

2 ΙΔΕΑΤΗ ΠΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑ¹

| | | |
|-------|---|----|
| 2 | ΙΔΕΑΤΗ ΠΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑ | 47 |
| 2.1 | Χρονικώς Ανεξάρτητη Συμπεριφορά | 49 |
| 2.2 | Ελαστο-πλαστικός Διαχωρισμός της Τροπής | 50 |
| 2.3 | Ιδεατά Πλαστικά Υλικά | 53 |
| 2.4 | Οι Εξισώσεις Prandtl - Reuss | 59 |
| 2.5 | Συνθήκη Καθετότητας και Κυρτότητα της Επιφάνειας Διαρροής | 62 |
| 2.6 | Τεχνική Θεωρία Πλαστικότητας Ραβδωτών Φορέων | 63 |
| 2.6.1 | Ελαστοπλαστική κάμψη | 63 |
| 2.6.2 | Ελαστοπλαστική στρέψη | 65 |
| 2.6.3 | Επιφάνειες διαρροής και καταρρεύσεως κυκλικής διατομής | 66 |

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται οι βασικές έννοιες και ορισμοί που διέπουν την μαθηματική θεμελίωση της θεωρίας «Ιδεατής Πλαστικότητας»². Οι σχετικά νέες έννοιες όπως η επιφάνεια διαρροής και ο νόμος πλαστικής ροής επεξηγούνται στο παράδειγμα της «Τεχνικής Θεωρίας Πλαστικότητας Ραβδωτών Φορέων».

¹ Αγγλ. *Ideal Plasticity*

² W. Prager and PG Hodge, *Theory of Perfectly Plastic Solids*, New York, Wiley, 1951.

© 2 ΙΔΕΑΤΗ ΠΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑ, 2008

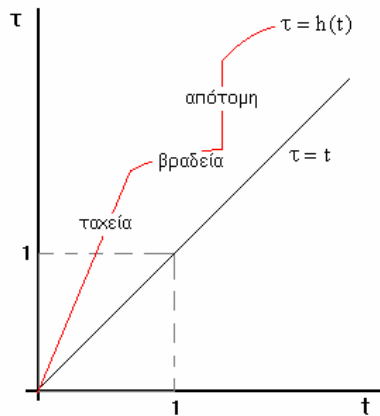
Ιωάννης Γ. Βαρδουλάκης, Dr-Ing., Καθηγητής της Μηχανικής στο Ε.Μ. Πολυτεχνείο
Τ.Θ. 144, Παιανία 190-02, <http://geolab.mechan.ntua.gr/>, I.Vardoulakis@mechan.ntua.gr

2.1 Χρονικός Ανεξάρτητη Συμπεριφορά

Στην παρούσα ανάλυση θα περιορισθούμε σε υλικά που συμπεριφέρονται με καλή προσέγγιση ως αμιγώς ανεξάρτητα της ταχύτητας παραμορφώσεως³. Στην περίπτωση αυτή υποθέτουμε ότι η οποιαδήποτε αλλαγή στην ταχύτητα φορτίσεως, που αντιστοιχεί σε κάποιο μονοτόνως αύξοντα, τμηματικώς συνεχή μετασχηματισμό της χρονικής μεταβλητής, της μορφής (Εικ. 2-1),

$$t' = h(t) ; \quad \dot{h} = \frac{dh}{dt} > 0 \quad (2.1)$$

αφήνει αναλλοίωτες τις καταστατικές εξισώσεις.



Εικ. 2-1: Μονότονος μετασχηματισμός της χρονικής μεταβλητής.

Αν δεχθούμε για παράδειγμα ότι μεταξύ ρυθμού παραμορφώσεως και τάσεως ισχύει μία καταστατική εξίσωση εξελικτικού χαρακτήρα, π.χ. της μορφής,

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = f_{ij}(\sigma_{kl}, \dot{\sigma}_{mn}) \quad (2.2)$$

και δεχθούμε ότι

$$\dot{\varepsilon}_{ij} \approx \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t} \quad , \quad \varepsilon'_{ij} \approx \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t'} \quad (2.3)$$

τότε

$$\dot{\varepsilon}_{ij} \approx \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t'} \frac{dh}{dt} \approx \dot{h} \varepsilon'_{ij} \quad (2.4)$$

Άρα

$$f_{ij}(\sigma_{kl}, \dot{\sigma}_{mn}) = \dot{h} f'_{ij}(\sigma_{kl}, \sigma'_{mn}) \quad (2.5)$$

Ομοίως όμως έχουμε ότι

³ Τα ανεξάρτητα της ταχύτητας παραμορφώσεως υλικά (Αγγλ. *rate independent materials*) αποτελούν μία μαθηματική εξιδανίκευση και συνιστούν μία οριακή συμπεριφορά. Γενικώς τα πραγματικά υλικά συμπεριφέρονται διαφορετικά, όταν η ταχύτητα παραμορφώσεως αλλάζει. Μια τέτοια συμπεριφορά καλείται ιξώδο-ελαστική ή ιξώδο-πλαστική (Αγγλ. *visco-elastic, visco-plastic*). Πρβλ. P.Perzyna (1963). The constitutive equations for rate sensitive plastic materials. Q. Appl. Math., 20, 321-332.

$$\dot{\sigma}_{mn} \approx \frac{\partial \sigma_{mn}}{\partial t'} \frac{dh}{dt} \approx \dot{h} \sigma'_{mn} \quad (2.6)$$

Άρα τελικά παίρνουμε ότι

$$f_{ij}(\sigma_{kl}, \dot{h} \sigma'_{mn}) = \dot{h} f_{ij}(\sigma_{kl}, \sigma'_{mn}) \quad (2.7)$$

Με τον περιορισμό ότι η παραπάνω σχέση, εξ. (2.7), ισχύει μόνο για μονοτόνως αύξουσες συναρτήσεις μετασηματισμού της χρονικής μεταβλητής ($\dot{h} > 0$), η συνάρτηση αποκρίσεως δεν είναι κατ' ανάγκη μηδέν για μηδενικό ρυθμό μεταβολής της φορτίσεως⁴, δηλαδή η $f_{ij}(\sigma_{kl}, 0)$ δεν είναι κατ' ανάγκη μηδέν. Άρα για να περιγράψει η καταστατική εξ. (2.2) την συμπεριφορά ενός υλικού που δεν επηρεάζεται από τον ρυθμό της φορτίσεως, τότε πρέπει να απαιτήσουμε όπως η συνάρτηση αποκρίσεως είναι θετικά ομογενής ως προς αυτόν,

$$\forall \lambda > 0 \Rightarrow f_{ij}(\dots, \lambda \dot{\sigma}_{mn}) = \lambda f_{ij}(\dots, \dot{\sigma}_{mn}) \quad (2.8)$$

Ένα τυπικό παράδειγμα καταστατικής εξισώσεως, ανεξάρτητης του ρυθμού φορτίσεως είναι ένας υποελαστικός νόμος, της μορφής,

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = M_{ijmn} \dot{\sigma}_{mn} \quad (2.9)$$

όπου στις περισσότερες εφαρμογές ο ελαστικός τανυστής ενδοτικότητας \mathbf{M} θα είναι εκείνος που περιγράφει ελαστικό υλικό τύπου Hooke. Παρατηρούμε ότι στην περίπτωση αυτή η καταστατική συνάρτηση είναι γραμμική ως προς $\dot{\sigma}_{mn}$.

2.2 Ελαστο-πλαστικός Διαχωρισμός της Τροπής

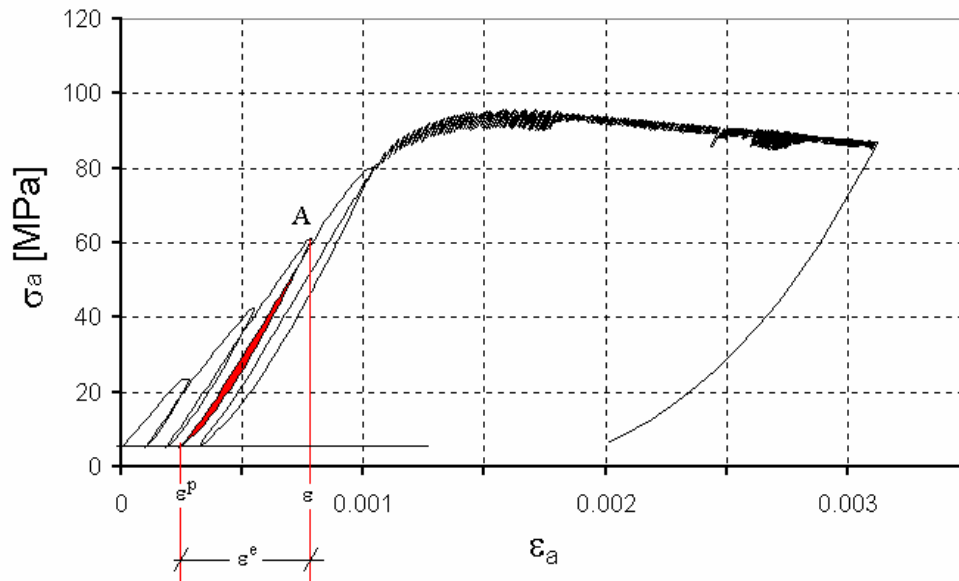
Από φαινομενολογική σκοπιά τα πραγματικά υλικά εμφανίζουν μη-αντιστρεπτές παραμορφώσεις, γεγονός που αναγνωρίζεται π.χ. σε ένα πείραμα φορτίσεως-αποφορτίσεως. Όπως φαίνεται και στο αντίστοιχο διάγραμμα τάσεων-τροπών (Εικ. 2-2) η συμπεριφορά του υλικού (μαρμάρου εν προκειμένω) είναι ριζικά διαφορετική στον κλάδο φορτίσεως από εκείνη στον κλάδο αποφορτίσεως-επαναφορτίσεως. Επίσης παρατηρούμε ότι γενικώς οι τροπές κατά την αποφόρτιση υστερούν κατά πολύ εκείνων κατά την φόρτιση.

