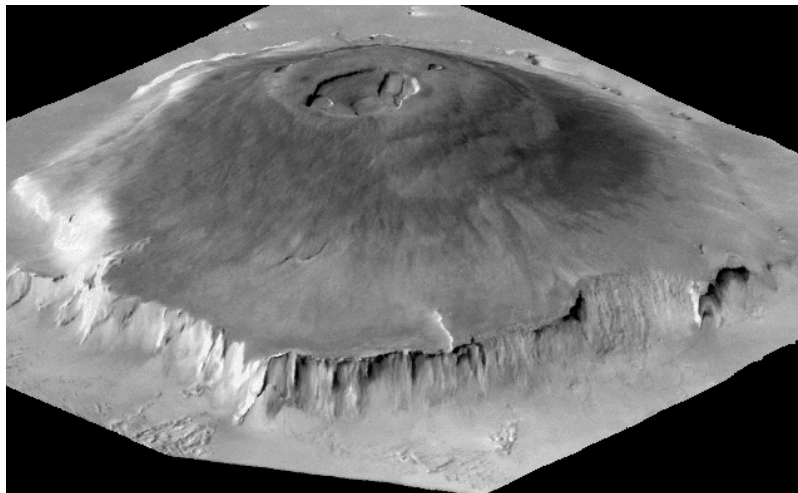
Για παράδειγμα αναφέρουμε ότι η αβυσσαλέα τάφρος των νήσων Mariana στον Α. Ειρηνικό Ωκεανό έχει βάθος $h \approx h_c = 11.034 \text{ km}$ ενώ η υψηλότερη κορυφή όρους πάνω από την επιφάνεια της θάλασσας είναι εκείνη του Everest των Ιμαλαΐων στα 8.848 km . Αντιστοίχως το υψηλότερο όρος στον πλανήτη Άρη, το όρος Όλυμπος έχει ύψος 24 km , ενώ η επιφανειακή βαρύτητα είναι 3.71 m/s^2 . Αν δεχθούμε ένα μέσο ειδικό βάρος των πετρωμάτων εν ξηρώ $\gamma \approx 25 \text{ kN/m}^3$ και υπό άνωση $\gamma' \approx 15 \text{ kN/m}^3$, τότε, όπως φαίνεται από τον παρακάτω πίνακα, η παρούσα θεωρία δίδει συγκρίσιμες τιμές για την γεωστατική παράμετρο αντοχής

$$c \approx \frac{\gamma' h}{2n_c} \quad (3.184)$$

Ο Πίνακας 3-1 αποδίδει μία επαλήθευση της εξ. (3.184). Οι τιμές που προκύπτουν για την συνεκτικότητα των πετρωμάτων στην επιφάνεια της Γης και του Άρη αυτές αντιστοιχούν μεταξύ τους και χαρακτηρίζουν πράγματι τα χαμηλής αντοχής πετρώματα της ανώτερης λιθόσφαιρας των δύο πλανητών.

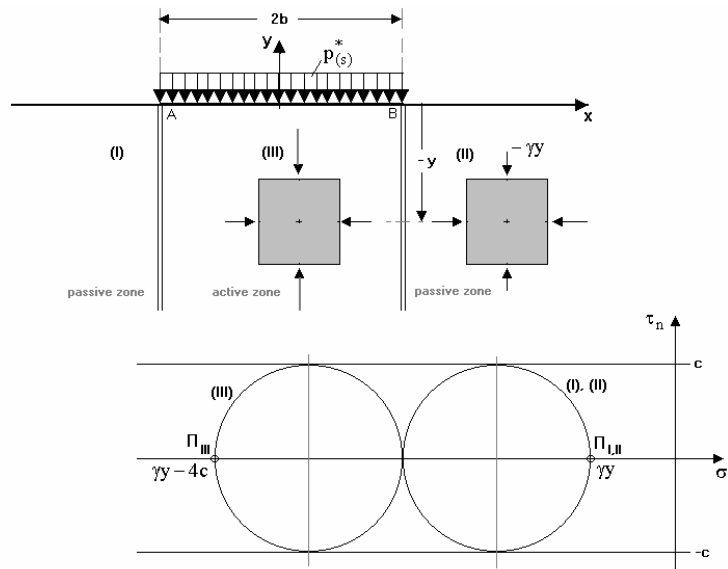
Πίνακας 3-1: Εκτίμηση αντοχής πετρωμάτων επιφανείας

| | | g | γ | γ' | hc | c* |
|--------------------|------|------------------|-------------------|-------------------|-------|------|
| | | m/s ² | kN/m ³ | kN/m ³ | km | MPa |
| Όρος Έβερεστ | Γη | 9.81 | 25.00 | 25.00 | 8.85 | 55.3 |
| Τάφρος Ν. Μαριάννα | Γη | 9.81 | 25.00 | 15.00 | 11.03 | 41.4 |
| Όρος Όλυμπος | Άρης | 3.71 | 9.45 | 9.45 | 24.00 | 56.7 |



