

1 ΕΝΤΑΣΗ ΚΑΙ ΑΝΤΟΧΗ

1	ΕΝΤΑΣΗ ΚΑΙ ΑΝΤΟΧΗ	7
1.1	Η Μικρομηχανική Ερμηνεία του Τανυστή των Τάσεων	9
1.1.1	Η Αρχή των Δυνατών Έργων (Α.Δ.Ε.) στα κοκκώδη μέσα	9
1.1.2	Ο μικρομηχανικός ορισμός της τάσεως κατά Love	14
1.2	Οι Αναλλοίωτες του Τανυστή των Τάσεων	17
1.3	Αξονοσυμμετρικές Εντατικές Καταστάσεις	23
1.4	Η Φυσική Ερμηνεία των Αναλλοίωτων του Τανυστή των Τάσεων	26
1.5	Ζώνες Διατμήσεως	28
1.6	Μέγιστη, Μέση και Οκταεδρική Διατμητική Τάση	30
1.7	Κριτήρια Αστοχίας κατά Tresca και von Mises	33
1.8	Κριτήριο Αστοχίας κατά Mohr-Coulomb	36
1.9	Παράρτημα : Ο κύκλος Mohr των τάσεων	38

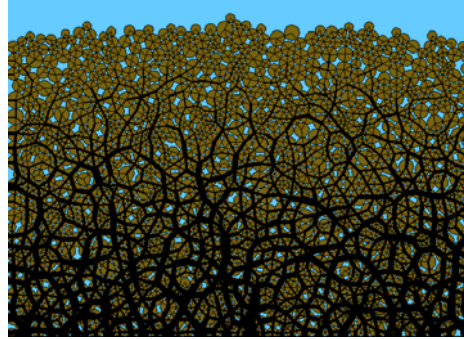
Στο εισαγωγικό αυτό κεφάλαιο ξεκινάμε με μία αναφορά στη μικρομηχανική των κοκκωδών υλικών και στη συνέχεια συνοψίζουμε τις βασικές έννοιες και ορισμούς σχετικά με τις έννοιες της εντάσεως και της αντοχής όπως αυτές απαντώνται στην θεωρία «Αντοχής των Υλικών».

© 1. ΕΝΤΑΣΗ ΚΑΙ ΑΝΤΟΧΗ, 2008

Ιωάννης Γ. Βαρδουλάκης, Dr-Ing., Καθηγητής της Μηχανικής στο Ε.Μ. Πολυτεχνείο
Τ.Θ. 144, Παιανία 190-02, <http://geolab.mechan.ntua.gr/>, I.Vardoulakis@mechan.ntua.gr

1.1 Η Μικρομηχανική Ερμηνεία του Τανυστή των Τάσεων

1.1.1 Η Αρχή των Δυνατών Έργων (Α.Δ.Ε.) στα κοκκώδη μέσα¹



Εικ. 1-1: Αριθμητική προσομοίωση των δυνάμεων επαφής που αναπτύσσονται μεταξύ των κόκκων σε κοκκώδες μέσο υπό την επίδραση της βαρύτητας

Εδώ θα σκιαγραφήσουμε μια μικρομηχανική προσέγγιση στο πρόβλημα της εντάσεως, όπως αυτή απαντάται στη Μηχανική των κοκκωδών μέσων^{2,3}. Από τη σκοπιά της Μικρομηχανικής τα διάφορα μεγέθη, κινηματικά ή στατικά ορίζονται με κάποια στατιστική διαδικασία πάνω στο λεγόμενο αντιπροσωπευτικό στοιχειώδη όγκο⁴ (REV). Αξίζει να σημειώσουμε ότι κατά τα τελευταία 30 χρόνια έχουν αναπτυχθεί πολλοί υπολογιστικοί κώδικες που βασίζονται στη λεγόμενη Μέθοδο των Διακριτών Στοιχείων^{5,6} που μας επιτρέπουν να πραγματοποιήσουμε υπολογιστικά πειράματα και να μελετήσουμε τις μηχανικές ιδιότητες των κοκκωδών υλικών στη κλίμακα του κόκκου (Εικ. 1-1). Σε ένα σώμα με κοκκώδη μικροδομή υποθέτουμε ότι ανά πάσα στιγμή οι κόκκοι βρίσκονται σε επαφή με ορισμένους από τους γείτονές τους. Γεωμετρικά η επαφή δύο κόκκων, κ_n και κ_m , χαρακτηρίζεται από το κοινό σημείο επαφής $c(m,n)$, το κοινό επίπεδο επαφής $\varepsilon(m,n)$ και από τα μοναδιαία κάθετα διανύσματα στο επίπεδο επαφής, $n_k^{nc} = -n_k^{mc}$, που βρίσκονται στην ευθεία που συνδέει τα κέντρα των κόκκων και η οποία περιέχει το σημείο επαφής c . Από στατική σκοπιά η επαφή δύο κόκκων χαρακτηρίζεται από το ζεύγος δυνάμεων επαφής, $F_k^{nc} = -F_k^{mc}$, που ασκούνται στο σημείο επαφής από τον ένα κόκκο στον άλλο (Εικ. 1-2). Στη βάση αυτή περιγράφουμε το πραγματικό κοκκώδες υλικό από μεν γεωμετρικής σκοπιάς με το χωροδικτύωμα (γράφημα) εκείνο που έχει ως κόμβους τα κέντρα των σφαιρικών κόκκων από δε στατικής πλευράς με το χωροδικτύωμα εκείνο που έχει ως τάσεις «ράβδων» το πλέγμα των δυνάμεων επαφής (Εικ. 1-3). Σημειώνουμε ότι τα χωροδικτύωματα της γεωμετρικής και της στατικής μικροδομής γενικώς δεν ταυτίζονται. Αυτά ταυτίζονται μόνο στην περίπτωση όπου οι κόκκοι θεωρούνται ότι είναι λείες σφαίρες, οπότε κατά τις επαφές τους μόνο ορθές δυνάμεις μπορούν να ασκηθούν.

¹ Bardet, J.-P. and Vardoulakis (2001). The asymmetry of stress in granular media. Int. J. Solids Struct., 38, 353-367.

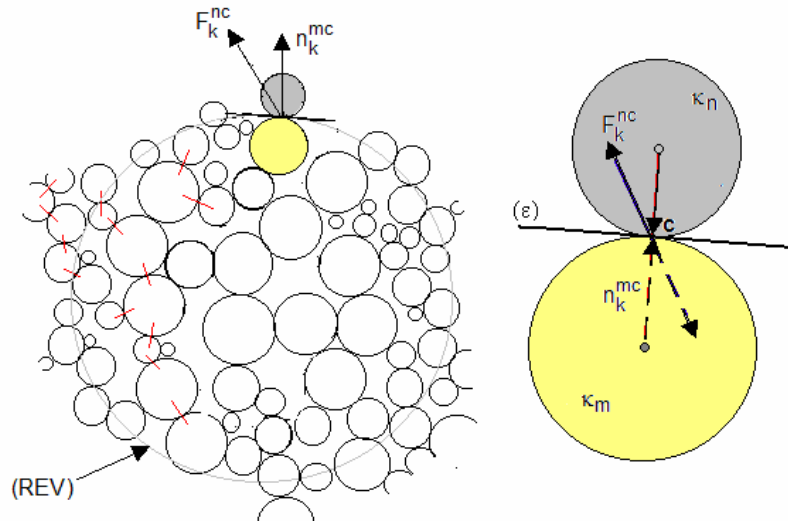
² Christoffersen, J., M. M. Mehrabadi, S. Nemat-Nasser (1981), A micromechanical description of granular material behavior, Journal of Applied Mechanics, ASME, Vol. 48, pp. 339-344.

³ Rothenberg, L., and A. P. S. Selvadurai (1981). Micromechanical definition of the Cauchy stress tensor for particulate media, In: Mechanics of Structured Media (edited by A.P.S. Selvadurai), Elsevier, pp. 469-486.

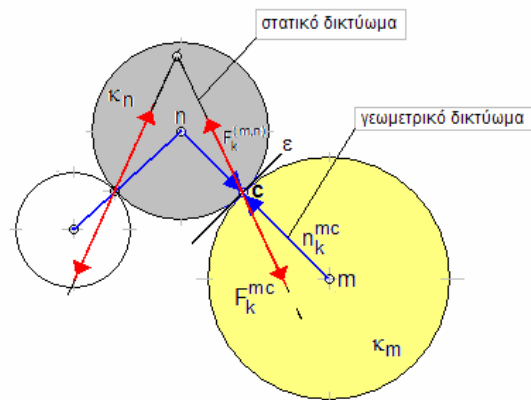
⁴ Αγγλ. Representative Elementary Volume (REV).

⁵ Αγγλ. Discrete Element Method (DEM)

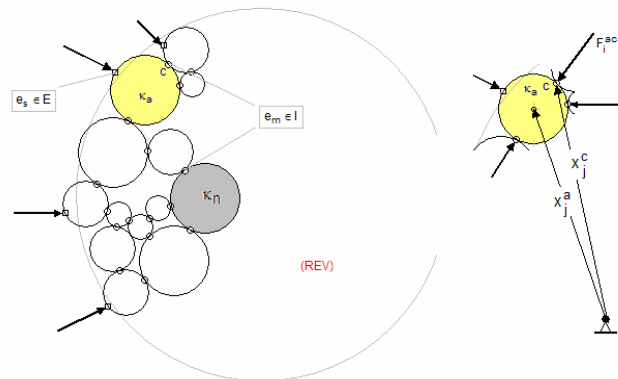
⁶ Cundall P.A., Strack O.D.L. (1979). A discrete numerical model for granular assemblies, Géotechnique 29, No 1, 47-65.



Εικ. 1-2: Ο αντιπροσωπευτικός στοιχειώδης όγκος (REV) και δυνάμεις επαφής μεταξύ κόκκων.



Εικ. 1-3: Κοκκώδης μικροδομή: το γεωμετρικό και το στατικό χωροδικτύωμα



Εικ. 1-4: Θέσεις κόκκων και σημείων επαφής κόκκων

Θεωρούμε ένα χαρακτηριστικό στοιχειώδη όγκο (REV), ο οποίος περιέχει N τον αριθμό κόκκους, οι οποίοι βρίσκονται σε επαφή μεταξύ τους και ορισμένοι εκ των οποίων φορτίζονται εξ επαφής μέσω εξωτερικών φορτίων στην περιφέρεια του (REV). Στην περίπτωση που ο (REV) είναι μικρός η επίδραση των καθολικών δυνάμεων θεωρείται αμελητέα. Όλοι οι κόκκοι στον (REV) ομαδοποιούνται σε ένα σύνολο στο οποίο αντιστοιχεί το σύνολο δεικτών αριθμησεώς τους,

$$B = \{\kappa_1, \dots, \kappa_a, \dots, \kappa_N\} \leftrightarrow B = \{1, \dots, a, \dots, N\} \quad (1.1)$$

Οι δυνάμεις οι οποίες δρουν στους κόκκους του (REV) είναι συγκεντρωμένα φορτία που ασκούνται σε M τον αριθμό σημεία επαφής,

$$C = \{e_1, \dots, e_s, \dots, e_M\} \leftrightarrow \Gamma = \{1, \dots, s, \dots, M\} \quad (1.2)$$

Το υποσύνολο $I \subset C$ περιλαμβάνει τα σημεία επαφής των κόκκων στο εσωτερικό του (REV), ενώ το υποσύνολο $E \subset C$ περιλαμβάνει τα σημεία όπου ασκούνται στο σύνορο του (REV):

$$\begin{aligned} I &= \{e_1, \dots, e_{M_1}\} \leftrightarrow I = \{1, \dots, M_1\} \\ E &= \{e_{M_1+1}, \dots, e_M\} \leftrightarrow E = \{M_1+1, \dots, M\} \\ I \cup E &= C, \quad I \cap E = \emptyset \end{aligned} \quad (1.3)$$

Τα υποσύνολα $I_a \leftrightarrow I_a$ και $E_a \leftrightarrow E_a$ αφορούν στα σημεία επαφής του κόκκου κ_a αντιστοίχως με κόκκους στο εσωτερικό του (REV) και με κόκκους εξωτερικά του (REV), ενώ το σύνολο $C_a \leftrightarrow \Gamma_a$ αφορά στα σημεία επαφής του κόκκου συνολικά, οπότε

$$\begin{aligned} C &= \bigcup_{a \in B} C_a, \quad C_a = I_a \cup E_a \\ I &= \bigcup_{a \in B} I_a, \quad E = \bigcup_{a \in B} E_a \end{aligned} \quad (1.4)$$

όπου για δύο διαφορετικούς κόκκους κ_a και κ_b ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις

$$E_a \cap E_b = \emptyset, \quad I_a \cap I_b = \{e_c\} \quad \forall \kappa_a \neq \kappa_b \in B \quad (1.5)$$

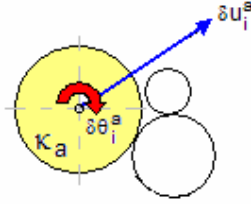
Μια δεδομένη συσκευασία κόκκων είναι σε ισορροπία όταν κάθε κόκκος είναι σε ισορροπία, δηλαδή όταν όλες οι εσωτερικές και εξωτερικές δυνάμεις που δρουν στον κόκκο είναι σε ισορροπία. Ισορροπία δυνάμεων και ροπών εκφράζονται από τις εξής εξισώσεις αντιστοίχως,

$$\sum_{c \in C_a} F_i^{ac} = 0 \quad (1.6)$$

$$\sum_{c \in C_a} \varepsilon_{ijk} (x_j^c - x_j^a) F_k^{ac} = 0 \quad (1.7)$$

όπου x_i^a και x_i^c είναι τα διανύσματα θέσεως του κέντρου του κόκκου και του σημείου επαφής του με εσωτερικούς κόκκους ή του σημείου εφαρμογής εξωτερικού φορτίου.