Έστω τώρα ότι ε είναι η ολική τροπή μέχρι κάποιου σημείου A στην καμπύλη φορτίσεως. Το πείραμα αποφορτίσεως μας δείχνει ότι μόνο ένα μέρος της τροπής αυτής, έστω ε^e , η λεγόμενη και ελαστική τροπή (e: *elastic*), είναι αντιστρεπτή. Η 'παραμένουσα' τροπή ε^p καλείται και πλαστική τροπή (p: *plastic*)

$$\varepsilon^p = \varepsilon - \varepsilon^e > 0 \quad (2.10)$$

⁴ Η οριακή περίπτωση αυτή είναι γνωστή στη βιβλιογραφία ως οιονεί στατική φόρτιση (Αγγλ. *quasi-static loading*).

MT2: Μάρμαρο Διονύσου. Τριαξονική θλίψη
(αξονική τάση - αξονική τροπή, $\sigma_c=5$. MPa)



Εικ. 2-2: Καμπύλη αξονικής τάσεως-αξονικής τροπής σε τριαξονικό πείραμα θλίψεως μαρμάρου Διονύσου

Η θεωρία της πλαστικότητας βασίζεται στην υπόθεση ότι δεν μπορούμε να διατυπώσουμε καταστατικές εξισώσεις που να αφορούν πεπερασμένες παραμορφώσεις, όπως κάνουμε στην περίπτωση ελαστικών υλικών. Πράγματι, η συμπεριφορά ενός πραγματικού υλικού δεν εξαρτάται μόνο από την τρέχουσα τιμή της τάσεως, όπως υποθέτουμε ότι συμβαίνει στα ελαστικά υλικά, αλλά εξαρτάται και από την ιστορία της παραμορφώσεως. Για το λόγο αυτό η παραπάνω ανάλυση της τροπής θα αφορά τον ρυθμό της. Γενικώς δε θα δεχθούμε τον εξής διαχωρισμό

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}^e + \dot{\varepsilon}_{ij}^p \tag{2.11}$$

Αντιστοίχως οι εξισώσεις της θεωρίας πλαστικότητας διατυπώνονται ως σχέσεις μεταξύ του ρυθμού της πλαστικής τροπής, της τάσεως και ίσως και του ρυθμού της. Έχουν δε αυτές οι εξισώσεις τη μορφή εξελικτικών εξισώσεων⁵ της μορφής,

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = g_{ij} \left(\sigma_{kl}, \dot{\sigma}_{mn}, \dots \right) \tag{2.12}$$

Τα αποσιωποητικά στη λίστα των μεταβλητών της συναρτήσεως αποκρίσεως στην εξ. (2.12) σημαίνουν την εξάρτηση του ρυθμού της τάσεως και από μία σειρά παραμέτρων (των λεγομένων και εσωτερικών μεταβλητών), που περιγράφουν με την σειρά τους την «ιστορία» της παραμορφώσεως. Υποθέτοντας τώρα ότι η συνάρτηση $g_{ij} \left(\dots, \dot{\sigma}_{mn}, \dots \right)$ είναι θετικά ομογενής, εξασφαλίζουμε ότι η πλαστική απόκριση είναι ανεξάρτητη του

⁵ Αγγλ. *evolution equations*

ρυθμού της φορτίσεως⁶. Οπότε αντί των ρυθμών μπορούμε χωρίς περιορισμό να αναφερόμαστε στις απειροστικές μεταβολές, αφού,

$$\Delta \varepsilon_{ij}^p = \dot{\varepsilon}_{ij}^p \Delta t = \Delta t \cdot g_{ij} \left(\sigma_{kl}, \dot{\sigma}_{mn}, \dots \right) = g_{ij} \left(\sigma_{kl}, \Delta t \cdot \dot{\sigma}_{mn}, \dots \right) = g_{ij} \left(\sigma_{kl}, \Delta \sigma_{mn}, \dots \right) \quad (2.13)$$

Όσον αφορά δε τις ελαστικές τροπές θα δεχθούμε γενικώς ότι ισχύει ένας υποελαστικός νόμος,

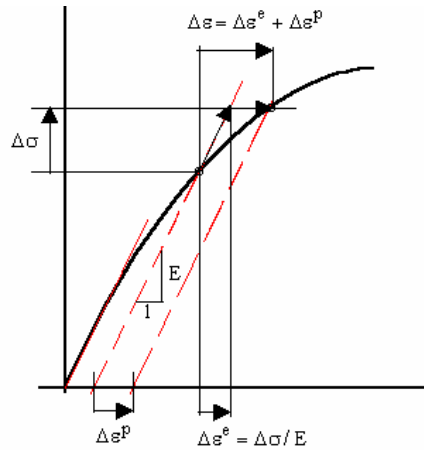
$$\dot{\varepsilon}_{ij}^e = M_{ijmn}^e \dot{\sigma}_{mn} \quad (2.14)$$

οπότε

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^e \cdot \Delta t = M_{ijmn}^e \dot{\sigma}_{mn} \cdot \Delta t = M_{ijmn}^e \Delta \sigma_{kln} \equiv \Delta \varepsilon_{ij}^e \quad (2.15)$$

Άρα από την εξ. (2.11) έπεται η αντίστοιχη για τις απειροστικές μεταβολές (Εικ. 2-3),

$$\Delta \varepsilon_{ij} = \Delta \varepsilon_{ij}^e + \Delta \varepsilon_{ij}^p \quad (2.16)$$



Εικ. 2-3: Ελαστοπλαστικός διαχωρισμός των απειροστικών τροπών

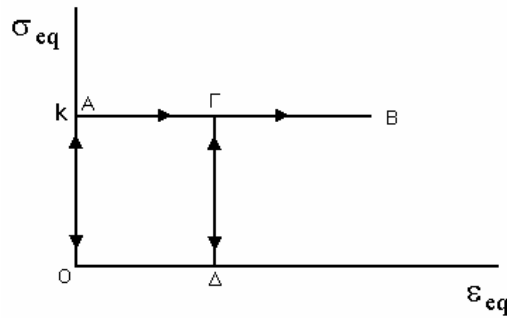
Επειδή, όπως αναφέραμε, οι ελαστικές (αντιστρεπτές) τροπές είναι γενικώς μικρές σε σχέση με τις πλαστικές (μη-αντιστρεπτές) τροπές γι' αυτό σε πολλές περιπτώσεις οι πρώτες θεωρούνται αμελητέες. Στην ειδική αυτή περίπτωση μιλάμε για απολύτως-στερεά, πλαστικά υλικά⁷

$$\left| \dot{\varepsilon}_{ij}^e \right| \ll \left| \dot{\varepsilon}_{ij}^p \right| \Rightarrow \dot{\varepsilon}_{ij} \approx \dot{\varepsilon}_{ij}^p \quad (2.17)$$

⁶ Στην αντίθετη περίπτωση η απόκριση θα χαρακτηριστεί ως ιξωδο-πλαστική (Αγγλ. *visco-plastic*).

⁷ Αγγλ. *rigid-plastic materials*

2.3 Ιδεατά Πλαστικά Υλικά



Εικ. 2-4: Χαρακτηριστικό διάγραμμα ισοδύναμης τάσης-ισοδύναμης τροπής για απολύτως στερεό, ιδεατά πλαστικό υλικό.

Το απλούστερο προσομοίωμα πλαστικού υλικού είναι εκείνο του ισότροπου, ασυμπίεστου, ιδεατά πλαστικού και απολύτως στερεού υλικού. Το προσομοίωμα αυτό προτείνεται για την προσεγγιστική περιγραφή της μηχανικής συμπεριφοράς όλκιμων μετάλλων ή εύπλαστων αργίλων⁸. Η εξιδανικευμένη συμπεριφορά ενός ιδεατά πλαστικού υλικού παρίσταται γραφικά με την αντίστοιχη καμπύλη ισοδύναμης τάσεως - ισοδύναμης τροπής (Εικ. 2-4). Οι ελαστικές τροπές θεωρούνται συνήθως αμελητέες, οπότε ο κλάδος αρχικής φορτίσεως (ΟΑ) και όλοι οι κλάδοι αποφορτίσεως-επαναφορτίσεως είναι κατακόρυφες ευθείες όπως η ευθεία (ΓΔ). Ο κλάδος φορτίσεως (ΑΒ) προσεγγίζεται με μια ευθεία παράλληλη προς τον άξονα $O\varepsilon_{eq}$ η οποία και τέμνει τον άξονα $O\sigma_{eq}$ στο σημείο $\sigma_{eq} = k$, που αντιστοιχεί στην ισοδύναμη τάση διαρροής του υλικού. Παρατηρούμε ότι στην περίπτωση που το υλικό διαρρέει, ενώ η τάση ικανοποιεί την παραπάνω συνθήκη διαρροής του υλικού, οι τροπές είναι γενικώς απροσδιόριστες.