Εικ. 3-24: Όρος Όλυμπος στον πλανήτη Άρη

3.5.3 Κάτω φράγμα φορτίου αστοχίας πεδילוδοκού



Εικ. 3-25: Στατικώς επιτρεπτό πεδίο εντάσεως για την εκτίμηση του οριακού φορτίου πεδילוδοκού που εδράζεται πάνω σε ημίχωρο από ιδεατά πλαστικό, συνεκτικό υλικό

Για την εύρεση ενός κάτω φράγματος του φορτίου αστοχίας πεδילוδοκού που εδράζεται πάνω σε ένα ιδεατά πλαστικό υλικό, συνεκτικό υλικό και κατ' εφαρμογή του αντίστοιχου θεωρήματος κατασκευάζουμε ένα στατικώς επιτρεπτό εντατικό πεδίο ως εξής (Εικ. 3-25: Στατικώς επιτρεπτό πεδίο εντάσεως για την εκτίμηση του οριακού φορτίου πεδילוδοκού που εδράζεται πάνω σε ημίχωρο από ιδεατά πλαστικό, συνεκτικό υλικό): Η γεωστατική κατακόρυφη συνιστώσα της τάσεως αυξάνεται γραμμικά με το βάθος²⁰,

$$\sigma_{yy}^{(st)} = \gamma y \quad , \quad y \leq 0 \tag{3.185}$$

Δεχόμεθα ότι η αρχική εντατική κατάσταση προσεγγίζεται στο όριο ενός ασυμπίεστου ελαστο-πλαστικού υλικού με λόγο Poisson $\nu = 0.5$, οπότε η οριζόντια γεωστατική τάση είναι ίση με την κατακόρυφη συνιστώσα

$$\sigma_{xx}^{(st)} = K_0 \sigma_{yy}^{(st)} = \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_{yy}^{(st)} \Rightarrow \sigma_{xx}^{(st)} = \sigma_{yy}^{(st)} \tag{3.186}$$

Άρα η εντατική κατάσταση πριν τη φόρτιση του ημίχωρου είναι παντού ισότροπη

$$\left[\bar{\sigma}^{(st)} \right] = \begin{bmatrix} \gamma y & 0 & 0 \\ 0 & \gamma y & 0 \\ 0 & 0 & \gamma y \end{bmatrix} \tag{3.187}$$

Δεχόμεθα τώρα ότι το δοκιμαζόμενο επιτρεπτό πεδίο τάσεων αποτελεί μία υπέρθεση του ως άνω γεωστατικού πεδίου και ενός πεδίου, το οποίο είναι τμηματικά συνεχές. Το εντατικό πεδίο αυτό χαρακτηρίζεται από δύο κατακόρυφες επιφάνειες ασυνεχείας, οι οποίες αρχίζουν από τα άκρα Α και Β του 'θεμελίου'. Οι επιφάνειες αυτές χωρίζουν τον ημίχωρο σε τρεις περιοχές: (I), (II) εκατέρωθεν και (III) κάτω από το 'θεμέλιο'.

²⁰ Ο άξονας y θετικός προς τα πάνω.