Δεχόμεθα ότι δυναμική κινηματική του τυχόντος κόκκου κ_a (θεωρουμένου ως απολύτως στερεού σώματος) συνοψίζεται σε μία δυνατή μετατόπιση δu_i^a και μία δυνατή στροφή $\delta \theta_i^a$ (Εικ. 1-5).



Εικ. 1-5: Δυνατή μετατόπιση και δυνατή στροφή κόκκου.

Πολλαπλασιάζοντας τις παραπάνω εξισώσεις ισορροπίας (1.6) και (1.7) με τη δυνατή μετατόπιση δu_i^a και τη δυνατή στροφή $\delta \theta_i^a$ και αθροίζοντας τις εξισώσεις που προκύπτουν για όλους τους κόκκους στον (REV) , παίρνουμε την εξής έκφραση

$$\sum_{a \in B} \sum_{c \in C_a} \left(F_i^{ac} \delta u_i^a + \varepsilon_{ijk} (x_j^c - x_j^a) F_k^{ac} \delta \theta_i^a \right) = 0 \quad (1.8)$$

Το παραπάνω διπλό άθροισμα πάνω στα σύνολα C_a και B μπορεί να αναλυθεί σε δύο αθροίσματα πάνω στα σύνολα I και E . Λαμβάνοντας δε υπόψη το γεγονός ότι οι εσωτερικές δυνάμεις εμφανίζονται στα αθροίσματα αυτά κατά ζεύγη αντιθέτων δυνάμεων,

$$F_i^c = F_i^{ac} = -F_i^{bc} \quad (1.9)$$

παίρνουμε τελικά την εξής έκφραση για την Α.Δ.Ε.

$$\delta W^{(D,ext)} = \delta W^{(D,int)} \quad (1.10)$$

όπου οι ποσότητες $\delta W^{(D,ext)}$ και $\delta W^{(D,int)}$ συνιστούν αντιστοίχως⁷: α) Το δυνατό έργο των εξωτερικών δυνάμεων, που δρουν στο διακριτό μέσο

$$\delta W^{(D,ext)} = \sum_{e \in E} F_i^e \delta u_i^e \quad (1.11)$$

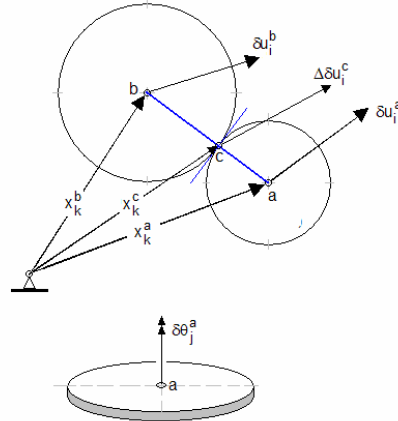
όπου δu_i^e είναι η δυνατή μετατόπιση του σημείου εφαρμογής e του εξωτερικού φορτίου F_i^e και β) το δυνατό έργο των εσωτερικών δυνάμεων:

$$\delta W^{(D,int)} = \sum_{c \in I} F_i^c \Delta \delta u_i^c \quad (1.12)$$

όπου $\Delta \delta u_i^c$ είναι η μετατόπιση το σημείου επαφής C των κόκκων κ_a και κ_b (Εικ. 1-6),

⁷ Ο δείκτης D συμβολίζει ότι οι εκφράσεις αυτές αντιστοιχούν σε δυνατά έργα για το διακριτό (Αγγλ. *discrete*) σύστημα των κόκκων

$$\Delta \delta u_i^c = \delta u_i^b - \delta u_i^a + \varepsilon_{ijk} \left(\delta \theta_j^b (x_k^c - x_k^b) - \delta \theta_j^a (x_k^c - x_k^a) \right) \quad (1.13)$$



Εικ. 1-6: Δυνατές μετατοπίσεις και στροφές

Οι δυνατές μετατοπίσεις και στροφές μπορούν να επιλεγούν τυχαία. Ειδικότερα μπορούν να επιλεγούν ως συναρτήσεις του διανύσματος θέσεως του κέντρου του κόκκου:

$$\delta u_i^a = a_i + b_{ij} x_j^a + \dots \quad (1.14)$$

$$\delta \theta_i^a = \alpha_i + \beta_{ij} x_j^a + \dots \quad (1.15)$$

για τυχαίους συντελεστές a_i , b_{ij} και α_i , β_{ij} , οπότε:

$$\Delta \delta u_i^c = b_{ij} (x_j^b - x_j^a) - \alpha_j \varepsilon_{ijk} (x_k^b - x_k^a) + \beta_{jl} \varepsilon_{ijk} (x_l^b (x_k^c - x_k^b) - x_l^a (x_k^c - x_k^a)) + \dots \quad (1.16)$$

και

$$\begin{aligned} \delta u_i^e &= \delta u_i^a + \varepsilon_{ijk} \delta \theta_j^a (x_k^e - x_k^{ae}) + \dots \\ &= a_i + b_{ij} x_j^{ae} + \varepsilon_{ijk} \alpha_j (x_k^e - x_k^{ae}) + \varepsilon_{ijk} \beta_{jl} x_l^{ae} (x_k^e - x_k^{ae}) + \dots \end{aligned} \quad (1.17)$$

όπου το διάνυσμα x_k^{ae} δίνει τη θέση του κέντρου a του κόκκου κ_a με την εξωτερική επαφή e .

Με τις παραπάνω παραδοχές παίρνουμε τις εξής εκφράσεις για τα έργα των εξωτερικών και εσωτερικών δυνάμεων:

$$\delta W^{(D,int)} = b_{ij} \sum_{c \in I} F_i^c (x_j^b - x_j^a) - \alpha_j \sum_{c \in I} \varepsilon_{ijk} F_i^c (x_k^b - x_k^a) + \dots \quad (1.18)$$

$$\delta W^{(D,ext)} = a_i \sum_{e \in E} F_i^e + b_{ij} \sum_{e \in E} F_i^e x_j^{ae} + \alpha_j \sum_{e \in E} \varepsilon_{ijk} F_i^e (x_k^e - x_k^{ae}) + \dots \quad (1.19)$$

Από την Α.Δ.Ε., εξ. (1.10) παίρνουμε διαδοχικά τις εξής εξισώσεις ισορροπίας:

$$b_{ij} = 0, \alpha_i = 0, \dots \Rightarrow a_i \sum_{e \in E} F_i^e = 0 \quad \forall a_i \Leftrightarrow \sum_{e \in E} F_i^e = 0 \quad (1.20)$$

Η εξ. (1.20) εκφράζει την ισορροπία των εξωτερικών δυνάμεων που ασκούνται στον (REV) . Επίσης,

$$a_i = 0, \alpha_i = 0, \dots \Rightarrow b_{ij} \sum_{c \in I} F_i^c (x_j^b - x_j^a) = b_{ij} \sum_{e \in E} F_i^e x_j^{ae} \quad \forall b_{ij} \Leftrightarrow \sum_{c \in I} F_i^c (x_j^b - x_j^a) = \sum_{e \in E} F_i^e x_j^{ae} \quad (1.21)$$

και

$$a_i = 0, b_{ij} = 0, \dots \Rightarrow -\alpha_j \sum_{c \in I} \varepsilon_{ijk} F_i^c (x_k^b - x_k^a) = \alpha_j \sum_{e \in E} \varepsilon_{ijk} F_i^e (x_k^e - x_k^{ae}) \quad \forall \alpha_j \Leftrightarrow -\sum_{c \in I} \varepsilon_{ijk} F_i^c (x_k^b - x_k^a) = \sum_{e \in E} \varepsilon_{ijk} F_i^e (x_k^e - x_k^{ae}) \quad (1.22)$$

Αν δεχθούμε τώρα ότι η ποσότητες $(x_k^e - x_k^{ae})$ είναι της τάξεως μεγέθους της ακτίνας του κόκκου

$$|x_k^e - x_k^{ae}| = O(R_g) \quad (1.23)$$

τότε η παραπάνω εξίσωση ισορροπίας ροπών (1.22) δίνει κατά προσέγγιση την εξής σχέση,

$$\varepsilon_{ijk} \sum_{c \in I} F_i^c (x_k^b - x_k^a) = 0 \quad (1.24)$$

1.1.2 Ο μικρομηχανικός ορισμός της τάσεως κατά Love

Κατά τη μετάβαση από το Διακριτό κοκκώδες Μέσο στο Συνεχές Μέσο⁸ παρατηρούμε ότι ο ταυνοστής των τάσεων κατά Cauchy στο Συνεχές ικανοποιεί τις εξισώσεις ισορροπίας. Όπως αναφέραμε στην περίπτωση που ο (REV) είναι μικρός η επίδραση των καθολικών δυνάμεων θεωρείται αμελητέα, οπότε έχουμε τις εξής εξισώσεις ισορροπίας,

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} = 0 \quad \forall x_k \in V_{REV} \quad (1.25)$$

$$\sigma_{ij} n_i = t_j \quad \forall x_k \in \partial V_{REV} \quad (1.26)$$

Για τον υπολογισμό μιας μέσης τιμής της τάσεως στον (REV) ακολουθούμε την εξής διαδικασία⁹: Πολλαπλασιάζουμε την εξ. (1.25) με x_k και ολοκληρώνουμε πάνω στον όγκο του (REV) , οπότε παίρνουμε,

⁸ Froio, F., Tomassetti, G. and Vardoulakis, I. (2006). Mechanics of granular materials: the discrete and the continuum descriptions juxtaposed, Int. J. Solids Structures, 43, 7684–7720.

⁹ L.D. Landau and E.M. Lifshitz, *Theory of Elasticity*, Vol.7, sect. 2, p.7, Pergamon Press, 1959.

$$\begin{aligned}
\int_{V_{REV}} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} x_k dV &= \int_{V_{REV}} \frac{\partial (\sigma_{ij} x_k)}{\partial x_i} dV - \int_{V_{REV}} \sigma_{ij} \frac{\partial x_k}{\partial x_i} dV = 0 \Rightarrow \\
\int_{\partial V_{REV}} \sigma_{ij} x_k n_i dS - \int_{V_{REV}} \sigma_{ij} \delta_{ki} dV &= 0 \Rightarrow \\
\int_{\partial V_{REV}} t_j x_k dS &= \int_{V_{REV}} \sigma_{kj} dV
\end{aligned} \tag{1.27}$$

Ορίζουμε τώρα τη μέση τάση

$$\bar{\sigma}_{ij} = \frac{1}{V_{REV}} \int_{V_{REV}} \sigma_{ij} dV \tag{1.28}$$

οπότε από τις εξ. (1.28) και (1.27) τελικά παίρνουμε

$$\bar{\sigma}_{ij} = \frac{1}{V_{REV}} \int_{\partial V_{REV}} x_i t_j dS \tag{1.29}$$

Αντιπαραβάλλοντας τις εξ. (1.21) και (1.29) και θέτοντας

$$t_j dS \approx F_j^e \tag{1.30}$$

οδηγούμεθα σε μία έκφραση που μας επιτρέπει τον υπολογισμό της μέσης τάσεως από τις δυνάμεις επαφής και τη θέση των επαφών των κόκκων που βρίσκονται στο σύνορο του (REV)

$$\bar{\sigma}_{ij} \approx \frac{1}{V_{REV}} \sum_{e \in E} x_i^{ae} F_j^e = \frac{1}{V_{REV}} \sum_{c \in I} (x_i^b - x_i^a) F_j^c \tag{1.31}$$

ή

$$\bar{\sigma}_{ij} \approx \frac{1}{V_{REV}} \sum_{c \in I} \ell_i^c F_j^c \tag{1.32}$$

όπου

$$\ell_i = x_i^b - x_i^a \tag{1.33}$$

είναι το διάνυσμα που ενώνει τα κέντρα των εκάστοτε δύο κόκκων σε επαφή. Η παραπάνω σχέση, εξ.(1.32), για τον υπολογισμό της τάσεως αποδίδεται στον Love¹⁰.