Συμφώνως προς μία πρόταση του T.Y. Thomas⁹, η καταστατική εξίσωση που διέπει τη συμπεριφορά ενός ισότροπου, ασυμπίεστου, ιδεατά πλαστικού- απολύτως στερεού υλικού προκύπτει ως συνέπεια των εξής καταστατικών υποθέσεων:

- 1) Το υλικό είναι κατά την αποφόρτισή του απολύτως στερεό, άρα

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^e = 0 \Rightarrow \dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}^p \quad (2.18)$$

- 2) Το υλικό είναι ασυμπίεστο, άρα διαχωρίζοντας τον ρυθμό παραμορφώσεως σε σφαιρικό μέρος και αποκλίνον μέρος έχουμε τις σχέσεις,

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \frac{1}{3} \dot{\varepsilon}_{kk}^p \delta_{ij} + \dot{e}_{ij}^p, \quad \dot{\varepsilon}_{kk}^p = 0 \Rightarrow \dot{\varepsilon}_{ij}^p = \dot{e}_{ij}^p \quad (2.19)$$

Διαχωρίζοντας την τάση σε μέση ορθή και σε αποκλίνουσα

$$\sigma_{ij} = p\delta_{ij} + s_{ij} \quad (2.20)$$

παρατηρούμε ότι λόγω της υποθέσεως (1) η μέση ορθή τάση, $p = \sigma_{kk} / 3$, είναι κινηματικώς απροσδιόριστη, ενώ υποθέτουμε ότι:

⁸ Πλάσσω (αρχ.): μορφώνω, διαπλάθω, σχηματίζω

⁹ T.Y. Thomas, *Plastic Flow and fracture in Solids*, sect. IV, Academic Press, 1961.

3) Οι συνιστώσες του αποκλίνοντος τανυστή των τάσεων είναι ανάλογες εκείνων του ρυθμού του αποκλίνοντος τανυστή πλαστικής παραμορφώσεως.

έχουμε τις σχέσεις,

$$s_{ij} = \lambda \dot{e}_{ij}^p \quad (2.21)$$

όπου ο συντελεστής αναλογίας στη σχέση τάσεων-τροπών (2.21) είναι γενικώς μία βαθμωτή αναλλοίωτος συνάρτηση του ρυθμού του αποκλίνοντος τανυστή πλαστικής παραμορφώσεως, δηλ.

$$\lambda = \Lambda(\dot{e}_{ij}^p) \quad (2.22)$$

4) Δεν υπάρχει αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ της τάσεως και του ρυθμού παραμορφώσεως.

Παρατηρήσεις:

Επειδή ο ρυθμός παραμορφώσεως ορίζεται ως το συμμετρικό μέρος της βαθμίδας της ταχύτητας και οι ελαστικές τροπές είναι μηδενικές, έχουμε

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \frac{1}{2}(\partial_i v_j + \partial_j v_i) \quad (2.23)$$

από τις καταστατικές υποθέσεις (1) και (2) έπονται οι παρακάτω σχέσεις για τη βαθμίδα της ταχύτητας

$$\partial_k v_k = 0 \quad (2.24)$$

$$\partial_i v_j + \partial_j v_i = 2\dot{e}_{ij}^p \quad (2.25)$$

Η καταστατική υπόθεση (3), εξ. (2.21), εκφράζει την υπόθεση ότι οι τανυστές των τάσεων και του ρυθμού πλαστικής παραμορφώσεως είναι ομοαξονικοί (δηλ. έχουν τους ίδιους κύριους άξονες).

Η καταστατική υπόθεση (4) εκφράζει τη βασική διαφορά μεταξύ ελαστικής και ιδεατά-πλαστικής συμπεριφοράς, δηλαδή τη μη-αντιστρεψιμότητα της παραμορφώσεως.

Για τον προσδιορισμό της ζητούμενης καταστατικής σχέσεως θεωρούμε κατ' αρχήν τις ιδιοτιμές η_i ($i=1,2,3$) του τανυστή \dot{e}_{ij}^p ,

$$\det\left(\dot{e}_{ij}^p - \eta \delta_{ij}\right) = 0 \Rightarrow \eta^3 - J_{2\dot{e}} \eta - J_{3\dot{e}} = 0 \quad (2.26)$$

Οι συντελεστές της χαρακτηριστικής εξισώσεως είναι αντιστοίχως η 2^η και 3^η αναλλοίωτη του τανυστή \dot{e}_{ij}^p ,

$$J_{2\dot{e}} = \frac{1}{2} \dot{e}_{ij}^p \dot{e}_{ij}^p = \frac{1}{2}(\eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2) \quad (2.27)$$

$$J_{3\dot{e}} = \frac{1}{3} \dot{e}_{ij}^p \dot{e}_{jk}^p \dot{e}_{ki}^p = \frac{1}{3}(\eta_1^3 + \eta_2^3 + \eta_3^3) \quad (2.28)$$

Είναι λοιπόν προφανές ότι οι ιδιοτιμές η_i ($i=1,2,3$) του τανυστή \dot{e}_{ij} είναι συναρτήσεις των βασικών αναλλοίωτων του τανυστή αυτού. Δεχόμενοι τώρα πως ο συντελεστής λ στην καταστατική εξ. (2.21) είναι μία αναλλοίωτη συνάρτηση του τανυστή \dot{e}_{ij} , και κάνοντας ένα μετασχηματισμό των συντεταγμένων στο σύστημα των κυρίων αξόνων $O(x_1', x_2', x_3')$ του τανυστή \dot{e}_{ij} παίρνουμε ότι ο συντελεστής λ είναι συνάρτηση των βασικών αναλλοίωτων του \dot{e}_{ij} ,

$$\lambda = \Lambda(\dot{e}_{ij}^p) = \Lambda'(\eta_i) = \hat{\Lambda}(J_{2\dot{e}}, J_{3\dot{e}}) \quad (2.29)$$

Έστω τώρα

$$J_{2s} = \frac{1}{2} s_{ij} s_{ji} = \frac{1}{2} (s_1^2 + s_2^2 + s_3^2) \quad (2.30)$$

$$J_{3s} = \frac{1}{3} s_{ij} s_{jk} s_{ki} = \frac{1}{3} (s_1^3 + s_2^3 + s_3^3) \quad (2.31)$$

Από την εξ. (2.21) παίρνουμε,

$$J_{2s} = \lambda^2 J_{2\dot{e}} \quad (2.32)$$

$$J_{3s} = \lambda^3 J_{3\dot{e}}$$

Αν υποθέσουμε ότι η ιακωβιανή του παραπάνω συστήματος εξισώσεων είναι διάφορη του μηδενός,

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial J_{2s}}{\partial J_{2\dot{e}}} & \frac{\partial J_{2s}}{\partial J_{3\dot{e}}} \\ \frac{\partial J_{3s}}{\partial J_{2\dot{e}}} & \frac{\partial J_{3s}}{\partial J_{3\dot{e}}} \end{vmatrix} \neq 0 \quad (2.33)$$

τότε οι σχέσεις (2.32) είναι αντιστρέψιμες και υπάρχει μία μονοσήμαντη λύση,

$$J_{2\dot{e}} = B(J_{2s}, J_{3s}) \quad (2.34)$$

$$J_{3\dot{e}} = C(J_{2s}, J_{3s})$$

και άρα

$$\lambda = \hat{\Lambda}(J_{2\dot{e}}, J_{3\dot{e}}) = \bar{\Lambda}(J_{2s}, J_{3s}) \quad (2.35)$$

Στην περίπτωση αυτή η εξίσωση (2.21) είναι μονοσημάντως αντιστρέψιμη, και

$$\dot{e}_{ij}^p = \frac{1}{\bar{\Lambda}(J_{2s}, J_{3s})} s_{ij} \quad (2.36)$$

γεγονός που βρίσκεται σε αντίφαση με την καταστατική υπόθεση (4). Άρα από την υπόθεση (4) έπεται ότι η ιακωβιανή, εξ. (2.33), πρέπει να μηδενίζεται

$$\Delta = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 2\lambda \frac{\partial \lambda}{\partial J_{2\dot{e}}} J_{2\dot{e}} + \lambda^2 & 2\lambda \frac{\partial \lambda}{\partial J_{3\dot{e}}} J_{3\dot{e}} \\ 3\lambda^2 \frac{\partial \lambda}{\partial J_{2\dot{e}}} J_{3\dot{e}} & 3\lambda^2 \frac{\partial \lambda}{\partial J_{3\dot{e}}} J_{3\dot{e}} + \lambda^3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \quad (2.37)$$