Συμφώνως προς τους αντίστοιχους κύκλους Mohr η εντατική κατάσταση στα χωρία (I) και (II) δίδεται από τον πίνακα των τάσεων

$$[\bar{\sigma}_p^*] = \begin{bmatrix} \gamma y - 2c & 0 & 0 \\ 0 & \gamma y & 0 \\ 0 & 0 & \gamma y - c \end{bmatrix} \quad (3.188)$$

ενώ στο χωρίο (III) από τον πίνακα,

$$[\bar{\sigma}_a^*] = \begin{bmatrix} \gamma y - 2c & 0 & 0 \\ 0 & \gamma y - 4c & 0 \\ 0 & 0 & \gamma y - 2c \end{bmatrix} \quad (3.189)$$

Από τη συνοριακή συνθήκη,

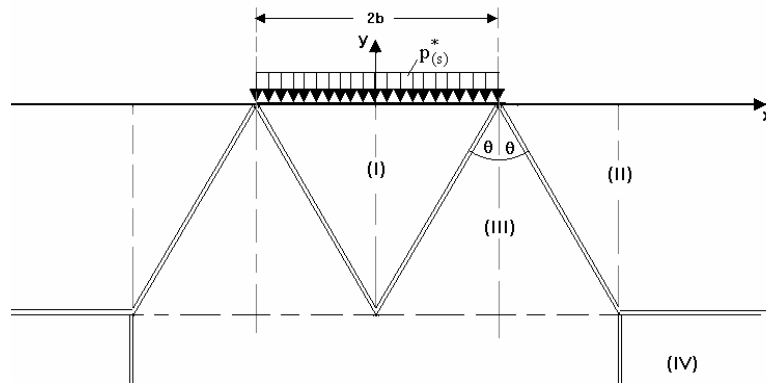
$$\sigma_{yy}^*(x, 0) = \begin{cases} 0 & \text{if } |x| > b \\ -p_{(s)}^* & \text{if } |x| < b \end{cases} \quad (3.190)$$

έπεται το εξής κάτω φράγμα για το φορτίο καταρρέυσεως,

$$p_{(s)}^* = 4c \quad (3.191)$$

Άσκηση

Να εκτιμηθεί το φορτίο καταρρέυσεως του θεμελίου για αβαρές υλικό ($\gamma = 0$) για την εικονιζόμενη διάταξη στατικών ασυνεχειών.



Λύση: $\bar{p}_{(s)}^* = 4.83 c$, για $\theta_{opt} = 22.5^\circ$.

Παρατήρηση

Οι Drucker & Chen²¹ παρουσίασαν μία πιο πολύπλοκη στατική λύση με την μέθοδο των στατικών ασυνεχειών, η οποία ανεβάζει το κάτω όριο στην τιμή $5c$. Άρα το πραγματικό φορτίο καταρρέυσεως βρίσκεται στο διάστημα $5c < p_c < 5.5c$. Τέλος, αναφέρουμε εδώ ότι όπως θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο η πραγματική λύση βρίσκεται πράγματι σ' αυτό το διάστημα, αφού η οριακή τιμή για το φορτίο καταρρέυσεως είναι, $p_c = (2 + \pi) \approx 5.14c$.

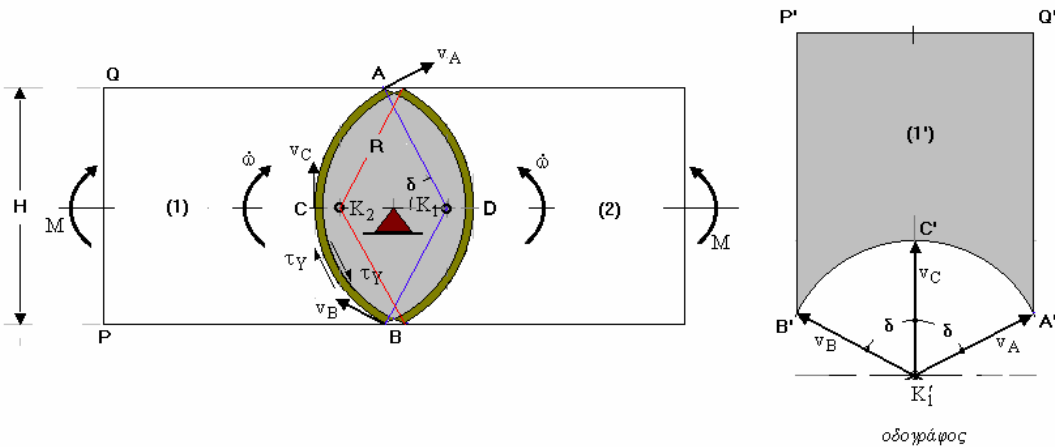
²¹ D.C. Drucker and W.F. Chen, *Engineering Plasticity*, C.U.P., 1968

3.6 Προβλήματα

3.6.1 Ροπή καταρρεύσεως δοκού σε καθαρή κάμψη

Θεωρούμε το παράδειγμα μίας δοκού πάχους H και πλάτους B από απολύτως στερεό-ιδεατά πλαστικό υλικό κάτω από την επίδραση ενός καθαρά καμπτικού φορτίου M . Για την εκτίμηση της ροπής καταρρεύσεως της δοκού θα κάνουμε χρήση των θεωρημάτων άνω και κάτω ορίου.