Τέλος παρατηρούμε ότι από τις εξ. (1.24) και (1.32) προκύπτει (προσεγγιστικά) η συμμετρία της μέσης τάσεως

$$\varepsilon_{ijk} \sum_{c \in I} F_i^c \ell_k^c \approx 0 \Rightarrow \varepsilon_{ijk} \bar{\sigma}_{ki} \approx 0 \tag{1.34}$$

οπότε για

¹⁰ A.E.H. Love, *A Treatise of the Mathematical Theory of Elasticity*, Cambridge University Press, 1927.

$$j=1: \varepsilon_{312}\bar{\sigma}_{23} + \varepsilon_{213}\bar{\sigma}_{32} \approx 0 \Rightarrow \bar{\sigma}_{23} \approx \bar{\sigma}_{32} \text{ κ.ο.κ.} \quad (1.35)$$

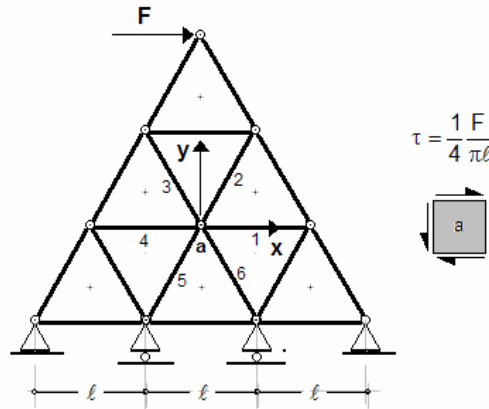
ή

$$\bar{\sigma}_{ij} \approx \bar{\sigma}_{ji} \quad (1.36)$$

Στην περίπτωση αυτή ο παραπάνω τύπος του Love θα πάρει την εξής μορφή,

$$\bar{\sigma}_{ij} \approx \frac{1}{2V_{REV}} \sum_{c \in I} (\ell_i^c F_j^c + \ell_j^c F_i^c) \quad (1.37)$$

Παράδειγμα



Εικ. 1-7: Υπολογισμός της ισοδύναμης τάσεως σε συνεχή δίσκο

Πίνακας 1-1: Επίλυση του δικτύωματος και υπολογισμός της ισοδύναμης τάσεως στον κεντρικό κόμβο (Εικ. 1-7)

Ράβδος	S/F	φ	l_x	l_y	S_x	S_y	sigmaxx	sigmaxy	sigmayx	sigmayy
1	0.143	0	1.000	0.000	0.143	0.000	0.143	0.000	0.000	0.000
2	0.000	60	0.500	0.866	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
3	0.000	120	-0.500	0.866	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
4	-0.143	180	-1.000	0.000	0.143	0.000	-0.143	0.000	0.000	0.000
5	0.286	240	-0.500	-0.866	-0.143	-0.247	0.071	0.124	0.124	0.214
6	-0.286	300	0.500	-0.866	-0.143	0.247	-0.071	0.124	0.124	-0.214
							0.00	0.25	0.25	0.00

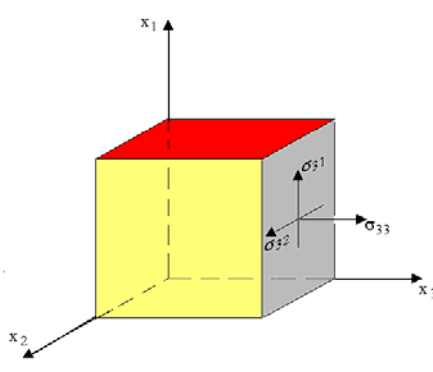
Για την επεξήγηση του παραπάνω τύπου του Love για τον υπολογισμό της μέσης τάσεως σε ένα διακριτό μέσο, εξ. (1.37), θα θεωρήσουμε το εξής απλό παράδειγμα: Έστω ένα απλό επίπεδο τριγωνικό δικτύωμα, αποτελούμενο από ράβδους του ίδιου μήκους και της ίδιας στιβαρότητας, φορτιζόμενο στην κορυφή του από οριζόντιο φορτίο F [kN/m], όπως φαίνεται στην Εικ. 1-7. Θεωρούμε τον κεντρικό κόμβο (a) και τους γειτονικούς του, με τους οποίους αυτός συνδέεται μέσω των ράβδων (1) ως (6). Επιλύοντας τον φορέα βρίσκουμε τις τάσεις των ράβδων αυτών *διάτμηση* (Πίνακας 1-1) και εφαρμόζουμε τον τύπο του Love ως εξής:

$$\bar{\sigma}_{ij} \approx \frac{1}{2\pi\ell^2} \sum_{c=1}^6 (\ell_i^c S_j^c + \ell_j^c S_i^c) \quad (1.38)$$

οπότε προκύπτει ότι η εντατική κατάσταση στον κόμβο (a) είναι απλή διάτμηση:

$$[\bar{\sigma}] = \begin{bmatrix} 0 & 1/4 \\ 1/4 & 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{F}{\pi\ell} \quad (1.39)$$

1.2 Οι Αναλλοίωτες του Τανυστή των Τάσεων



Εικ. 1-8: Συμβολισμός των συνιστωσών του ελκυστή των τάσεων σε επίπεδα κάθετα προς τους άξονες καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων

Θεωρούμε τον συμμετρικό πραγματικό ή κατά Cauchy τανυστή των τάσεων σε καρτεσιανή μορφή σε σύστημα αξόνων $O(x_1, x_2, x_3)$ (Εικ. 1-8.),

$$[\bar{\sigma}] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (1.40)$$

Ο τανυστής αυτός αναλύεται σε ισότροπο ή σφαιρικό και αποκλίνοντα¹¹,

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij} + s_{ij} \quad (1.41)$$

όπου

$$\sigma_{kk} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} \quad (1.42)$$

είναι το ίχνος του τανυστή των τάσεων και

$$s_{11} = \frac{1}{3} (2\sigma_{11} - \sigma_{22} - \sigma_{33}), \quad s_{12} = \sigma_{12}, \quad \text{κ.ο.κ.} \quad (1.43)$$

είναι οι συνιστώσες του αποκλίνοντα. Παρατηρούμε ότι οι κύριοι άξονες του τανυστή των τάσεων και του αποκλίνοντά του ταυτίζονται (γιατί;). Σε σύστημα κυρίων αξόνων $O(x_1', x_2', x_3')$ οι τανυστές αυτοί παρίστανται από τους παρακάτω διαγώνιους πίνακες

¹¹ Αγγλ. deviator

$$[\bar{\sigma}'] = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}, \quad [\bar{s}'] = \begin{bmatrix} s_1 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 \\ 0 & 0 & s_3 \end{bmatrix} \quad (1.44)$$

Παρατήρηση

Γενικώς οι ιδιοτιμές ενός πίνακα $[A_{ij}]$ ικανοποιούν την χαρακτηριστική εξίσωση (γιατί):

$$|A_{ij} - \alpha \delta_{ij}| = 0 \Rightarrow \alpha^3 - I_A \alpha^2 + II_A \alpha - III_A = 0 \quad (1.45)$$

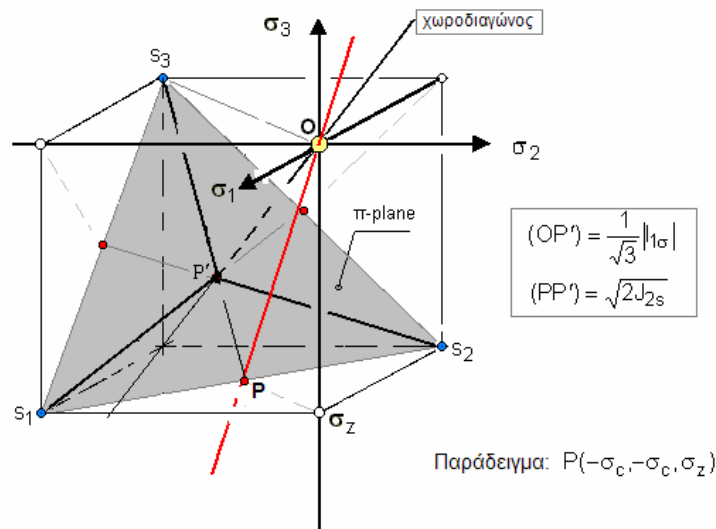
όπου I_A , II_A και III_A είναι οι βασικές αναλλοίωτες του πίνακα $[\bar{A}]_{3 \times 3}$, που δίδονται από τις παρακάτω σχέσεις συναρτήσεων των στοιχείων του πίνακα $[\bar{A}] = [A_{ij}]$ και των ιδιοτιμών του $\alpha_{i'}$ ($i' = 1, 2, 3$):

$$I_A = A_{11} + A_{22} + A_{33} = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \quad (1.46)$$

$$II_A = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_{22} & A_{23} \\ A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_{11} & A_{13} \\ A_{31} & A_{33} \end{vmatrix} = \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_2 \alpha_3 + \alpha_3 \alpha_1 \quad (1.47)$$

$$III_A = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \quad (1.48)$$

Σημειώνουμε ότι οι ιδιοτιμές ενός τετραγωνικού συμμετρικού πίνακα είναι πραγματικοί αριθμοί¹².



Εικ. 1-9: Χώρος των κορίων τάσεων κατά Haigh-Westergaard

¹² Pettofrezzo, A.J., *Matrices and Transformations*, Dover, 1966

Όταν η εντατική κατάσταση αναφέρεται σε σύστημα κυρίων αξόνων, τότε δύναται αυτή να παρασταθεί γεωμετρικά σε ένα καρτεσιανό χώρο, τον λεγόμενο χώρο των κυρίων τάσεων κατά Haigh-Westergaard (Εικ. 1-9). Στον χώρο αυτό η εντατική κατάσταση παρίσταται με το διάνυσμα θέσεως

$$\vec{OP} = \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{Bmatrix} \quad (1.49)$$

Το διάνυσμα αυτό προβάλλεται αντιστοίχως στην λεγόμενη χωροδιαγώνιο και σε κάθετο προς αυτήν επίπεδο (π). Πάνω στην χωροδιαγώνιο απεικονίζονται όλες οι ισότροπες εντατικές καταστάσεις, δηλαδή οι εντατικές καταστάσεις με, $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$, ενώ πάνω στο επίπεδο (π), που διέρχεται από την αρχή των αξόνων, το λεγόμενο και «αποκλίνον επίπεδο», απεικονίζονται όλες οι καθαρώς αποκλίνουσες από την ισότροπη εντατικές καταστάσεις, δηλ. οι εντατικές καταστάσεις με $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$.