ή

$$2J_{2\dot{e}} \frac{\partial \lambda}{\partial J_{2\dot{e}}} + 3J_{3\dot{e}} \frac{\partial \lambda}{\partial J_{3\dot{e}}} + \lambda = 0 \quad (2.38)$$

Παρατηρούμε ότι με το μετασχηματισμό,

$$x = \sqrt{J_{2\dot{e}}}, \quad y = \sqrt[3]{J_{3\dot{e}}}, \quad \lambda = z(x, y) \quad (2.39)$$

η παραπάνω διαφορική εξίσωση (2.38) παίρνει τη μορφή ομογενούς διαφορικής εξισώσεως, τάξεως $\alpha = -1$

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = \alpha z \quad (2.40)$$

Η γενική λύση της ομογενούς δ.ε. είναι μία ομογενής συνάρτηση α -τάξεως¹⁰

$$z(kx, ky) = k^\alpha z(x, y) \quad (2.41)$$

Παρατηρούμε τώρα ότι η συνάρτηση

$$z = \frac{1}{x} f\left(\frac{y}{x}\right) \quad (2.42)$$

είναι λύση της ομογενούς δ.ε.. Αυτό σημαίνει ότι η αρχική εξ. (2.38) έχει λύσεις της μορφής,

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{J_{2\dot{e}}}} L\left(\frac{\sqrt[3]{J_{3\dot{e}}}}{\sqrt{J_{2\dot{e}}}}\right) \quad (2.43)$$

οπότε η εξ. (2.21) δίδει,

$$s_{ij} = \frac{1}{\sqrt{J_{2\dot{e}}}} L\left(\frac{\sqrt[3]{J_{3\dot{e}}}}{\sqrt{J_{2\dot{e}}}}\right) \dot{e}_{ij}^p \quad (2.44)$$

από την οποία παίρνουμε ότι,

$$\frac{\sqrt[3]{J_{3es}}}{\sqrt{J_{2es}}} = \frac{\sqrt[3]{J_{3\dot{e}}}}{\sqrt{J_{2\dot{e}}}} \Rightarrow L = \bar{L}\left(\frac{\sqrt[3]{J_{3s}}}{\sqrt{J_{2s}}}\right) \quad (2.45)$$

Από τη εξ. (2.44) παίρνουμε τον εξής περιορισμό για την ένταση της διατμητικής τάσεως

$$T = \sqrt{J_{2s}} = \bar{L}\left(\frac{\sqrt[3]{J_{3s}}}{\sqrt{J_{2s}}}\right) \quad (2.46)$$

¹⁰ E.Kamke, *Differentialgleichungen, Loesungsmethoden und Loesungen*, Vol. II, sect. E. 2.25 & 4.8 Chelsea Publ. Co., 1974.

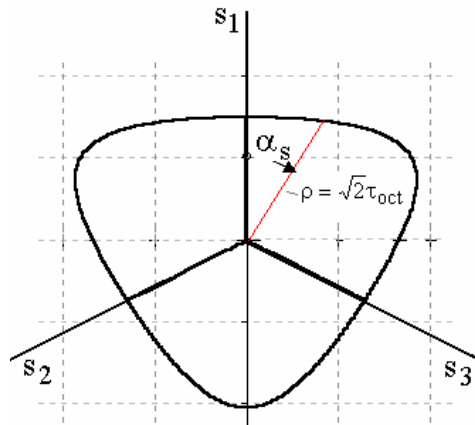
Υπενθυμίζουμε ότι η ποσότητα

$$\cos 3\alpha_s = \frac{3\sqrt{3}J_{3s}}{2J_{2s}^{3/2}} \quad (2.47)$$

είναι η αναλλοίωτη τασική γωνία ομοιότητας. Οπότε τελικά παίρνουμε τον περιορισμό ότι εν προκειμένω η ένταση της διατμητικής τάσεως πρέπει να είναι γενικώς μία συνάρτηση της αναλλοίωτης γωνίας ομοιότητας, π.χ.

$$\tau_{oct} = \sqrt{\frac{2}{3}}T = F(\cos 3\alpha_s) \quad (2.48)$$

Η σχέση αυτή λέγεται *συνθήκη διαρροής*¹¹.



Εικ. 2-5: Ίχνος της συνθήκης διαρροής στο αποκλίνον επίπεδο

Η συνθήκη διαρροής, εξ. (2.48), παρίσταται γεωμετρικά στον χώρο των κυρίων τάσεων ως ένας κύλινδρος με τον άξονά του να συμπίπτει με τη χωροδιαγώνιο και με ίχνος στο αποκλίνον επίπεδο που να καθορίζεται από την συνάρτηση $F(\alpha_s)$, Εικ. 2-5.

Με δεδομένη τώρα τη συνθήκη διαρροής (2.48) έπεται τελικά ότι ο νόμος πλαστικής ροής

$$\dot{\epsilon}_{kk}^p = 0 \wedge \dot{\epsilon}_{ij}^p = \frac{1}{\lambda} s_{ij}, \lambda > 0 \quad (2.49)$$

Παρατηρούμε ότι ο νόμος πλαστικής ροής περιορίζει μόνο την κατεύθυνση του $\dot{\epsilon}_{ij}$,

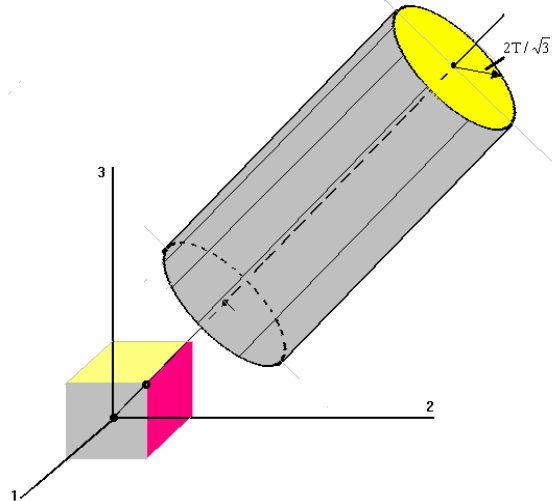
$$\frac{\dot{\epsilon}_{ij}^p}{\dot{g}^p} = \frac{s_{ij}}{2T} \quad (2.50)$$

όπου

$$\dot{g}^p = \sqrt{2\dot{\epsilon}_{ij}^p \dot{\epsilon}_{ij}^p} \quad (2.51)$$

ενώ η ένταση του ρυθμού (διατμητικής) πλαστικής παραμορφώσεως δεν περιορίζεται.

¹¹ Αγγλ. *yield condition*

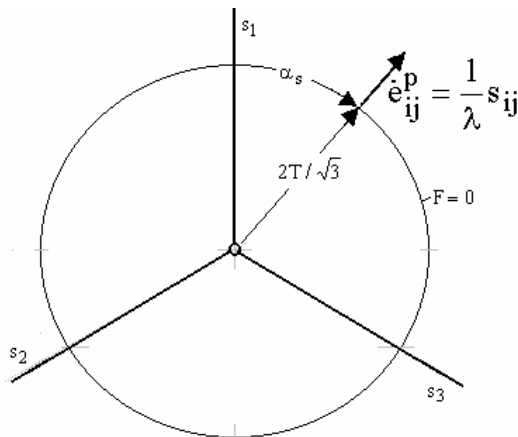


Εικ. 2-6: Επιφάνεια διαρροής κατά v. Mises, εξ. (2.52)

Παρατηρούμε ότι στην ειδική περίπτωση που η καταστατική συνάρτηση είναι της μορφής

$$F(\alpha_s) = k : \text{const.} \quad (2.52)$$

τότε καταλήγουμε στην συνθήκη διαρροής κατά v. Mises. Στην περίπτωση αυτή η συνθήκη διαρροής παρίσταται στον χώρο των κυρίων τάσεων ως ένας κυκλικός κύλινδρος με άξονα τη χωροδιαγώνιο και ακτίνα $\sqrt{2}k$ (Εικ. 2-6). Το ίχνος της κυλινδρικής επιφάνειας στο αποκλίνον επίπεδο (π) είναι κύκλος με ακτίνα $\sqrt{2}k$ (Εικ. 2-7).



Εικ. 2-7: Συνθήκη καθετότητας στην περίπτωση κυκλικού ίχνους της συνθήκης διαρροής

Παρατηρούμε τέλος ότι αφού ο ταυστής των τάσεων και ο ταυστής του ρυθμού πλαστικών τροπών είναι ομοαξονικοί, μπορούμε να ταυτίσουμε το σύστημα κυρίων αξόνων τους. Στην περίπτωση αυτή το διάνυσμα των κύριων πλαστικών τροπών,

$\dot{\epsilon}_i = \eta_i$ ($i=1,2,3$) παρίσταται στο επίπεδο (π) και είναι κάθετο στο κυκλικό ίχνος της συνθήκης διαρροής (Εικ. 2-7). Η συνθήκη αυτή είναι γνωστή ως *συνθήκη καθετότητας*¹².