3.6.1.1 Άνω φράγμα



Εικ. 3-26: Δημιουργία κινηματικής αρθρώσεως σε δοκό υπό καθαρή κάμψη

Θεωρούμε τη δημιουργία μιας *κινηματικής αρθρώσεως*, η οποία συνίσταται από το κεντρικό στερεό ($ACBDA$) και τα πλευρικά στερεά (1) και (2), Εικ. 3-26. Το κεντρικό στερεό είναι ακίνητο ενώ τα πλευρικά περιστρέφονται περί τα κέντρα K_1 και K_2

αντιστοίχως με γωνιακή ταχύτητα $\dot{\omega}$. Με άλλα λόγια το στερεό (1) ολισθαίνει κατά μήκος του κυκλικού τόξου (ACB) και το στερεό (2) κατά μήκος του κυκλικού τόξου (ADB). Όπως φαίνεται και από τον οδογράφο για το στερεό (1), ο μηχανισμός καταρρεύσεως είναι κινηματικώς δυνατός. Η κινηματική άρθρωση καθορίζεται επί πλέον και από την ακτίνα R των κυκλικών τόξων και από την επίκεντρο γωνία των τόξων 2δ . Η ροπή καταρρεύσεως εκτιμάται από την 'ενεργειακή' εξίσωση,

$$W^{*(ext)} = W^{*(diss)} \tag{3.192}$$

Για μία 'δυνατή' στροφή του θεωρούμενου μηχανισμού, η συνολική αναλίσκόμενη ενέργεια ανά μονάδα χρόνου υπολογίζεται ως,

$$W^{*(diss)} = 2\tau_y B(\dot{\omega} R)(2R\delta) \tag{3.193}$$

Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι,

$$R = \frac{H}{2 \sin \delta} \tag{3.194}$$

παίρνουμε

$$W^{*(diss)} = \tau_y B H^2 \frac{\delta}{\sin^2 \delta} \dot{\omega} \tag{3.195}$$

Η συνολική ισχύς των εξωτερικών φορτίων είναι αντιστοίχως

$$W^{*(ext)} = 2M_{(k)}^* \dot{\omega} \quad (3.196)$$

Άρα, η εκτίμηση για τη ροπή καταρρεύσεως μέσω του παραπάνω μηχανισμού είναι συνάρτηση της επίκεντρης γωνίας των τόξων αστοχίας,

$$M_{(k)}^* = \frac{1}{2} \tau_Y B H^2 \frac{\delta}{\sin^2 \delta} \quad (3.197)$$

Η βέλτιστη τιμή προκύπτει για την τιμή της γωνίας α που ικανοποιεί την σχέση,

$$\frac{dM_{(k)}^*}{d\delta} = 0 \Rightarrow \delta - \frac{1}{2} \tan \delta = 0 \Rightarrow \delta = 66.78^\circ \quad (3.198)$$

Άρα,

$$M_{(k)}^* = 0.69 \cdot \tau_Y B H^2 \quad (3.199)$$

3.6.1.2 Κάτω φράγμα



Εικ. 3-27: Στατικώς επιτρεπτή λύση δοκού υπό καθαρή κάμψη

Ένα κάτω φράγμα για την ροπή καταρρεύσεως προκύπτει από τη γνωστή στοιχειώδη κατασκευή, όπου δεχόμαστε μια ασυνέχεια της εντατικής καταστάσεως κατά μήκος του άξονα της δοκού (Εικ. 3-27). Στο πάνω ήμισυ της διατομής οι ίνες θλίβονται ενώ στο κάτω ήμισυ αυτής εφελκύνονται. Η τάση ισούται με την τάση διαρροής σε εφελκυσμό σ_Y , που σε όλκιμα υλικά ταυτίζεται με εκείνη σε θλίψη. Από την κατανομή των ορθών τάσεων σ_{xx} πάνω στη διατομή προκύπτει η ροπή καταρρεύσεως