Έστω η $1^{\text{η}}$ αναλλοίωτη ποσότητα του τανυστή των τάσεων,

$$I_{1\sigma} = \sigma_{kk} = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \quad (1.50)$$

οπότε,

$$\sigma_1 = s_1 + \frac{1}{3}I_{1\sigma}, \text{ κ.ο.κ.} \quad (1.51)$$

Παρατηρούμε ότι η $1^{\text{η}}$ αναλλοίωτος του αποκλίνοντος τανυστή μηδενίζεται,

$$J_{1s} = s_{kk} = s_1 + s_2 + s_3 = 0 \quad (1.52)$$

Άρα για τον υπολογισμό των κυρίων τάσεων σ_i ($i=1,2,3$) αρκεί να υπολογίσουμε τις κύριες τάσεις s_i ($i=1,2,3$). Αυτές δίδονται από την εξής χαρακτηριστική εξίσωση (γιατί):

$$s^3 - J_{2s} s - J_{3s} = 0 \quad (1.53)$$

οι συντελεστές της οποίας είναι αντιστοίχως η $2^{\text{η}}$ και $3^{\text{η}}$ αναλλοίωτος του αποκλίνοντος τανυστή των τάσεων,

$$J_{2s} = \frac{1}{2}s_{ij}s_{ji} = \frac{1}{2}(s_1^2 + s_2^2 + s_3^2) \quad (1.54)$$

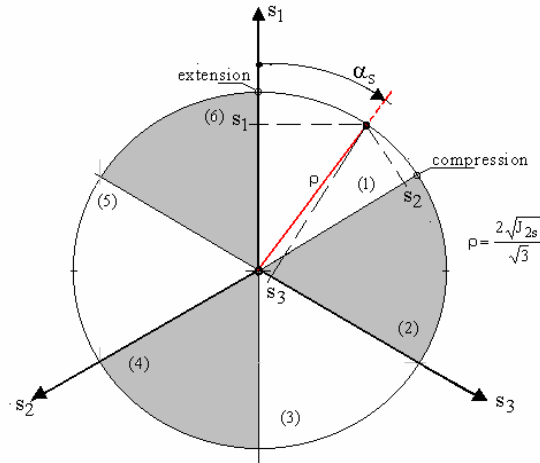
$$J_{3s} = \frac{1}{3}s_{ij}s_{jk}s_{ki} = \frac{1}{3}(s_1^3 + s_2^3 + s_3^3) \quad (1.55)$$

Επειδή ο τανυστής των τάσεων είναι συμμετρικός, έχει πραγματικές ιδιοτιμές, οπότε η λύση της παραπάνω χαρακτηριστικής κυβικής εξ. (1.53) για τις ιδιοτιμές του αποκλίνοντος δίδεται με τη βοήθεια τριγωνομετρικών συναρτήσεων μιας βοηθητικής γωνίας α_s ως εξής:

$$s_1 = \frac{2\sqrt{J_{2s}}}{\sqrt{3}} \cos \alpha_s, \quad s_2 = -\frac{2\sqrt{J_{2s}}}{\sqrt{3}} \cos \left(\frac{\pi}{3} - \alpha_s \right), \quad s_3 = -\frac{2\sqrt{J_{2s}}}{\sqrt{3}} \cos \left(\frac{\pi}{3} + \alpha_s \right) \quad (1.56)$$

Όπου (Εικ. 1-10)

$$\begin{aligned}
(1) : 0 \leq \alpha_s \leq \pi/3 \quad (s_2 \leq s_3 \leq s_1) : \alpha_s &= \alpha_{s_0} \\
(2) : \pi/3 \leq \alpha_s \leq 2\pi/3 \quad (s_2 \leq s_1 \leq s_3) : \alpha_s &= -\alpha_{s_0} + 2\pi/3 \\
(3) : 2\pi/3 \leq \alpha_s \leq \pi \quad (s_1 \leq s_2 \leq s_3) : \alpha_s &= \alpha_{s_0} + 2\pi/3 \\
(4) : \pi \leq \alpha_s \leq 4\pi/3 \quad (s_1 \leq s_3 \leq s_2) : \alpha_s &= -\alpha_{s_0} + 4\pi/3 \\
(5) : 4\pi/3 \leq \alpha_s \leq 5\pi/3 \quad (s_3 \leq s_1 \leq s_2) : \alpha_s &= \alpha_{s_0} + 4\pi/3 \\
(6) : 5\pi/3 \leq \alpha_s \leq 2\pi \quad (s_3 \leq s_2 \leq s_1) : \alpha_s &= -\alpha_{s_0} + 2\pi
\end{aligned} \tag{1.57}$$



Εικ. 1-10: Γεωμετρική απεικόνιση της λύσεως της χαρακτηριστικής εξ. (1.53) του αποκλίνοντος

Η γωνία α_{s_0} καλείται αναλλοίωτη τασική γωνία ομοιότητας και ορίζεται ως εξής¹³

$$\cos 3\alpha_{s_0} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{J_{3s}}{J_{2s}^{3/2}}, \quad 0 \leq \alpha_{s_0} \leq \pi/3 \tag{1.58}$$

Στην βιβλιογραφία καμιά φορά αντί της αναλλοίωτης γωνίας α_{s_0} χρησιμοποιείται η παράμετρος Lode¹⁴ ή η λεγόμενη παράμετρος¹⁵ b, οι οποίες στο 1ο εκτιμόριο ορίζονται ως εξής:

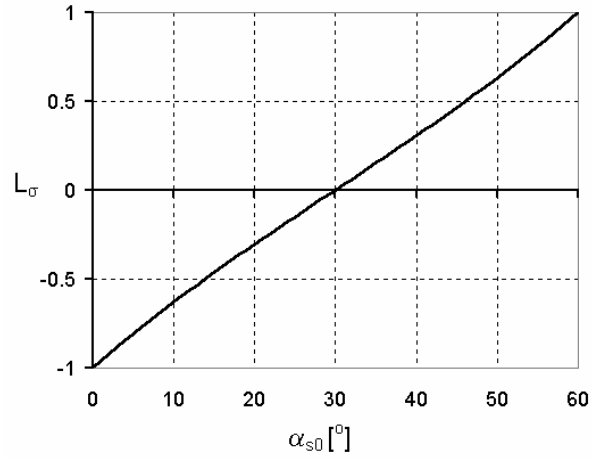
$$L_\sigma = 2 \frac{\sigma_3 - \sigma_2}{\sigma_1 - \sigma_2} - 1 = 2 \frac{\sin \alpha_{s_0}}{\sin(\pi/3 + \alpha_{s_0})} - 1, \quad \sigma_2 \leq \sigma_3 \leq \sigma_1 \tag{1.59}$$

$$b = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_2} = 1 - \frac{1}{2}(L_\sigma + 1) = 1 - \frac{\sin \alpha_{s_0}}{\sin(\pi/3 + \alpha_{s_0})} \quad (\sigma_2 \leq \sigma_3 \leq \sigma_1) \tag{1.60}$$

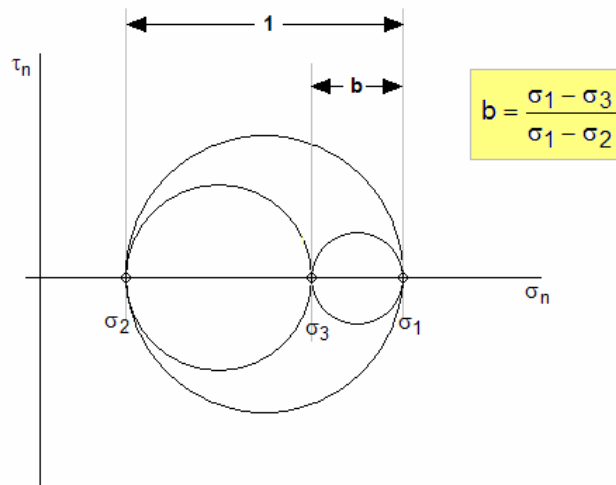
¹³ Αγγλ. *stress invariant angle of similarity*

¹⁴ W. Lode (1926). Versuche ueber den Einfluss der mittleren Hauptspannung auf das Fliessen der Metalle Eisen, Kupfer und Nickel. Z. Physik, Vol. 36, 913-939.

¹⁵ Η παράμετρος b χρησιμοποιείται συνήθως στην Εδαφομηχανική, πρβλ. Reads & Green, Géotechnique, 26(4), 551-576, 1976. Parry RHG. Ed. Stress-strain behaviour of soils. Proceedings of the Roscoe Memorial Symposium. Cambridge University, March, 1971.



Εικ. 1-11: Σχέση μεταξύ αναλλοίωτου γωνίας α_{s0} και παραμέτρου Lode, εξ. (1.59)



Εικ. 1-12: Ορισμός της τασικής παραμέτρου b , εξ. (1.60)

Παράδειγμα

Σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων $O(x_1, x_2, x_3)$ δίδεται ο πίνακας των τάσεων σε κατάλληλες μονάδες:

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Η μέση ορθή τάση και ο αποκλίνων είναι:

$$p = \frac{1}{3}(1+2+0) = 1 \quad , \quad [s_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

Η $2^{\text{η}}$ και $3^{\text{η}}$ αναλλοίωτος του αποκλίνοντα τανυστή υπολογίζονται ως εξής:

$$\begin{aligned} J_{2s} &= \frac{1}{6} [(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2] + \sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2 \\ &= \frac{1}{6} [(1-2)^2 + (2-0)^2 + (0-1)^2] + 0^2 + 3^2 + 2^2 = 14 \end{aligned}$$

$$J_{3s} = \begin{vmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 2(0-2) = -4$$

Οπότε:

$$\cos 3\alpha_{s_0} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{-4}{14^{1.5}} = -0.19839 \Rightarrow 3\alpha_{s_0} = 101.44^\circ$$

και

$$\alpha_{s_0} = 33.81^\circ, \quad \alpha_{s_1} = 153.81^\circ, \quad \alpha_{s_2} = 273.81^\circ$$

Με

$$\rho = \frac{2\sqrt{J_{2s}}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{14}}{\sqrt{3}} = 4.3205$$

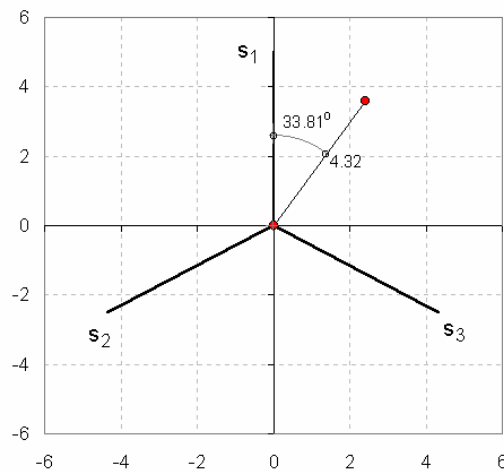
παίρνουμε τελικά

$$s_1 = \rho \cos(33.81^\circ) = 3.5897$$

$$s_2 = -\rho \cos(60^\circ - 33.81^\circ) = -3.8771$$

$$s_3 = -\rho \cos(60^\circ + 33.81^\circ) = 0.2874$$

$$\text{Έλεγχος:} \quad s_1 + s_2 + s_3 = 0$$



Οι κύριες τάσεις υπολογίζονται ως εξής:

$$\sigma_1 = p + s_1 = 4.59$$

$$\sigma_2 = p + s_2 = -2.88 \quad (\sigma_2 \leq \sigma_3 \leq \sigma_1)$$

$$\sigma_3 = p + s_3 = 1.29$$

Τέλος η παράμετρος b ($0 \leq b \leq 1$), που εκφράζει την απόκλιση της ενδιάμεσης τάσεως από την μεγαλύτερη τάση προκύπτει,

$$b = \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{\sigma_2 - \sigma_1} = 0.44$$

Άσκηση

Να ευρεθούν οι κύριες κατευθύνσεις του ως άνω τανυστή σ_{ij} ως προς το θεωρούμενο σύστημα συντεταγμένων.

1.3 Αξονοσυμμετρικές Εντατικές Καταστάσεις

Οι αξονοσυμμετρικές εντατικές καταστάσεις χαρακτηρίζονται από το γεγονός ότι δύο κύριες τάσεις είναι ίσες:

$$[\bar{\sigma}] = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma_c & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma_c \end{bmatrix} \quad (1.61)$$

οπότε

$$\begin{aligned} J_{2s} &= \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_c) \\ J_{3s} &= \frac{2}{27}(\sigma_1 + \sigma_c)^3 \\ \cos 3\alpha_s &= \frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{(2/3^3) (\sigma_1 + \sigma_c)^3}{(1/3)^{3/2} |\sigma_1 + \sigma_c|^3} = \text{sgn}(\sigma_1 + \sigma_c) \end{aligned} \quad (1.62)$$

Ειδικότερα διακρίνουμε ανάμεσα στον αξονοσυμμετρικό εφελκυσμό¹⁶

$$\begin{aligned} -\sigma_c < \sigma_1 &\Rightarrow \cos 3\alpha_s = +1 \quad (L_\sigma = -1, b = 1) \\ \alpha_{s0} &= 0, \quad \alpha_{s1} = \frac{2\pi}{3}, \quad \alpha_{s2} = \frac{4\pi}{3} \end{aligned} \quad (1.63)$$

και την αξονοσυμμετρική θλίψη¹⁷

¹⁶ Αγγλ. *axisymmetric extension*

¹⁷ Αγγλ. *axisymmetric compression*

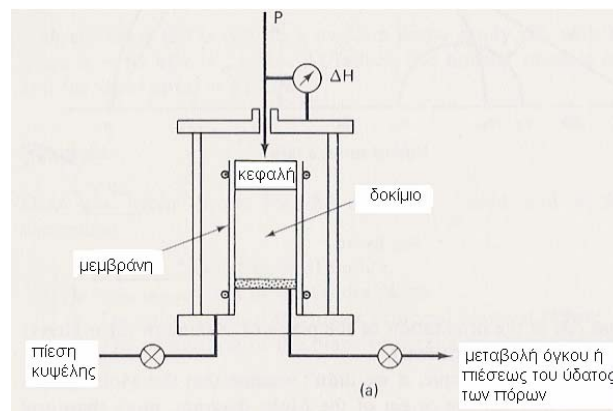
$$\sigma_1 < -\sigma_c \Rightarrow \cos 3\alpha_s = -1 \quad (L_\sigma = +1, b = 0)$$

$$\alpha_{s0} = \frac{\pi}{3}, \alpha_{s1} = \pi, \alpha_{s2} = \frac{5\pi}{3} \quad (1.64)$$

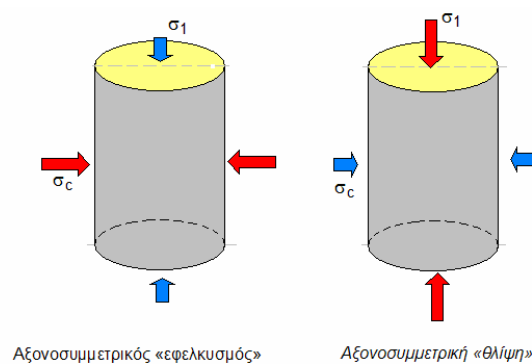
Οι εντατικές καταστάσεις αυτές υλοποιούνται εύκολα στο εργαστήριο μέσω της λεγόμενης τριαξονικής συσκευής, η οποία επιτρέπει την άσκηση επί του δοκιμίου ολόπλευρης πίεσεως σ_c και αξονικής τάσεως σ_1 , η οποία με τη σειρά της εξαρτάται από το επιβαλλόμενο αξονικό φορτίο P και από την επιφάνεια A της ορθής προς το άξονα διατομής του δοκιμίου(Εικ. 1-13)¹⁸,

$$\sigma_1 = -\sigma_c + \frac{P}{A} \quad (1.65)$$

Είναι φανερό ότι στη περίπτωση της τριαξονικής θλίψεως το αξονικό φορτίο είναι θλιπτικό ($P < 0$), όποτε $\sigma_1 < -\sigma_c < 0$, ενώ στην περίπτωση του τριαξονικού εφελκυσμού το αξονικό φορτίο είναι εφελκυστικό ($P > 0$) και $-\sigma_c < \sigma_1 < 0$ (Εικ. 1-14).