Η συνθήκη καθετότητας γενικεύεται ως εξής: Έστω

¹² Αγγλ. *normality condition*

$$F(s_{ij}) = k > 0 \quad (2.53)$$

η συνθήκη διαρροής, όπου η συνάρτηση διαρροής $F(s_{ij})$ είναι μία ισότροπη συνάρτηση το αποκλίνοντος τανυστή των τάσεων¹³. Ομοαξονικότητα και καθετότητα εξασφαλίζονται αν απαιτήσουμε την ισχύ του λεγομένου *συνηρημένου νόμου πλαστικής ροής*¹⁴, ο οποίος προϋποθέτει ότι η συνάρτηση διαρροής παίζει και το ρόλο πλαστικού δυναμικού¹⁵

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \Lambda \frac{\partial F}{\partial s_{ij}}, \quad \Lambda > 0 \quad (2.54)$$

2.4 Οι Εξισώσεις Prandtl - Reuss

Γενικεύοντας τις παραπάνω παρατηρήσεις μπορούμε τώρα να διατυπώσουμε τη λεγόμενη θεωρία πλαστικής ροής για ιδεατά πλαστικά υλικά. Κατ' αρχήν δεχόμαστε ότι ο ρυθμός της παραμορφώσεως μπορεί να αναλυθεί προσθετικά στο ρυθμό ελαστικής και πλαστικής τροπής,

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}^e + \dot{\varepsilon}_{ij}^p \quad (2.55)$$

και υποθέτουμε ότι ο ρυθμός ελαστικών τροπών δίδεται από το νόμο του Hooke¹⁶,

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^e = \frac{1+\nu}{E} \dot{\sigma}_{ij} - \frac{\nu}{E} \dot{\sigma}_{kk} \delta_{ij} \quad (2.56)$$

Στο σημείο αυτό θα δεχθούμε ότι το υλικό είναι «πλαστικά ασυμπίεστο», δηλ.,

$$\dot{\varepsilon}_{kk}^p = 0 \quad (2.57)$$

Επίσης θα δεχθούμε την ύπαρξη μιας επιφάνειας στο χώρο των τάσεων (Εικ. 2-8)

$$F(s_{ij}) = k \quad (k > 0) \quad (2.58)$$

η οποία περιβάλλει την περιοχή ελαστικής συμπεριφοράς. Αυτό σημαίνει ότι αν κάποια εντατική κατάσταση σ_{ij} βρίσκεται εντός της ελαστικής περιοχής, τότε ο ρυθμός πλαστικών τροπών μηδενίζεται, δηλ.

$$F(s_{ij}) < k \Rightarrow \dot{\varepsilon}_{ij}^p = 0 \quad (2.59)$$

Επίσης δεχόμαστε ότι ο τανυστής του ρυθμού πλαστικής παραμορφώσεως είναι ομοαξονικός με τον τανυστή των τάσεων, οπότε αυτός παρίσταται ως διάνυσμα στο χώρο των κυρίων τάσεων. Μέσα στα πλαίσια της λεγόμενης *συνηρημένης θεωρίας πλαστικής ροής*¹⁷ δεχόμαστε επιπλέον ότι το διάνυσμα αυτό είναι κάθετο στην επιφάνεια διαρροής (συνθήκη καθετότητας), γεγονός το οποίο εκφράζεται από την σχέση,

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \Lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}, \quad \Lambda \geq 0 \quad (2.60)$$

¹³ Σχετικά με το θεμελιώδες θεώρημα αναπαραστάσεως ισοτρόπων τανυστικών συναρτήσεων πρβλ. Σημειώσεις Μηχανικής Συνεχούς Μέσου..

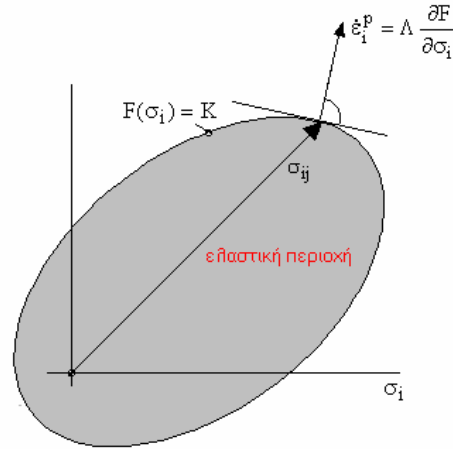
¹⁴ Αγγλ. *associated flow-rule*

¹⁵ Αγγλ. *plastic potential*

¹⁶ Με E συμβολίζουμε το μέτρο ελαστικότητας Young και με ν τον λόγο Poisson του υλικού.

¹⁷ Αγγλ. *associated flow theory of plasticity*

Στη σχέση αυτή η παράμετρος Λ καλείται πλαστικός πολλαπλασιαστής¹⁸ και είναι μια απροσδιόριστη βαθμωτή ποσότητα.



Εικ. 2-8: Επιφάνεια διαρροής στο χώρο των τάσεων

Για να είναι συμβατή η εξ. (2.60) με την καταστατική υπόθεση (2.57) προκύπτει ότι προκειμένου περί ενός πλαστικά ασυμπίεστου υλικού, που υπακούει ένα συντηρημένο νόμο πλαστικής ροής, η συνθήκη διαρροής δεν πρέπει να εξαρτάται από τη μέση ορθή τάση, δηλαδή πρέπει να είναι μόνο συνάρτηση το αποκλίνοντος τανυστή των τάσεων,

$$F(s_{ij}) = k \Rightarrow \dot{\epsilon}_{kk}^p = \Lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_{kk}} = 0 \quad \wedge \quad \dot{\epsilon}_{ij}^p = \Lambda \frac{\partial F}{\partial s_{ij}} \quad (2.61)$$

Για παράδειγμα η συνθήκη von Mises περιγράφει την επιφάνεια διαρροής που δίδεται από τη σχέση,

$$\tau_{oct} = \sqrt{\frac{2}{3}} J_{2s} = k \quad (2.62)$$

οπότε,

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_{ij}^p &= \Lambda \frac{\partial \tau_{oct}}{\partial s_{ij}} = \Lambda \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{J_{2s}}} \frac{\partial J_{2s}}{\partial s_{ij}} \\ &= \Lambda \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{1}{T} \frac{\partial}{\partial s_{ij}} \left(\frac{1}{2} s_{mn} s_{nm} \right) \\ &= \Lambda \frac{1}{\sqrt{6}} \frac{1}{2T} (s_{mn} \delta_{in} \delta_{jm} + \delta_{im} \delta_{jn} s_{nm}) \Rightarrow \dot{\epsilon}_{ij}^p = \frac{1}{\sqrt{6}} \Lambda \frac{s_{ij}}{T} \end{aligned} \quad (2.63)$$

Συνοψίζοντας τα ανωτέρω παίρνουμε τις λεγόμενες εξισώσεις Prandtl-Reuss :

1) Εξισώσεις συμβιβαστού για το ρυθμό της παραμορφώσεως¹⁹:

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} (\partial_i v_j + \partial_j v_i) \quad (2.64)$$

¹⁸ Αγγλ. *plastic multiplier*

¹⁹ $v_i(x_k, t)$ είναι το διάνυσμα της ταχύτητας των υλικών σημείων.

2) Ανάλυση του ρυθμού της παραμορφώσεως σε ελαστικό και πλαστικό μέρος:

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}^e + \dot{\varepsilon}_{ij}^p \quad (2.65)$$

3) Νόμος ελαστικότητας για τον ρυθμό μεταβολής της τάσεως:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^e = \frac{1+\nu}{E} \dot{\sigma}_{ij} - \frac{\nu}{E} \dot{\sigma}_{kk} \delta_{ij} \quad (2.66)$$

4) Συνθήκη διαρροής:

$$F(s_{ij}) = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{\frac{1}{2} s_{ij} s_{ji}} = k \quad (2.67)$$

5) Νόμος πλαστικής ροής:

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_{kk}^p &= 0 \\ \dot{\varepsilon}_{ij}^p &= \Lambda \frac{\partial F}{\partial s_{ij}} = \frac{1}{\sqrt{6}} \Lambda \frac{s_{ij}}{T}, \quad \Lambda = \begin{cases} 0 & \text{if } : F < k \\ > 0 & \text{else} \end{cases} \end{aligned} \quad (2.68)$$

Οι εξισώσεις αυτές συμπληρώνονται με τις εξισώσεις ισορροπίας για τον ρυθμό του τανυστή των τάσεων,

$$\partial_i \dot{\sigma}_{ij} = 0 \quad (2.69)$$

Παρατηρούμε ότι για ένα τρισδιάστατο πρόβλημα έχουμε ως 27 άγνωστες ποσότητες:

- τις 3 συνιστώσες της ταχύτητας v_i
- τις 18 συνιστώσες των τανυστών $\dot{\varepsilon}_{ij}, \dot{\varepsilon}_{ij}^e, \dot{\varepsilon}_{ij}^p$
- τις 6 συνιστώσες του ρυθμού του τανυστή των τάσεων $\dot{\sigma}_{ij}$