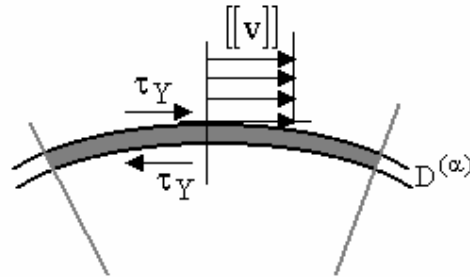
$$M_{(s)}^* = \frac{1}{4} \sigma_Y B H^2 \quad (3.200)$$

Για να συγκρίνουμε τη λύση αυτή με εκείνη που προέκυψε από τον κινηματικό μηχανισμό, παρατηρούμε τα εξής: Όπως αποδείξαμε στο Κεφ. 3.3.2, εξ. (3.71) για μηχανισμούς καταρρεύσεως αποτελούμενους από απολύτως στερεά σώματα που ολισθαίνουν σχετικά το ένα ως προς το γειτονικό του πάνω σε επιφάνειες ασυνέχειας της ταχύτητας έχουμε ότι (Εικ. 3-28)

$$W^{(diss)} = \tau_Y \sum_{(\alpha)} \int_{D^{(\alpha)}} [[v]] dS \quad (3.201)$$

όπου η διατμητική τάση τ_Y ταυτίζεται με την οριακή ένταση διατμητικής τάσεως,

$$\tau_Y = T = \sqrt{\frac{1}{2} s_{ij}^c s_{ji}^c} \quad (3.202)$$



Εικ. 3-28: Μηχανισμός καταρρέυσεως αποτελούμενος από στερεά σώματα, χωριζόμενα από μία λεπτή ζώνη ολισθήσεως

Στην περίπτωση απλού εφελκυσμού ή θλίψεως αντιστοίχως διακρίνουμε ανάμεσα σε:

α) επίπεδη ένταση (ε.ε.)

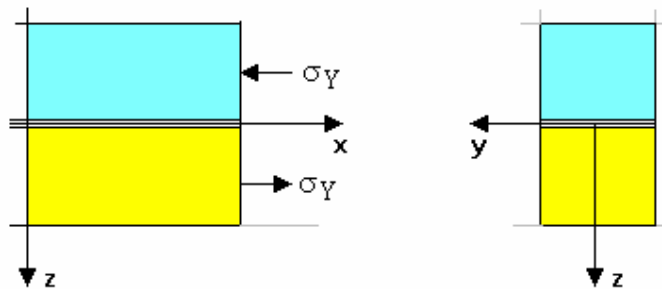
$$T = \sqrt{\frac{1}{6}(\sigma_{xx}^2 + \sigma_{xx}^2)} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sigma_Y \quad (3.203)$$

β) επίπεδη παραμόρφωση (ε.π.)

$$T = \sqrt{\frac{1}{6}\left((\sigma_{xx} - 0)^2 + \left(0 - \frac{1}{2}\sigma_{xx}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\sigma_{xx} - \sigma_{xx}\right)^2\right)} = \frac{1}{2} \sigma_Y \quad (3.204)$$

Άρα (Εικ. 3-29),

$$\tau_Y = \begin{cases} \sigma_Y / \sqrt{3} : (\text{ε.ε.}) \\ \sigma_Y / 2 : (\text{ε.π.}) \end{cases} \quad (3.205)$$



Εικ. 3-29: Κατανομή των τάσεων καθ' ύψος της διατομής, με $\sigma_{xx} = \pm \sigma_Y$

Αυτό σημαίνει ότι η ροπή καταρρέυσεως μιας δοκού ορθογωνικής διατομής φράσσεται ως εξής,

$$0.25 < \frac{M_c}{BH^2 \sigma_Y} < \begin{cases} 0.398 & (\text{ε.ε.}) \\ 0.345 & (\text{ε.π.}) \end{cases} \quad (3.206)$$