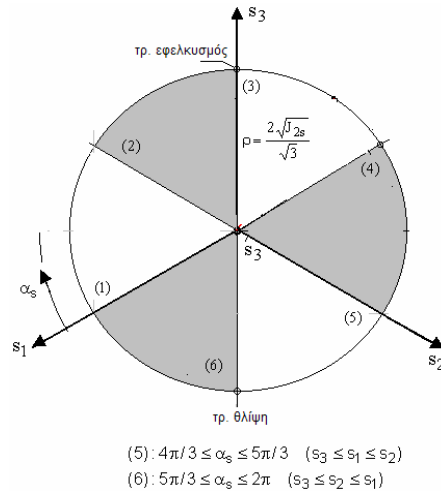


Εικ. 1-13: Σχηματική παράσταση πειραματικής διατάξεως τριαξονικής θλίψεως



Εικ. 1-14: Τριαξονική θλίψη και εφελκυσμός

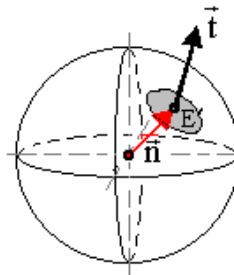
¹⁸ Πρβλ. I. Βαρδουλάκης, *Γεωτεχνική Μηχανική*, Κεφ. 3.5, www.geolab.mechan.ntua.gr



Εικ. 1-16: Απεικόνιση τριαζονικών καταστάσεων στο επίπεδο π

1.4 Η Φυσική Ερμηνεία των Αναλλοίωτων του Τανυστή των Τάσεων

Στη βάση αυτή κάνουμε τώρα την υπόθεση ότι ο τανυστής των τάσεων στο υλικό σημείο που κατέχει τη θέση του κέντρου βάρους του (REV), μας δίνει την πληροφορία σχετικά με τις μεταξύ των κόκκων ασκούμενες δυνάμεις επαφής. Για να επεξηγήσουμε αυτή την υπόθεση μεταφέρουμε νοερά σε μία κοινή αρχή στον \mathcal{R}^3 όλα τα διανύσματα επαφής \vec{n} που εμφανίζονται πάνω στην περιβάλλουσα του (REV), Εικ. 1-17. Με τη διαδικασία αυτή κάθε επαφή E που συναντάμε στην περιβάλλουσα του (REV) απεικονίζεται σε ένα σημείο E' πάνω στην επιφάνεια της μοναδιαίας σφαίρας. Η ακτίνα θέσης στο εκάστοτε σημείο E' της μοναδιαίας σφαίρας είναι προφανώς παράλληλη προς το αντίστοιχο, κάθετο στο επίπεδο επαφής, μοναδιαίο διάνυσμα επαφής n_i . Στο σημείο αυτό E' προσάπτουμε τον ελκυστή t_j , οποίος υποθέτουμε ότι σχετίζεται στατιστικά με τις δυνάμεις F_i^E , που ασκούνται στα σημεία επαφής E των κόκκων στην περιβάλλουσα του (REV). Ο υπολογισμός του ελκυστή t_j από τις δυνάμεις επαφής γίνεται ως εξής: Ξεκινάμε από την υπόθεση ότι ο τανυστής των τάσεων κατά Cauchy στο Συνεχές ικανοποιεί τις εξισώσεις ισορροπίας.



Εικ. 1-17: Απεικόνιση του διανύσματος επαφής και της δυνάμεως επαφής: Το διάνυσμα επαφής \vec{n} που είναι κάθετο στο κοινό επίπεδο επαφής μεταξύ δύο κόκκων στο (REV) απεικονίζεται πάνω στη μοναδιαία σφαίρα στο σημείο E' . Στο σημείο αυτό προσαρτούμε το διάνυσμα του ελκυστή \vec{t} που αντιστοιχεί στην δύναμη επαφής

Με αυτό το σκεπτικό μπορεί κανείς να αναρωτηθεί π.χ. ποία είναι η τιμή του μέσου ορθού ελκυστή ή ποία είναι η τιμή του μέσου διατμητικού ελκυστή, που αντιστοιχεί στις δυνάμεις επαφής για όλες τις πιθανές επαφές (E) πάνω στην περιβάλλουσα επιφάνεια του (REV); Για να απαντήσουμε στα ερωτήματα αυτά υπολογίζουμε κατ' αρχήν ένα βαθμωτό μέγεθος, την ορθή συνιστώσα του ελκυστή στην τυχούσα επαφή $E \leftrightarrow E'$, που αντιστοιχεί στο μοναδιαίο διάνυσμα n_i ,

$$t^n = t_i n_i \tag{1.68}$$

Ας υπολογίσουμε τώρα την μέση ορθή τάση για όλες τις κατευθύνσεις n_i ,

$$p = \langle t^n \rangle \tag{1.69}$$

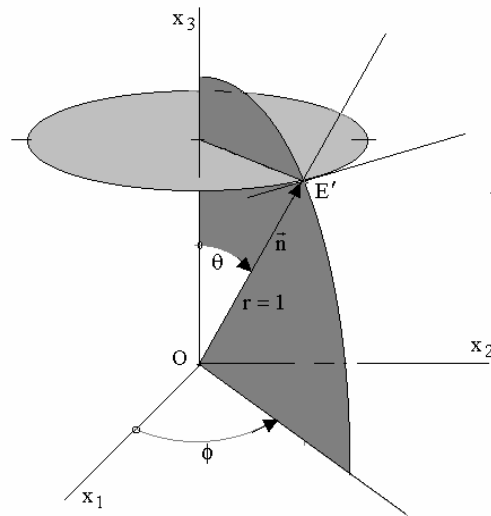
Η μέση τιμή υπολογίζεται πάνω στη μοναδιαία σφαίρα

$$\langle t^n \rangle = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi t^n \sin \theta d\theta d\phi \tag{1.70}$$

όπου $r = 1$, θ και ϕ είναι σφαιρικές συντεταγμένες (Εικ. 1-18).

Οι καρτεσιανές συντεταγμένες του τυχόντος διανύσματος $\vec{OE}' = \vec{n}$ πάνω στη μοναδιαία σφαίρα μπορούν να εκφραστούν ως συναρτήσεις των σφαιρικών συντεταγμένων του σημείου E'

$$n_1 = \sin \theta \cos \phi \quad , \quad n_2 = \sin \theta \sin \phi \quad , \quad n_3 = \cos \theta \tag{1.71}$$



Εικ. 1-18: Σφαιρικές συντεταγμένες: Το τυχόν σημείο E' πάνω στην μοναδιαία σφαίρα βρίσκεται στην τομή ενός παράλληλου κύκλου, $\theta' = const.$ και ενός μεσημβρινού, $\phi = const.$. Οι τιμές αυτές των γωνιών θ και ϕ συνιστούν εν προκειμένω τις σφαιρικές συντεταγμένες του σημείου E' .

Ισχύουν δε οι παρακάτω σχέσεις (γιατί;)

$$\begin{aligned} \langle n_i n_j \rangle &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi n_i n_j \sin \theta d\theta d\phi = \frac{1}{3} \delta_{ij} \\ \langle n_i n_j n_k \rangle &= 0 \\ \langle n_i n_j n_k n_l \rangle &= \frac{1}{3 \cdot 5} (\delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) = \frac{1}{15} \delta_{ijkl} \\ \langle n_i n_j n_k n_l n_m \rangle &= 0 \\ \langle n_i n_j n_k n_l n_m n_n \rangle &= \frac{1}{3 \cdot 5 \cdot 7} (\delta_{in} \delta_{jklm} + \delta_{jn} \delta_{klmi} + \delta_{kn} \delta_{lmij} + \delta_{ln} \delta_{mijk} + \delta_{mn} \delta_{ijkl}) = \frac{1}{105} \delta_{ijklmn} \end{aligned} \quad (1.72)$$

Άρα

$$p = \langle t^n \rangle = \langle \sigma_{ji} n_j n_i \rangle = \sigma_{ji} \langle n_j n_i \rangle = \frac{1}{3} \sigma_{ij} \delta_{ij} = \frac{1}{3} \sigma_{kk} \quad (1.73)$$

Ο παραπάνω υπολογισμός δείχνει ότι: η 1^η αναλλοίωτη του τανυστή των τάσεων συνδέεται με τη μέση ορθή τάση,

$$p = \frac{1}{3} J_{1\sigma} \quad (1.74)$$

Αντιστοίχως ορίζουμε ένα διανυσματικό μέγεθος, τον διατμητικό ελκυστή, που ασκείται σε μια στοιχειώδη επιφάνεια με μοναδιαίο εξωτερικό διάνυσμα n_i .

$$t_i^t = t_i - t^n n_i \quad (1.75)$$

Αναλόγως με τον παραπάνω υπολογισμό βρίσκουμε ότι η 2^η αναλλοίωτη του αποκλίνοντα τανυστή των τάσεων συνδέεται με την «μέση διατμητική τάση»

$$\tau_m = \sqrt{\langle t_i^{(t)} t_i^{(t)} \rangle} = \sqrt{\frac{2}{5} J_{2s}} \quad (1.76)$$

Για το λόγο αυτό στη βιβλιογραφία η ποσότητα,

$$T = \sqrt{J_{2s}} \Rightarrow T = \sqrt{\frac{5}{2}} \tau_m \quad (1.77)$$

ονομάζεται ένταση διατμητικής τάσεως¹⁹.

1.5 Ζώνες Διατμήσεως²⁰

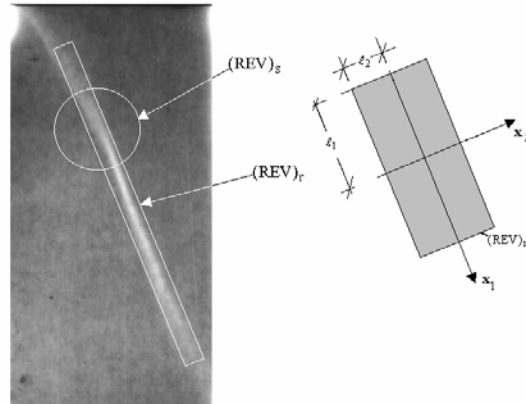
Παραπάνω δείξαμε σε αδρές γραμμές πώς μπορεί κανείς να υπολογίσει την μέση τιμή της ορθής και διατμητικής τάσεως, όταν η ολοκλήρωση γίνεται πάνω στην επιφάνεια ενός σφαιρικού (*REV*), που περιβάλλει το σημείο ενδιαφέροντος. Αυτή η διαδικασία είναι θεμιτή, αν η μικροδομή του υλικού εμφανίζει μια κάποια ισοτροπία, γεγονός που είναι

¹⁹ Αγγλ. *shearing stress intensity*.

Πρβλ. Kachanov, L.M., *Fundamentals of the Theory of Plasticity*, Mir Publishers, Moscow, 1974.

²⁰ Αγγλ. *shear bands*.