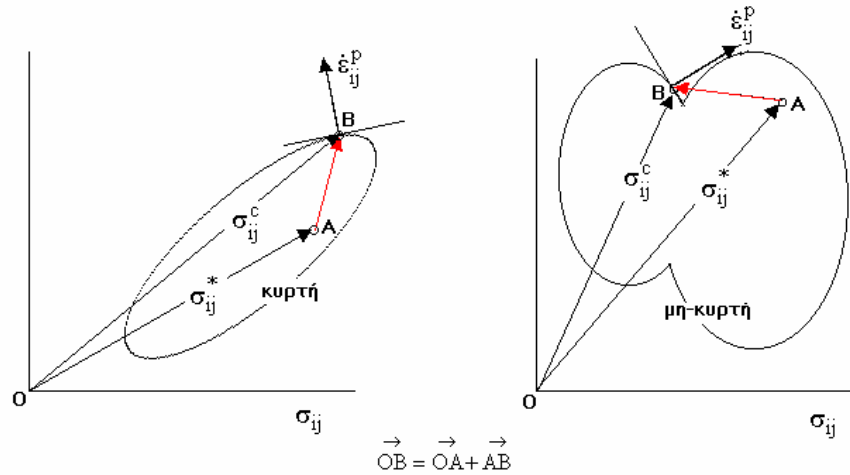
Οι αντίστοιχες διαθέσιμες εξισώσεις είναι επίσης 27:

- οι 6 εξισώσεις μεταξύ της βαθμίδας της ταχύτητας και του ρυθμού της παραμορφώσεως, εξ. (2.64),
- οι 3 εξισώσεις ισορροπίας, εξ. (2.69),
- οι 6 εξισώσεις αναλύσεως του ρυθμού της παραμορφώσεως, (2.65),
- οι 6 εξισώσεις ελαστικότητας, εξ. (2.66),
- οι 6 εξισώσεις που καθορίζουν τον νόμο πλαστικής ροής, εξ. (2.68)

Παρατηρούμε τέλος ότι για $E \rightarrow \infty$, λαμβάνουμε την οριακή συμπεριφορά του, ιδεατά πλαστικού-απολύτως στερεού υλικού, όπου

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^e = 0 \Rightarrow \dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}^p \quad (2.70)$$

2.5 Συνθήκη Καθετότητας και Κυρτότητα της Επιφάνειας Διαρροής



Εικ. 2-9: Συνθήκη καθετότητας και κυρτότητα της επιφάνειας διαρροής

Θεωρούμε δύο εντατικές καταστάσεις, έστω σ_{ij}^c και σ_{ij}^* , έτσι ώστε η πρώτη να είναι οριακή, δηλαδή να ικανοποιεί τη συνθήκη διαρροής

$$F(\sigma_{ij}^c) = k \quad (2.71)$$

ενώ η δεύτερη να είναι επιτρεπτή, δηλαδή να μην παραβιάζει τη συνθήκη διαρροής

$$F(\sigma_{ij}^*) \leq k \quad (2.72)$$

Με άλλα λόγια η εντατική κατάσταση σ_{ij}^c απεικονίζεται επί της επιφάνειας διαρροής (στο όριο ή σύνορο αυτής) ενώ η σ_{ij}^* απεικονίζεται είτε στο σύνορο είτε στην εσωτερική (ελαστική) περιοχή της επιφάνειας διαρροής.

Από τη συνθήκη καθετότητας

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \Lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \quad (2.73)$$

και εφόσον η επιφάνεια διαρροής είναι κυρτή, προκύπτει ότι ισχύει η παρακάτω καθοριστική ανισότητα που αποδίδεται στον Drucker²⁰ (Εικ. 2-9)

$$(\sigma_{ij}^c - \sigma_{ij}^*) \dot{\epsilon}_{ij}^p \geq 0 \quad (2.74)$$

Παρατηρούμε ότι όταν η επιφάνεια διαρροής δεν είναι κυρτή, τότε υπάρχουν εντατικές καταστάσεις σ_{ij}^c και σ_{ij}^* επί και εντός αυτής (που αντιστοιχούν στα διανύσματα θέσεως \vec{OB} και \vec{OA}), τέτοιες ώστε η διαφορά $(\sigma_{ij}^c - \sigma_{ij}^*)$ να αντιστοιχεί σε διάνυσμα \vec{AB} , του

²⁰ D.C. Drucker, A more fundamental approach to stress-strain relations. In: Proceedings of the First US Nat. Cong. Appl. Mech. (1951), pp. 487-491.

οποίου το εσωτερικό γινόμενο με το διάνυσμα της καθέτου $\dot{\varepsilon}_{ij}^p$ επί της επιφανείας διαρροής στο σημείο B να είναι αρνητικό.

2.6 Τεχνική Θεωρία Πλαστικότητας Ραβδωτών Φορέων²¹²²

Οι παραπάνω έννοιες της επιφάνειας διαρροής και του νόμου πλαστικής ροής κ.λπ. έχουν βρει εφαρμογή και στην Τεχνική Μηχανική μέσα στα πλαίσια της Τεχνικής Θεωρίας Πλαστικότητας ραβδωτών και επιφανειακών φορέων. Η συγκεκριμένη αυτή εφαρμογή είναι διδακτικά χρήσιμη για την εξοικείωση μας με την αφηρημένη ορολογία της Μαθηματικής Θεωρίας της Πλαστικότητας. Για το λόγο αυτό σκιαγραφούμε στις επόμενες δύο παραγράφους το τρόπο κατασκευής τέτοιων Τεχνικών Θεωριών.

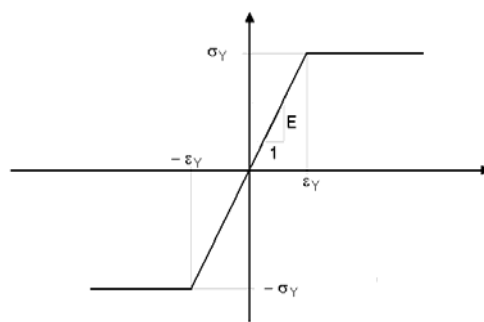
2.6.1 Ελαστοπλαστική κάμψη

Θεωρούμε ένα ραβδωτό φορέα από ελαστικό, ιδεατά πλαστικό υλικό. Η αντίστοιχη καμπύλη τάσεων-τροπών σε μονοαξονική καταπόνηση (Εικ. 2-10) χαρακτηρίζεται από το μέτρο ελαστικότητας E , την τάση διαρροής σ_Y και την τροπή διαρροής του υλικού,

$$\varepsilon_Y = \frac{\sigma_Y}{E} \quad (2.75)$$

Θεωρούμε για παράδειγμα ένα γραμμωτό φορέα με ορθογωνική διατομή κάτω από την επίδραση καμπτικής ροπής $M_y = M(x)$. Για την επίλυση του προβλήματος της Τεχνικής Θεωρίας Κάμψεως στην ελαστοπλαστική περιοχή εισάγουμε, όπως και στην περίπτωση της ελαστικής θεωρίας, την κινηματική παραδοχή Bernulli, συμφώνως προς την οποία αρχικώς ορθές προς τον άξονα της δοκού διατομές παραμένουν κάθετες προς αυτόν και μετά την κάμψη. Οπότε, αν ρ είναι η ακτίνα καμπυλότητας της δοκού στη θέση x , τότε έχουμε τις εξής σχέσεις μεταξύ αξονικής μετατοπίσεως, τροπής και καμπυλότητας, $\kappa_y = \kappa(x)$ (Εικ. 2-11),

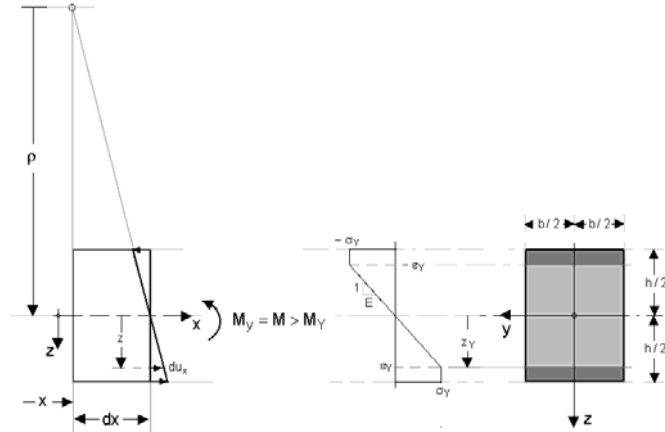
$$\frac{du_x}{z} = \frac{dx}{\rho} \Rightarrow \varepsilon_{xx} = \kappa z, \quad \kappa = \frac{1}{\rho} \quad (2.76)$$



Εικ. 2-10: Χαρακτηριστική καμπύλη τάσεων-τροπών για ελαστικό, ιδεατά πλαστικό, όλκιμο υλικό

²¹ Πρβλ. Βαρδουλάκης I. *Τεχνική Μηχανική II*, Εκδόσεις Συμμετρία, 1999.