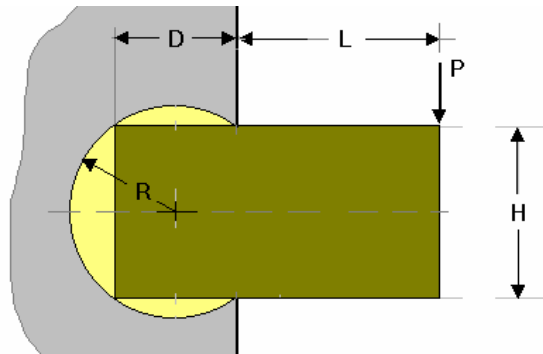
Σε ένα συμβατικό έλεγχο μίας κατασκευής έναντι κινδύνου αστοχίας κάτω από δεδομένο καμπτικό φορτίο M από την παραπάνω ανισότητα παίρνουμε ότι το ύψος της δοκού δεν θα πρέπει να είναι μικρότερο εκείνου που δίνει η στατική λύση,

$$H_{απ} \geq H_{(s)} = 2\sqrt{\frac{M}{B\sigma_Y}} \quad (3.207)$$

Αντίθετα, ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να διαστασιολογήσουμε ένα στοιχείο, το οποίο για κάποιο καθορισμένο καμπτικό φορτίο M θέλουμε σίγουρα να αστοχήσει. Το στοιχείο αυτό θα μπορούσε να ήταν π.χ. ένας μεταλλικός σύνδεσμος σε ένα έργο αναστηλώσεως. Τότε από την παραπάνω ανισότητα (π.χ. στην περίπτωση ε.ε.) παίρνουμε ότι η απάντηση στο ερώτημά μας δίδεται από την κινηματική λύση,

$$H_{απ} = H_{(k)} = 1.58\sqrt{\frac{M}{B\sigma_Y}} \quad (3.208)$$

Άσκηση



Εικ. 3-30: Δημιουργία κινηματικής αρθρώσεως στην πάκτωση απολύτως στερεού προβόλου, πακτωμένου σε ιδεατά πλαστικό, απολύτως στερεό όλκιμο υλικό

Για τον απολύτως στερεό πρόβολο και τον μηχανισμό του σχήματος (Εικ. 3-30 με $B \gg H$) να υπολογισθεί η ροπή καταρρεύσεως $M_{(k)}^* = P_{(k)}^* L$ λόγω αστοχίας της πακτώσεως και να βρεθεί η σχέση

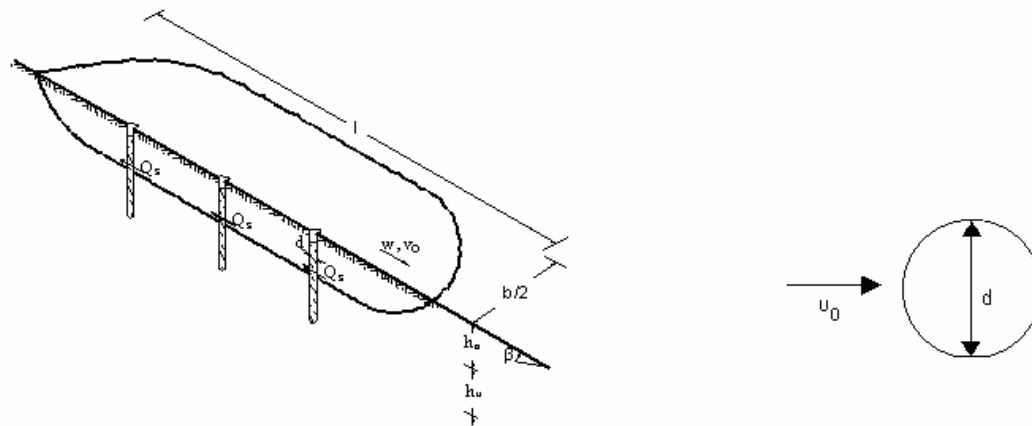
$$m^* = \frac{M_{(k)}^*}{2cLH} = \frac{P_{(k)}^*}{2cH} = f\left(\frac{L}{D}, \frac{H}{L}\right)$$