αποδεκτό στις λεγόμενες τυχαίες (random) μικροδομές (π.χ. σε κοκκώδη υλικά ή σκυροδέματα, που δεν έχουν υποστεί σοβαρές προφορτίσεις, που να αντιστοιχούν σε σημαντικές αποκλίσεις από την ισότροπη ένταση). Παρατηρούμε τώρα ότι η διαδικασία υπολογισμού μέσω των τιμών των διαφόρων κινηματικών και εντατικών μεγεθών δεν είναι μονοσήμαντη. Το αποτέλεσμα εξαρτάται σημαντικά από την επιλογή του σχήματος του (REV), πάνω στο οποίο θα γίνουν οι διάφορες ολοκληρώσεις²¹. Για παράδειγμα ας θεωρήσουμε ένα δοκίμιο από κοκκώδες υλικό (άμμο), στο οποίο μετά το μέγιστο φορτίο η παραμόρφωση εντοπίστηκε σε μία στενή ζώνη διατμήσεως, που στην παρακείμενη ραδιογραφία φαίνεται ως φωτεινή, θαμπή ζώνη (Εικ. 1-19).



Εικ. 1-19: Ζώνη ολισθήσεως σε διαξονική καταπόνηση δοκιμίου ξηρής άμμου²²

Στην περίπτωση αυτή δεν μπορούμε να αγνοήσουμε την αλλαγή της δομής του δοκιμίου, και φαίνεται λογικότερο αντί του σφαιρικού (REV)_s να επιλέξουμε ένα ορθογώνιο (REV)_r, προσαρμοσμένο στη γεωμετρία της αναπτυχθείσας δομής, οπότε

$$\begin{aligned} \langle t_n \rangle &= \frac{l_2}{l_1 + l_2} \sigma_{11} + \frac{l_1}{l_1 + l_2} \sigma_{22} \\ \langle t_t \rangle &= \frac{1}{l_1 + l_2} \sqrt{(l_2 \sigma_{12})^2 + (l_1 \sigma_{21})^2} \end{aligned} \tag{1.78}$$

Η μικροδομική ανισοτροπία, που προκαλεί η ανάπτυξη της εντοπισμένης ζώνης ολίσθησης λαμβάνεται υπ' όψιν, αν στο επίπεδο της παραμορφώσεως το πάχος $2l_2$ του ορθογωνίου (REV)_r επιλεγεί κατά πολύ μικρότερο του μήκους του $2l_1$, ενώ η τρίτη διάσταση λαμβάνεται να εκτείνεται καθ' όλο το πάχος του δοκιμίου. Εισάγοντας το λόγο $\alpha = l_2 / l_1$, παίρνουμε

²¹ V.V. Novozhilov, *Theory of Elasticity*, Pergamon Press, 1961.

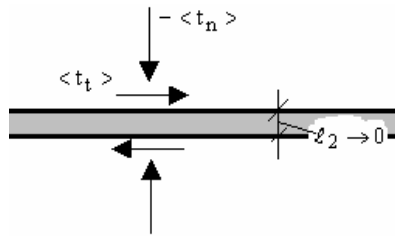
²² Vardoulakis I. and Graf B. (1985). Calibration of constitutive models for granular materials using data from biaxial experiments. *Géotechnique*, 35, 299-317.

$$\begin{aligned} \langle t_n \rangle &= \frac{\alpha}{1+\alpha} \sigma_{11} + \frac{1}{1+\alpha} \sigma_{22} \\ \langle t_t \rangle &= \sqrt{\left(\frac{\alpha}{1+\alpha} \sigma_{12} \right)^2 + \left(\frac{1}{1+\alpha} \sigma_{21} \right)^2} \end{aligned} \quad (1.79)$$

Στο όριο μηδενικού πάχους, $\alpha \rightarrow 0$, προκύπτουν οι γνωστοί από την Εδαφομηχανική τύποι του Coulomb για τις τάσεις στο “επίπεδο” αστοχίας

$$\langle t_n \rangle \rightarrow \sigma_{22} \quad , \quad \langle t_t \rangle \rightarrow |\sigma_{21}| \quad (1.80)$$

Οι τύποι αυτοί σημαίνουν ότι για επιμήκεις δομές, όπως οι ζώνες εντοπισμένης παραμορφώσεως, η ορθή και διατμητική τάση στο επίπεδο της ζώνης περιγράφουν σε καλή προσέγγιση τις αντίστοιχες μέσες τιμές (Εικ. 1-20).



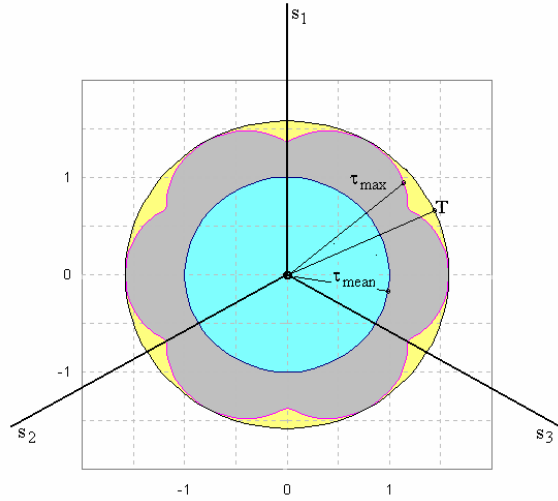
Εικ. 1-20: «Μέση» ορθή και διατμητική τάση σε επιμήκεις δομές

1.6 Μέγιστη, Μέση και Οκταεδρική Διατμητική Τάση

Παρατηρούμε ότι η γωνία α_s ή η ισοδύναμη προς αυτή παράμετρος Lode L_σ , εκφράζουν την απόκλιση της μέγιστης διατμητικής τάσης από τη μέση διατμητική τάση (Εικ. 1-21),

$$\begin{aligned} (1) \ \& \ (4): \frac{\tau_{3,\max}}{\tau_m} &= \frac{|\sigma_1 - \sigma_2|/2}{\tau_m} = \sqrt{\frac{5}{2}} |\sin(\pi/3 + \alpha_s)| \\ (2) \ \& \ (5): \frac{\tau_{1,\max}}{\tau_m} &= \frac{|\sigma_2 - \sigma_3|/2}{\tau_m} = \sqrt{\frac{5}{2}} |\sin(\alpha_s)| \\ (3) \ \& \ (6): \frac{\tau_{2,\max}}{\tau_m} &= \frac{|\sigma_3 - \sigma_1|/2}{\tau_m} = \sqrt{\frac{5}{2}} |\sin(\pi/3 - \alpha_s)| \end{aligned} \quad (1.81)$$

$$\begin{aligned} (1): \ 0 \leq \alpha_s \leq \pi/3 \ (s_2 \leq s_3 \leq s_1) : \ \alpha_s &= \alpha_{s_0} \\ (2): \ \pi/3 \leq \alpha_s \leq 2\pi/3 \ (s_2 \leq s_1 \leq s_3) : \ \alpha_s &= -\alpha_{s_0} + 2\pi/3 \\ (3): \ 2\pi/3 \leq \alpha_s \leq \pi \ (s_1 \leq s_2 \leq s_3) : \ \alpha_s &= \alpha_{s_0} + 2\pi/3 \\ (4): \ \pi \leq \alpha_s \leq 4\pi/3 \ (s_1 \leq s_3 \leq s_2) : \ \alpha_s &= -\alpha_{s_0} + 4\pi/3 \\ (5): \ 4\pi/3 \leq \alpha_s \leq 5\pi/3 \ (s_3 \leq s_1 \leq s_2) : \ \alpha_s &= \alpha_{s_0} + 4\pi/3 \\ (6): \ 5\pi/3 \leq \alpha_s \leq 2\pi \ (s_3 \leq s_2 \leq s_1) : \ \alpha_s &= -\alpha_{s_0} + 2\pi \end{aligned} \quad (1.82)$$



Εικ. 1-21: Μέση και μέγιστη διατμητική τάση

Από τις εκφράσεις αυτές προκύπτει ότι η απόκλιση μεταξύ μέγιστης και μέσης τάσης είναι μόνο συνάρτηση της γωνίας α_s στο αποκλίνον επίπεδο. Στο πρώτο εκτιμώριο η ελάχιστη και μέγιστη απόκλιση αντιστοιχούν σε γωνίες ομοιότητας $\alpha_s = 0$ ($L_\sigma = -1$) και $\alpha_s = \pi/6$ ($L_\sigma = 0$), αντιστοίχως

$$\min \left(\frac{\tau_{3,\max}}{\tau_m} \right) = \sqrt{\frac{5}{2}} \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 1.369$$

$$\max \left(\frac{\tau_{3,\max}}{\tau_m} \right) = \sqrt{\frac{5}{2}} \approx 1.581$$
(1.83)

Παρατηρούμε δε ότι η ένταση διατμητικής τάσεως δεν διαφέρει και κατά πολύ από την μέγιστη διατμητική τάση, $T = \sqrt{J_{2s}}$,

$$0.866 \approx \frac{\sqrt{3}}{2} \leq \frac{\tau_{\max}}{T} \leq 1$$
(1.84)

δηλαδή

$$T \approx \tau_{\max}$$
(1.85)

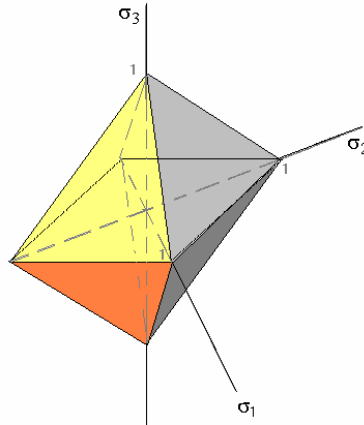
Υπενθυμίζουμε ότι σε σύστημα κυρίων αξόνων η ορθή και διατμητική συνιστώσα του ελκυστή των τάσεων σε ένα επίπεδο με μοναδιαίο εξωτερικό διάνυσμα n_i υπολογίζονται από τις παρακάτω σχέσεις (γιατί;)

$$t^n = \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2$$
(1.86)

$$t^t = \sqrt{\sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2 - (\sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2)^2}$$

Επίσης υπενθυμίζουμε ότι το οκταεδρικό επίπεδο είναι εκείνο το επίπεδο, το οποίο σχηματίζει ίσες γωνίες με τους άξονες των κυρίων τάσεων. Σε σύστημα κυρίων αξόνων αναγνωρίζουμε 8 τέτοια επίπεδα (Εικ. 1-22),

$$\{\bar{n}^{(1)}\}^T = \frac{1}{\sqrt{3}}\{1,1,1\}, \{\bar{n}^{(2)}\}^T = \frac{1}{\sqrt{3}}\{1,1,-1\}, \dots \quad (1.87)$$



Εικ. 1-22: Χαρακτηριστικό οκτάεδρο στο χώρο κυρίων τάσεων

Η ορθή και διατμητική συνιστώσα του ελκυστή των τάσεων σε ένα οκταεδρικό επίπεδο

$$\sigma_{oct} = t_{oct}^n, \tau_{oct} = t_{oct}^t \quad (1.88)$$

προκύπτουν ίσες αντιστοίχως με τον αριθμητικό μέσο των ορθών τάσεων

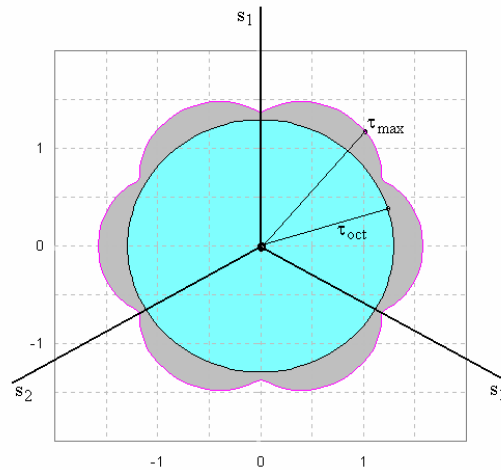
$$\sigma_{oct} = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{1}{3}I_{1\sigma} = p \quad (1.89)$$

και τον γεωμετρικό μέσο των μέγιστων διατμητικών τάσεων

$$\begin{aligned} \tau_{oct} &= \sqrt{\frac{1}{3}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - \frac{1}{3^2}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2} \\ &= \frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \\ &= \sqrt{\frac{2}{3}}J_{2s} = \sqrt{\frac{5}{3}}\tau_m \end{aligned} \quad (1.90)$$

Παρατηρούμε ότι η οκταεδρική διατμητική τάση υπολείπεται πάντοτε της μέγιστης διατμητικής τάσεως (Εικ. 1-23)

$$\min\left(\frac{\tau_{3,\max}}{\tau_{oct}}\right) = \sqrt{\frac{5}{2}}\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{\frac{3}{5}} \approx 1.061, \quad \max\left(\frac{\tau_{3,\max}}{\tau_m}\right) = \sqrt{\frac{5}{2}}\sqrt{\frac{3}{5}} \approx 1.225 \quad (1.91)$$



Εικ. 1-23: Σχέση μέγιστης και οκταεδρικής διατμητικής τάσεως

Προφανώς ένα καλλίτερο κάτω φράγμα της μέγιστης διατμητικής τάσεως είναι η ποσότητα

$$\tau_{oct}^* = \frac{\sqrt{3}}{2} T = \frac{3}{2\sqrt{2}} \tau_{oct} \approx 1.061 \tau_{oct} \Rightarrow \min \left(\frac{\tau_{3,max}}{\tau_{oct}^*} \right) = 1 \quad (1.92)$$

όπου

$$\tau_{oct}^* = \frac{1}{2\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \quad (1.93)$$

Άσκηση

Για τη δεδομένη εντατική κατάσταση

$$[\bar{\sigma}] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix} [MPa]$$

να υπολογισθούν : α) Οι κύριες τάσεις και κατευθύνσεις. β) Η μέση ορθή και μέση διατμητική τάση. γ) Οι οκταεδρικές τάσεις και τα αντίστοιχα διανύσματα $\vec{n}^{(\alpha)}$ ($\alpha=1, \dots, 8$). δ) Η μέγιστη διατμητική τάση και το επίπεδο πάνω στο οποίο αυτή δρα. ε) Η αναλλοίωτη γωνία α_s . Επίσης να επαληθευθεί στο αντίστοιχο διάγραμμα στο αποκλίνον επίπεδο (π) η σχέση, $\tau_{max} = f(\alpha_s) \tau_m$.