²² Για μία διεξοδικότερη παρουσίαση της Τεχνικής Θεωρίας Πλαστικής Κάμψεως δοκών παραπέμπουμε τον αναγνώστη στο βιβλίο του Jacques Heyman, *Elements of the Theory of Structures*, Cambridge Univ. Press, Chapt. 12, 1996.



Εικ. 2-11: Ελαστοπλαστική απλή κάμψη

Το υλικό αρχίζει να διαρρέει στις ακρότατες ίνες της δοκού, όπου η αξονική τροπή λαμβάνει ακρότατες τιμές. Η μέγιστη ροπή που αντιστοιχεί στην είσοδο των ακρότατων ινών στην πλαστική περιοχή, λέγεται ροπή διαρροής σε κάμψη, $M_{Y,B}$, και αντιστοιχεί συμφώνως προς τον ελαστικό νόμο ροπής κάμψεως-καμπυλότητας,

$$M = (EI)\kappa \quad (2.77)$$

σε εκείνη την τιμή της καμπυλότητας, για την οποία έχουμε ότι,

$$\varepsilon_{xx}(\pm h/2) = \kappa_Y \frac{h}{2} = \varepsilon_Y = \frac{\sigma_Y}{E} \Rightarrow \kappa_Y = 2 \frac{\sigma_Y}{E} \frac{1}{h} \quad (2.78)$$

Υπενθυμίζουμε ότι στα πλαίσια μιας γραμμικής Τεχνικής Θεωρίας η καμπυλότητα δίδεται κατά προσέγγιση από την δεύτερη παράγωγο του βέλους κάμψεως,

$$\kappa \approx -\frac{d^2w}{dx^2} \quad (2.79)$$

Στους παραπάνω τύπους με h συμβολίσαμε το ύψος ορθογωνικής διατομής και με

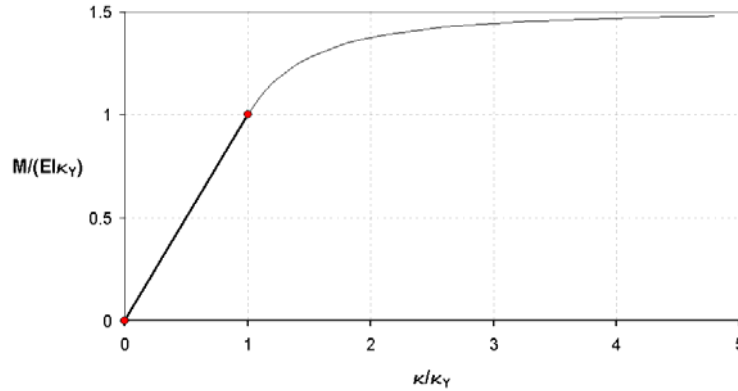
$$I = \frac{bh^3}{12} \quad (2.80)$$

την αντίστοιχη ροπή αδρανείας της ορθογωνικής διατομής. Άρα

$$M_{B,Y} = \frac{bh^2}{6} \sigma_Y \quad (2.81)$$

Αν υποθέσουμε ότι μόνο ένα τμήμα της διατομής έχει διαρρεύσει τότε από το παραπάνω σχήμα μπορούμε να υπολογίσουμε τη σχέση καμπτικής ροπής-καμπυλότητας στην ελαστοπλαστική περιοχή (Εικ. 2-12),

$$\frac{M_y}{(EI)} = \begin{cases} \kappa & \text{if } \kappa \leq \kappa_Y \text{ (ελαστική κάμψη)} \\ \frac{M_{B,F}}{(EI)} \left[1 - \frac{1}{3} \left(\frac{\kappa_Y}{\kappa} \right)^2 \right] & \text{if } \kappa \geq \kappa_Y \text{ (ελαστοπλαστική κάμψη)} \end{cases} \quad (2.82)$$



Εικ. 2-12: Ελαστοπλαστική σχέση ροπής κάμψεως -καμπυλότητας

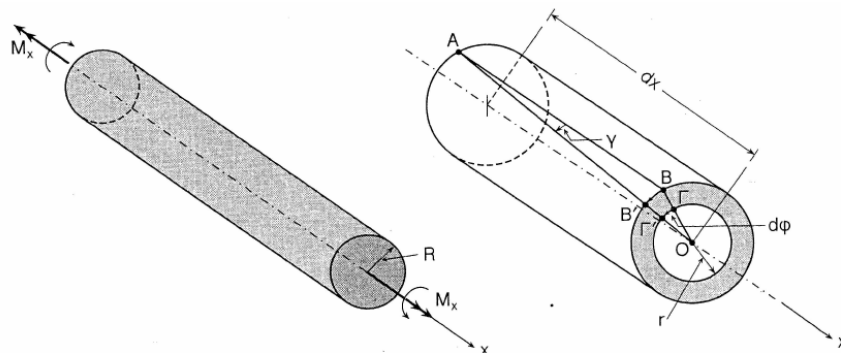
Παρατηρούμε, ότι λόγω της ανομοιογενούς κατανομής των ορθών τάσεων καθ' ύψος της διατομής, η απόκριση της διατομής στην ελαστοπλαστική περιοχή είναι μη-γραμμική, με την ροπή κάμψεως να τείνει ασυμπτωτικώς σε μία οριακή τιμή, τη ροπή καταρρεύσεως σε κάμψη, $M_{B,F}$. Άρα η ροπή καταρρεύσεως είναι η μέγιστη ροπή κάμψεως που μπορεί να παραλάβει η διατομή και, όπως προκύπτει από τα παραπάνω, αυτή αντιστοιχεί σε απειρισμό της καμπυλότητας ($\kappa \rightarrow \infty$), δηλαδή στη δημιουργία μιας πλαστικής αρθρώσεως στη θεωρούμενη θέση x . Για ορθογωνική διατομή έχουμε ότι:

$$M_{B,F} = \frac{3}{2} M_{B,Y} \Rightarrow \frac{M_{B,F}}{(EI)} = \frac{3}{2} \kappa_Y \quad (2.83)$$

Αν η διατομή έχει άλλο (απλά συμμετρικό) σχήμα, τότε η ροπή διαρροής και ο λόγος ροπής καταρρεύσεως προς ροπή διαρροής παίρνει μία αντίστοιχη τιμή, μεγαλύτερη πάντοτε της μονάδος. Π.χ. για κυκλική διατομή, ακτίνας, R έχουμε τις εξής τιμές για τη ροπή διαρροής και τον αντίστοιχο συντελεστή μορφής²³

$$M_{B,Y} = \frac{\pi}{4} R^3 \sigma_Y \Rightarrow \mu_B = \frac{M_{BF}}{M_{BY}} = \frac{16}{3\pi} \approx 1.698 \quad (2.84)$$

2.6.2 Ελαστοπλαστική στρέψη



Εικ. 2-13: Στρέψη κυλινδρικής ατράκτου

²³ Η συντελεστή "ασφαλείας" έναντι πλαστικής καταρρεύσεως

Θεωρούμε την περίπτωση ελαστοπλαστικής στρέψεως μιας άτρακτου με κυκλική διατομή, ακτίνας R (Εικ. 2-13). Κατ' αναλογία με την κάμψη, υιοθετούμε στην περίπτωση αυτή την παραδοχή Navier, περί επιπεδότητας των διατομών. Στη ροπή στρέψεως M_x αντιστοιχεί η συστροφή $\vartheta_x = \vartheta(x)$ της διατομής,

$$\vartheta = \frac{d\varphi}{dx} \quad (2.85)$$

όπου $\varphi(x)$ η γωνία στροφής της διατομής.

Στην περίπτωση της στρέψεως η σχέση ροπής στρέψεως-συστροφής έχει ως εξής:

$$\frac{M_x}{(GI_p)} = \begin{cases} \vartheta & \text{if } : \vartheta \leq \vartheta_y \text{ (ελαστική στρέψη)} \\ \frac{M_{T,F}}{(GI_p)} \left[1 - \frac{1}{4} \left(\frac{\vartheta_y}{\vartheta} \right)^2 \right] & \text{if } : \vartheta \geq \vartheta_y \text{ (ελαστοπλαστική στρέψη)} \end{cases} \quad (2.86)$$

όπου G είναι το ελαστικό μέτρο διατμήσεως του υλικού και

$$I_p = \frac{\pi}{2} R^4 \quad (2.87)$$

είναι η πολική ροπή αδρανείας της διατομής. Η συστροφή διαρροής δίδεται από τον τύπο,

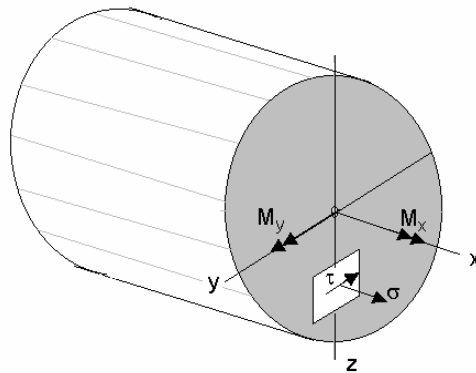
$$\vartheta_y = \frac{\tau_y}{G} \frac{1}{R} \quad (2.88)$$

όπου τ_y είναι η τάση διαρροής του υλικού σε καθαρή διάτμηση. Η στρεπτική ροπή διαρροής και καταρρεύσεως δίδονται εν προκειμένω από τους παρακάτω τύπους:

$$M_{T,Y} = \frac{\pi}{2} \tau_y R^3 \Rightarrow \mu_T = \frac{M_{T,F}}{M_{T,Y}} = \frac{4}{3} \approx 1.33 \quad (2.89)$$

Παρατηρούμε τέλος ότι η στρεπτική ροπή καταρρεύσεως $M_{T,F}$ αντιστοιχεί σε απειρισμό της συστροφής ($\vartheta \rightarrow \infty$), δηλαδή στη δημιουργία ενός πλαστικού γόμφου στη θέση x .