όπου

$$\tau_Y = \frac{1}{2}\sigma_Y = c$$

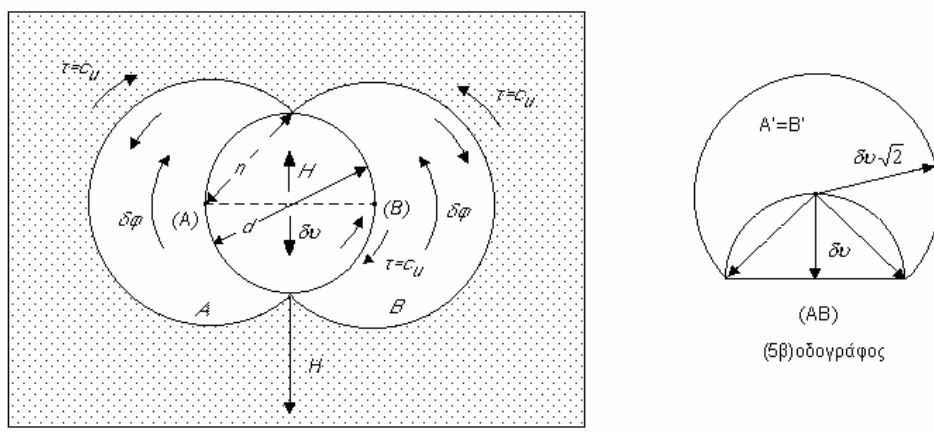
είναι η αντοχή σε διάτμηση του υλικού θεμελιώσεως του προβόλου. Το αποτέλεσμα να παρασταθεί υπό μορφή νομογραφήματος.

3.6.2 Οριακή ώθηση συνεκτικού εδαφικού υλικού επί πασσάλου



Εικ. 3-31: Ήλωση κατολισθαίνοντος πρανούς με κατακόρυφους πάσσαλους καταπονούμενος από την περιρροή του εδαφικού υλικού

Για την εκτίμηση της οριακής ώθησης συνεκτικού εδάφους επί πασσάλου, εξετάζεται το ισοδύναμο πρόβλημα της κίνησης πασσάλου υπό σταθερή ταχύτητα εντός άπειρου χώρου, που καταλαμβάνεται από συνεκτικό έδαφος (Εικ. 3-31). Το συνεκτικό εδαφικό υλικό θεωρείται ιδεατά πλαστικό με αστράγγιστη διατμητική αντοχή με c_u της κανονικά στερεοποιημένης αργίλου με αμελητέα μεταβολή στο βάθος. Το εδαφικό υλικό ακολουθεί νόμο καθετότητας πλαστικής ροής και παραμορφώνεται υπό σταθερό όγκο. Η οριακή ώθηση συνεκτικού εδαφικού υλικού επί πασσάλου, προκύπτει με εφαρμογή των θεωρημάτων της Ο.Α.. Η εφαρμογή του θεωρήματος του άνω ορίου, προϋποθέτει την εύρεση ενός κινηματικά αποδεκτού μηχανισμού αστοχίας, που πληροί το κριτήριο αστοχίας, αλλά δεν ικανοποιεί κατ' ανάγκη τις εξισώσεις ισορροπίας. Ένας κινηματικά αποδεκτός μηχανισμός αστοχίας, που αποτελείται από δύο κυκλικά τόξα, και ο αντίστοιχος οδογράφος απεικονίζονται στην Εικ. 3-32.



(5α) Κινηματικός μηχανισμός

Εικ. 3-32: Κινηματικός μηχανισμός περιρροής κυκλικού πασσάλου

Εύκολα αποδεικνύεται ότι ο μηχανισμός αυτός γίνεται κρίσιμος όταν τα κέντρα των δύο κύκλων (A) και (B) κινούνται πάνω στην περίμετρο του πασσάλου. Για τον προσδιορισμό του οριακού φορτίου καταστρώνεται η εξίσωση ενεργειακής ισορροπίας

$$W^{*(ext)} = W^{*(diss)} \quad (3.209)$$

όπου

$$W^{*(ext)} = p^* v$$

και

$$W^{*(diss)} = c_u \left(2 \frac{3}{4} \pi d \sqrt{2} \sqrt{2} v + \pi d v \right) \quad (3.210)$$

Άρα

$$p_k^* = 4\pi c_u d \approx 12.56 c_u d \quad (3.211)$$

Η εφαρμογή του θεωρήματος του κάτω ορίου δίδει την παρακάτω έκφραση για την ώθηση συνεκτικού υλικού επί πασσάλου²²

$$p_s^* = (6 + \pi) c_u d \approx 9.14 c_u d \quad (3.212)$$

Συνεπώς το μέγεθος οριακής ώθησης συνεκτικού έδαφος επί πασσάλου κείται μεταξύ των εξής ορίων:

$$9.14 < \frac{p_c}{c_u d} < 12.56 \quad (3.213)$$

²² Randolph, M. F., and Houlsby, G. T. (1984). The limiting pressure on a circular pile loaded laterally in cohesive soil. *Géotechnique*, 34, No 4, 613-623.