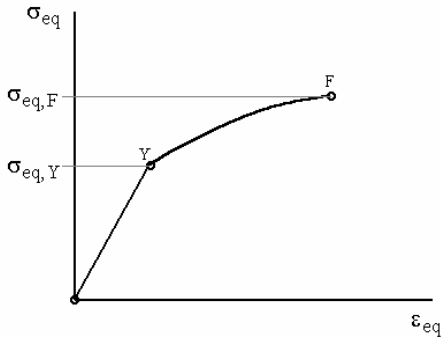
1.7 Κριτήρια Αστοχίας κατά Tresca και von Mises

Στη βάση των παραπάνω ορισμών ανευρίσκουμε στη βιβλιογραφία μια σειρά «κριτηρίων» για τη διαρροή²³ ή αστοχία²⁴ των υλικών. Αν και οι έννοιες της διαρροής και αστοχίας

²³ Αγγλ. yield

²⁴ Αγγλ. failure

συνήθως δεν επεξηγούνται ικανοποιητικά, συναρτώνται με το τέλος της ελαστικής συμπεριφοράς και την «αντοχή» ενός υλικού, όπως αυτά προσδιορίζονται πειραματικά σε δοκίμια από το ίδιο το υλικό (Εικ. 1-24).



Εικ. 1-24: Τάση διαρροής και αστοχίας σε τυπικό διάγραμμα «ισοδυνάμων» τάσεων-τροπών ενός τυπικού όλκιμου υλικού

Π.χ. σε ένα μονοαξονικό πείραμα θλίψεως οι τάσεις διαρροής και αστοχίας σ_Y και σ_F ταυτίζονται με τις αντίστοιχες τιμές της αξονικής τάσεως στο σημείο διαρροής (Y) και στο σημείο αστοχίας (F), στο διάγραμμα τάσεων-τροπών. Για τη γενίκευση των εννοιών αυτών σε δι- ή τριδιάστατες εντατικές καταστάσεις, οι τάσεις αστοχίας μεταφράζονται σε αντίστοιχες αναλλοίωτες του τανυστή των τάσεων, που συνήθως καλούνται ισοδύναμες τάσεις²⁵. Π.χ. για όλκιμα υλικά (μέταλλα) έχουν προταθεί τα κάτωθι κριτήρια:

Κριτήριο Tresca: Η ισοδύναμη τάση ταυτίζεται με την μέγιστη διατμητική τάση,

$$\tau_{eq}^T = \tau_{max} = \max\left(\frac{1}{2}|\sigma_1 - \sigma_2|, \frac{1}{2}|\sigma_2 - \sigma_3|, \frac{1}{2}|\sigma_3 - \sigma_1|\right) \quad (1.94)$$

Κριτήριο von Mises: Η ισοδύναμη τάση ταυτίζεται με την οκταεδρική διατμητική τάση,

$$\tau_{eq}^M = \tau_{oct} = \frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \quad (1.95)$$

Στην ειδική περίπτωση επίπεδης εντατικής καταστάσεως ($\sigma_3 = 0$, π.χ. σε ελάσματα) έχουμε αντιστοίχως,

$$\tau_{eq}^T = \max\left(\frac{1}{2}|\sigma_1 - \sigma_2|, \frac{1}{2}|\sigma_2 - 0|, \frac{1}{2}|0 - \sigma_1|\right) \quad (1.96)$$

$$\tau_{eq}^M = \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2} = \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22} + 3\sigma_{12}^2} \quad (1.97)$$

Τα κριτήρια αντοχής κατά Tresca και von Mises μπορούν να βαθμονομηθούν ως εξής: Θεωρούμε το πείραμα απλού εφελκυσμού. Έστω σ_Y η αντίστοιχη τάση διαρροής, οπότε,

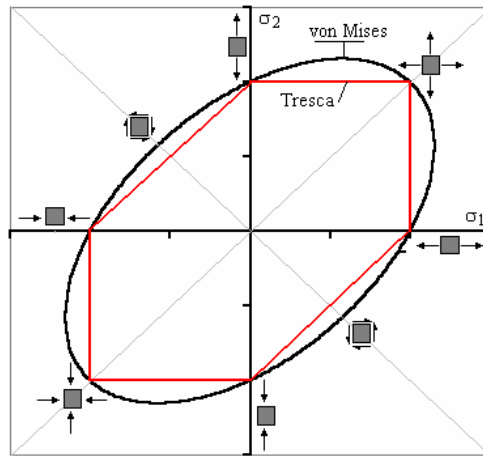
²⁵ Αγγλ. *equivalent stress*

$$\tau_{eq}^T = \frac{1}{2} \sigma_Y, \quad \tau_{eq}^M = \frac{\sqrt{2}}{3} \sigma_Y \quad (1.98)$$

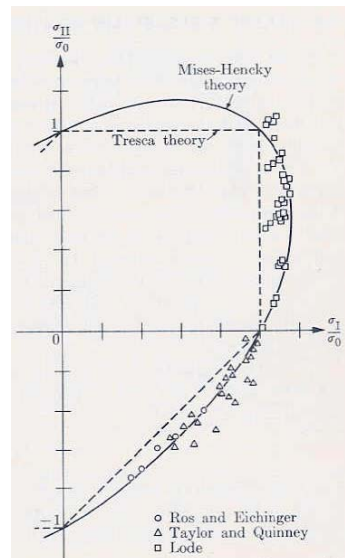
Η γραφική παράσταση των κριτηρίων αυτών στο επίπεδο των κυρίων τάσεων (σ_1, σ_2) είναι αντιστοίχως μία στραμμένη έλλειψη και ένα παραμορφωμένο εξάγωνο (Εικ. 1-25, Εικ. 1-26),

$$\text{Tresca : } \max\left(\frac{1}{2}|\sigma_1 - \sigma_2|, \frac{1}{2}|\sigma_2 - 0|, \frac{1}{2}|0 - \sigma_1|\right) = \frac{1}{2} \sigma_Y \quad (1.99)$$

$$\text{v. Mises: } \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2} = \sigma_Y \quad (1.100)$$



Εικ. 1-25: Κριτήρια Tresca και v. Mises για επίπεδη ένταση



Εικ. 1-26: Πειραματικός έλεγχος των θεωρητικών μοντέλων στη βάση αποτελεσμάτων με δοκίμια χαλκού, νικελίου και χάλυβα (Bisplinghoff, R.L. et al. Statics of Deformable Solids, Dover, 1990)

Άσκηση

Δίδονται οι εντατικές καταστάσεις

$$[\bar{\sigma}^{(1)}] = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} [MPa]$$

$$[\bar{\sigma}^{(2)}] = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} [MPa]$$

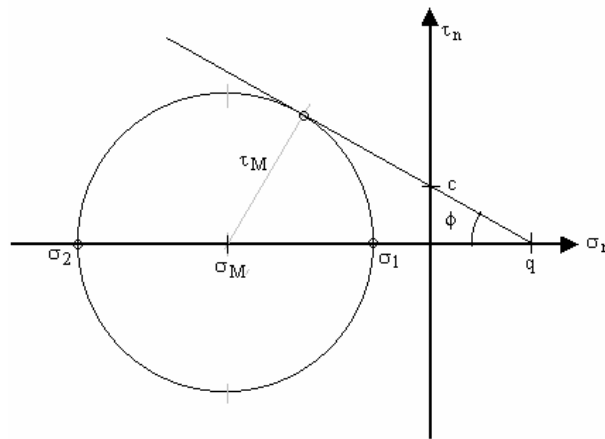
Να προσδιορισθεί ποία από αυτές τις καταστάσεις είναι πιο «κρίσιμη», αν ισχύουν διαδοχικά τα κάτωθι κριτήρια διαρροής (ή αστοχίας):

Μια εντατική κατάσταση (1) είναι κρισιμότερη μίας άλλης (2) όταν,

A) Η ορθή οκταεδρική τάση, $|\sigma_{oct}^{(1)}| > |\sigma_{oct}^{(2)}|$

B) Η διατμητική οκταεδρική τάση, $\tau_{oct}^{(1)} > \tau_{oct}^{(2)}$

Γ) Η μέγιστη διατμητική τάση, $\tau_{max}^{(1)} > \tau_{max}^{(2)}$.

1.8 Κριτήριο Αστοχίας κατά Mohr-Coulomb²⁶

Εικ. 1-27: Ορισμός της γωνίας εσωτερικής τριβής στο επίπεδο Mohr των τάσεων

Το κριτήριο αστοχίας κατά Mohr-Coulomb (M.-C.) βρίσκει εφαρμογή στα διάφορα γεωλικά και εκφράζεται μέσω της λεγόμενης γωνίας εσωτερικής τριβής²⁷ ϕ του υλικού, που ορίζεται στο επίπεδο Mohr μέσω μίας ευθύγραμμης περιβάλλουσας (Εικ. 1-27),

$$\sin \phi = \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)/2}{q - (\sigma_2 + \sigma_1)/2} \quad (\sigma_2 \leq \sigma_3 \leq \sigma_1) \quad (1.101)$$

²⁶ Πρβλ. Κεφ. 1.9

²⁷ Αγγλ. *internal friction angle*

Άρα συμφώνως προς το κριτήριο όπου M.-C. η αντοχή του υλικού δεν εξαρτάται από την ενδιάμεση κύρια τάση. Στην περίπτωση αυτή εισάγουμε συνήθως τις αναλλοίωτες

$$\sigma_M = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) < 0, \quad \tau_M = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) > 0 \quad (1.102)$$

οπότε έπεται ότι

$$\sin \varphi = \frac{\tau_M}{q - \sigma_M} \quad (1.103)$$

ή

$$\tau_M = -\sigma_M \sin \varphi + c \cos \varphi, \quad c = q \tan \varphi_m \quad (1.104)$$

όπου με c συμβολίζουμε την συνεκτικότητα²⁸ του υλικού.