2.6.3 Επιφάνειες διαρροής και καταρρεύσεως κυκλικής διατομής



Εικ. 2-14: Κυλινδρική άτρακτος σε σύνθετη καταπόνηση

Θεωρούμε μια άτρακτο με κυκλική διατομή κάτω από σύνθετη καταπόνηση συνιστάμενη από ροπή κάμψεως $M_y = M_B(x)$ και ροπή στρέψεως $M_x = M_T(x)$. Οι ροπές αυτές προκαλούν την ανάπτυξη πάνω στη διατομή ορθών τάσεων σ και διατμητικών τάσεων τ , αντιστοίχως. Το κριτήριο διαρροής κατά von Mises, επιτάσσει ότι ένα υλικό σημείο της διατομής διαρρέει πλαστικά, όταν

$$\sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = \frac{3}{\sqrt{2}} \tau_{eq}^M \quad (2.90)$$

Παρατηρούμε ότι σε μονοαξονικό εφελκυσμό και θλίψη ισχύει ότι,

$$\sigma = \sigma_Y, \tau = 0 \Rightarrow \tau_{eq}^M = \frac{\sqrt{2}}{3} \sigma_Y \quad (2.91)$$

ενώ σε καθαρή διάτμηση έχουμε ότι,

$$\sigma = 0, \tau = \tau_y \Rightarrow \tau_{eq}^M = \sqrt{\frac{2}{3}} \tau_y \quad (2.92)$$

Από τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει ότι βάσει του κριτηρίου von Mises, ισχύει

$$\tau_y = \frac{\sigma_Y}{\sqrt{3}} \quad (2.93)$$

Τώρα θεωρούμε μια μεικτή εντατική κατάσταση και αναζητούμε την έκφραση για την έναρξη της διαρροής της θεωρούμενης διατομής. Στην περίπτωση αυτή οι ορθές και οι διατμητικές τάσεις στις ακραίες ίνες της διατομής δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις:

$$\sigma = \pm \frac{M_B}{W_B}, \quad W_B = \frac{\pi}{4} R^3 \quad (2.94)$$

$$\tau = \pm \frac{M_T}{W_T}, \quad W_T = \frac{\pi}{2} R^3 \quad (2.95)$$

Οπότε

$$\begin{aligned} \sigma_Y = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} &= \sqrt{\left(\frac{M_B}{W_B}\right)^2 + 3\left(\frac{M_T}{W_T}\right)^2} \Rightarrow \\ \sqrt{\left(\frac{M_B}{\sigma_Y W_B}\right)^2 + \left(\frac{M_T}{\frac{\sigma_Y}{\sqrt{3}} W_T}\right)^2} &= 1 \end{aligned} \quad (2.96)$$

Λαμβανομένου υπ' όψιν ότι οι αντίστοιχες ροπές διαρροής είναι,

$$M_{B,Y} = \sigma_Y W_B, \quad M_{T,Y} = \tau_y W_T \quad (2.97)$$

η παραπάνω συνθήκη διαρροής, εξ. (2.96) για μεικτή φόρτιση γράφεται,

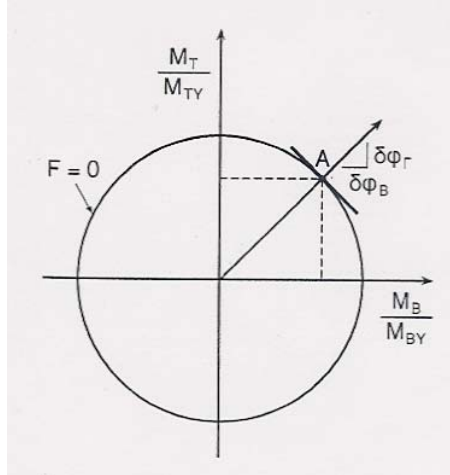
$$\sqrt{\left(\frac{M_B}{M_{B,Y}}\right)^2 + \left(\frac{M_T}{M_{T,Y}}\right)^2} = 1 \quad (2.98)$$

Ορισμός

Στο χώρο των εντατικών μεγεθών $\{M_B, M_T\}$ ορίζουμε ως "επιφάνεια διαρροής" την καμπύλη που δίδεται από την σχέση,

$$F_Y(M_B, M_T) = \sqrt{\left(\frac{M_B}{M_{B,Y}}\right)^2 + \left(\frac{M_T}{M_{T,Y}}\right)^2} - 1 = 0 \quad (2.99)$$

Όπως φαίνεται και στην Εικ. 2-15 σε κανονικοποιημένες συντεταγμένες η αντίστοιχη καμπύλη διαρροής είναι κύκλος.



Εικ. 2-15: Καμπύλη διαρροής κυλινδρικής ατράκτου κάτω από σύνθετη, καμπτική-στρεπτική καταπόνηση

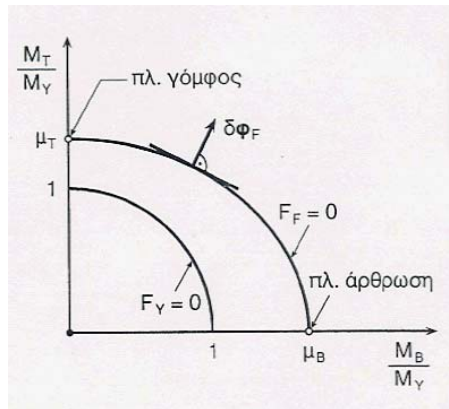
Δεχόμεθα τώρα ότι στον χώρο αυτό και στο τυχόν σημείο A της «επιφάνειας» διαρροής $F = 0$, μπορούμε να ορίσουμε κατά προσέγγιση μιας σταθεράς $\delta\lambda$ την στοιχειώδη πλαστική στροφή λόγω κάμψεως $\delta\varphi_B$ (πλαστική στροφή αρθρώσεως) και την στοιχειώδη πλαστική στροφή λόγω στρέψεως $\delta\varphi_T$ (πλαστική στροφή γόμφου). Ο προσδιορισμός των πλαστικών στροφών αυτών γίνεται συμφώνως προς το νόμο καθετότητας, που σημαίνει ότι το διάνυσμα $\{\delta\varphi_B, \delta\varphi_T\}$ είναι κάθετο στην επιφάνεια διαρροής:

$$\delta\varphi_B = \delta\lambda \frac{\partial F}{\partial M_B}, \quad \delta\varphi_T = \delta\lambda \frac{\partial F}{\partial M_T} \Rightarrow \frac{\delta\varphi_T}{\delta\varphi_B} = \frac{(M_T / M_{T,Y})}{(M_B / M_{B,Y})} \quad (2.100)$$

Ομοίως ορίζουμε και την «επιφάνεια» καταρρεύσεως της διατομής,

$$F_F(M_B, M_T) = \sqrt{\left(\frac{M_B}{M_{BF}}\right)^2 + \left(\frac{M_T}{M_{TF}}\right)^2} - 1 = 0 \quad (2.101)$$

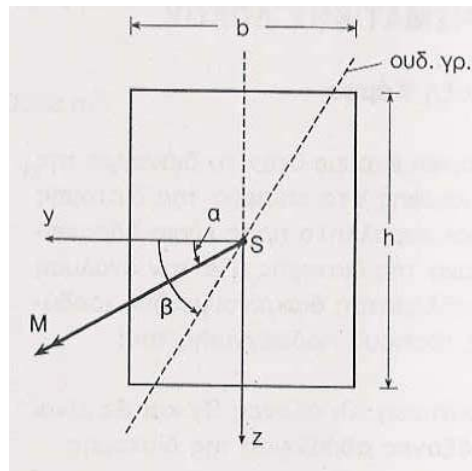
Η αντίστοιχη καμπύλη σε κανονικοποιημένες συντεταγμένες είναι έλλειψη (Εικ. 2-16).



Εικ. 2-16: Καμπύλες διαρροής και καταρρεύσεως σε μικτή καταπόνηση κυλινδρικής απράκτου

Άσκηση

Να κατασκευασθούν οι επιφάνειες διαρροής και καταρρεύσεως ορθογωνικής διατομής σε λοξή κάμψη (Εικ. 2-17).



Εικ. 2-17: Λοξή κάμψη: Θέση διανύσματος ροπής κάμψεως και θέση ουδέτερης γραμμής