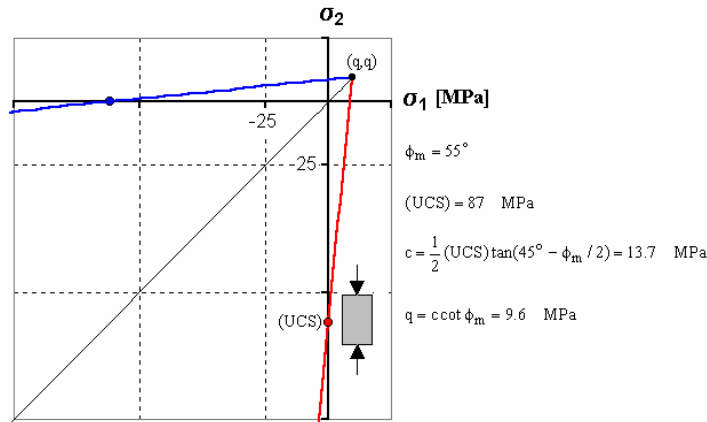
Σημειώνουμε ότι καμιά φορά η συνθήκη (M.-C.) θα γραφεί συναρτήσει της μέγιστης και της ελάχιστης κύριας τάσης (Εικ. 1-28)

$$\sigma_2 = -\frac{2 \cos \varphi}{1 - \sin \varphi} c + \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \sigma_1 \quad (1.105)$$

ή

$$\sigma_2 = -2\sqrt{K_p} c + K_p \sigma_1, \quad K_p = \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} = \tan^2(45^\circ + \varphi/2) \quad (1.106)$$

όπου K_p είναι ο λεγόμενος συντελεστής παθητικής ωθήσεως



Εικ. 1-28: Κριτήριο Mohr-Coulomb στο επίπεδο της μέγιστης και ελάχιστης κύριας τάσης (σ_1, σ_2) και όπου σ_3 είναι η ενδιάμεση κύρια τάση

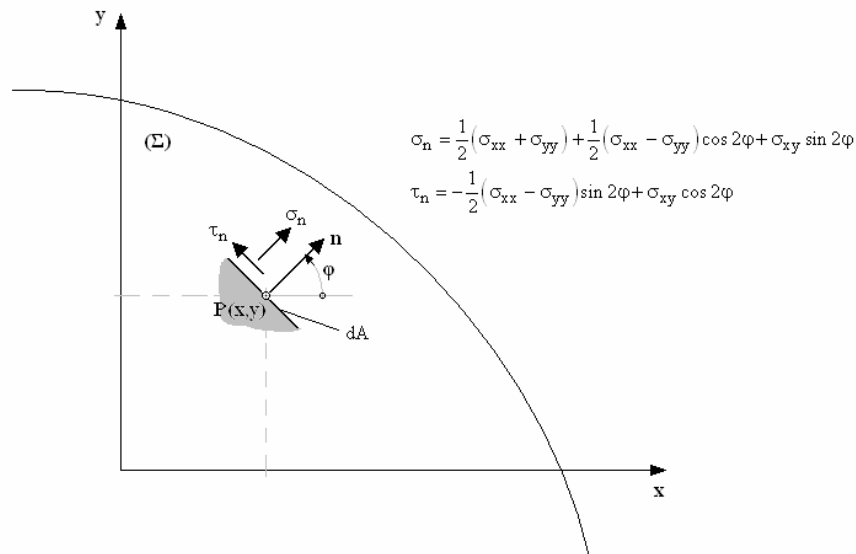
²⁸ Αγγλ. cohesion

1.9 Παράρτημα: Ο κύκλος Mohr των τάσεων

Στο Παράρτημα αυτό θα παρουσιάσουμε τη **γραφική λύση** του θεμελιώδους προβλήματος προσδιορισμού των τάσεων, η οποία προτάθηκε στις αρχές του 20^{ου} αιώνα από τον Otto Mohr (1835-1918). Η διαδικασία αυτή βασίζεται στις σχέσεις που συνδέουν την ορθή τάση σ_n και τη διατμητική τάση τ_n , που ασκούνται σε ένα σημείο $P(x, y)$ ενός σώματος (Σ) και πάνω σε μία στοιχειώδη επιφάνεια dA , της οποίας το εξωτερικό χείλος χαρακτηρίζεται από το (εξωτερικό) μοναδιαίο διάνυσμα \mathbf{n} , του οποίου η κλίση ως προς τον θετικό άξονα Ox δίδεται από τη γωνία φ (Εικ. 1-29):



$$\begin{aligned}\sigma_n &= \frac{1}{2}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) + \frac{1}{2}(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})\cos 2\varphi + \sigma_{xy}\sin 2\varphi \\ \tau_n &= -\frac{1}{2}(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})\sin 2\varphi + \sigma_{xy}\cos 2\varphi\end{aligned}\quad (1.107)$$



Εικ. 1-29: Η ορθή και διατμητική συνιστώσα του ελκυστή των τάσεων σε τυχούσα επιφάνεια

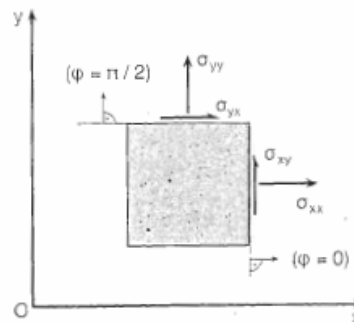
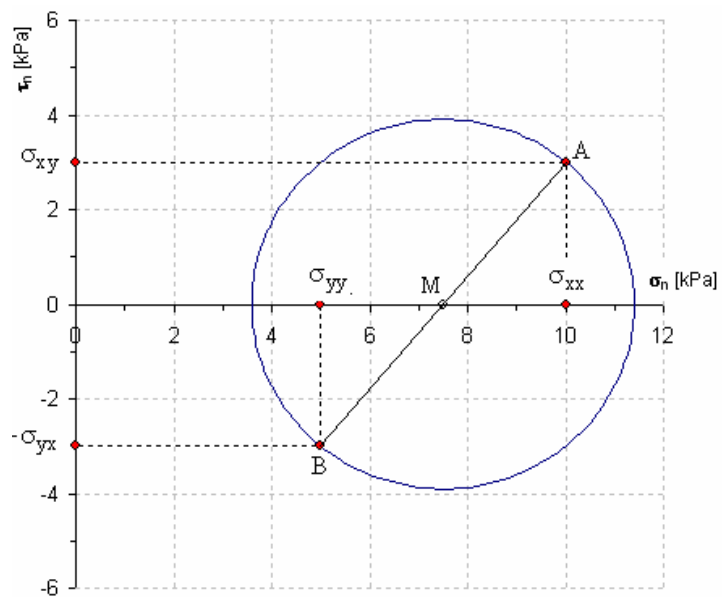
Για δεδομένες τιμές των τάσεων σ_{xx} , σ_{yy} και $\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$ η ορθή τάση σ_n και η διατμητική τάση τ_n , βάσει των Εξ. (1.107), είναι συναρτήσεις της γωνιακής παραμέτρου φ ,

$$\sigma_n = \sigma_n(\varphi) \quad , \quad \tau_n = \tau_n(\varphi) \quad (1.108)$$

Θεωρούμε ένα ορθογώνιο σύστημα συνταγμένων με άξονες $O\sigma_n$ και $O\tau_n$ (Εικ. 1-30), που με τη σειρά τους ορίζουν το λεγόμενο επίπεδο Mohr των τάσεων. Σημειωτέον ότι ο «χώρος» (επίπεδο) των τάσεων $O(\sigma_n, \tau_n)$ θα χρησιμοποιηθεί για τη γραφική επίλυση του προβλήματος των τάσεων, όπου θα χρειασθεί να μετρήσουμε γωνίες, οπότε θα πρέπει επιλέξουμε την ίδια κλίμακα στους άξονες τεταγμένων και τεταγμένων. Ένας τέτοιος

«χώρος» λέγεται «ισόμορφος». Ο χώρος των τάσεων δεν πρέπει να συγχέεται με τον φυσικό γεωμετρικό «χώρο», οι θέσεις των σημείων του οποίου συνήθως περιγράφονται σε σχέση με ένα καρτεσιανό σύστημα $O(x,y)$. Στο σύστημα $O(\sigma_n, \tau_n)$, οι εξ. (1.108) περιγράφουν μία καμπύλη σε παραμετρική μορφή. Θα δείξουμε παρακάτω ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων στο επίπεδο Mohr που προκύπτουν από τις εξ. (1.108) με παράμετρο τη γωνία φ είναι ένας κύκλος, ο λεγόμενος κύκλος Mohr των τάσεων, του οποίου τις ιδιότητες θα αναλύσουμε εδώ λεπτομερώς. Πρέπει να τονίσουμε ότι ο γεωμετρικός αυτός τόπος αφορά στην εντατική κατάσταση σε ένα συγκεκριμένο σημείο $P(x,y)$ ενός δίσκου και μάλιστα σε μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή. Αν τώρα αναρωτηθεί κανείς σε τι αντιστοιχεί η απειρία των σημείων του εν λόγω γεωμετρικού τόπου, τότε θα παρατηρήσουμε ότι ο κάθε σημείο του γεωμετρικού τόπου είναι ένας συνδυασμός ορθής και διατμητικής τάσης που αφορά στην εντατική κατάσταση σε συγκεκριμένο επίπεδο διερχόμενο δια του εν λόγω σημείου $P(x,y)$. Το μόνο κοινό γεωμετρικό στοιχείο του φυσικού χώρου $O(x,y)$ και του χώρου των τάσεων $O(\sigma_n, \tau_n)$ είναι η γωνία φ .

φ	σ_n	τ_n
[--]	[kPa]	[kPa]
0	10.000	3.000
10	10.875	1.964
20	11.344	0.691
30	11.348	-0.665
40	10.889	-1.941
50	10.020	-2.983
60	8.848	-3.665
70	7.513	-3.905
80	6.177	-3.674
90	5.000	-3.000
100	4.125	-1.964
110	3.657	-0.691
120	3.652	0.665
130	4.112	1.941
140	4.980	2.983
150	6.152	3.665
160	7.487	3.905
170	8.823	3.674
180	10.000	3.000
190	10.875	1.964
200	11.344	0.691
210	11.348	-0.665
220	10.889	-1.941
230	10.020	-2.983
240	8.848	-3.665
250	7.513	-3.905
260	6.177	-3.674
270	5.000	-3.000
280	4.125	-1.964
290	3.657	-0.691
300	3.652	0.665
310	4.112	1.941
320	4.980	2.983
330	6.152	3.665
340	7.487	3.905
350	8.823	3.674
360	10.000	3.000



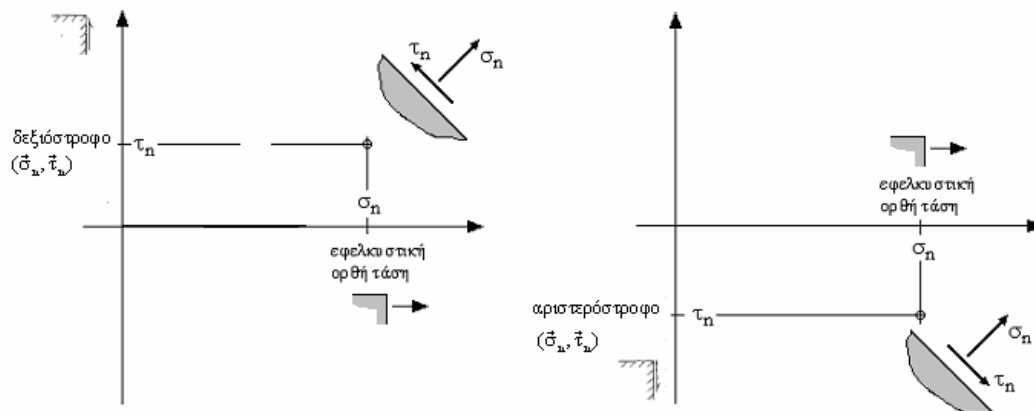
Εικ. 1-30: Σχεδιασμός του «κύκλου» του Mohr των τάσεων

Για την καλύτερη παρακολούθηση της διαδικασίας της γραφικής επίλυσης του προβλήματος των τάσεων θα χρησιμοποιήσουμε ως παράδειγμα το εξής μητρώο των τάσεων:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} [kPa] \quad (1.109)$$

Για την ως άνω εντατική κατάσταση ο γεωμετρικός τόπος που ορίζεται παραμετρικά από τις εξ. (1.107) με παράμετρο τη γωνία φ μπορεί να κατασκευασθεί σημείο προς σημείο αριθμητικά. Στην Εικ. 1-30, σχεδιάσαμε το αποτέλεσμα του αριθμητικού σχεδιασμού του «κύκλου» του Mohr. Η διαδικασία της γεωμετρικής κατασκευής του κύκλου του Mohr ξεκινά εν προκειμένω με τη γραφική παράσταση των αρχικών δεδομένων στο επίπεδο Mohr των τάσεων $O(\sigma_n, \tau_n)$. Για την τιμή της γωνιακής παραμέτρου, $\varphi = 0$ οι εξ. (1.107) δίδουν: $\varphi = 0^\circ : \{ \sigma_n = \sigma_{xx} = 10kPa, \tau_n = \sigma_{xy} = 3kPa \}$. Στο ζεύγος αυτό των τιμών αντιστοιχεί το σημείο $A(\varphi = 0^\circ)$ στο διάγραμμα Mohr. Για την τιμή της γωνιακής παραμέτρου, $\varphi = 90^\circ$ οι εξ. (1.107) δίδουν: $\varphi = 90^\circ : \{ \sigma_n = \sigma_{yy} = 5kPa, \tau_n = -\sigma_{yx} = -3kPa \}$. Στο ζεύγος αυτό των τιμών αντιστοιχεί το σημείο $B(\varphi = 90^\circ)$ στο διάγραμμα Mohr.

Σύμβαση πρόσημου



Εικ. 1-31: Σύμβαση πρόσημου στο επίπεδο Mohr για τις ορθές και τις διατμητικές τάσεις

Όταν η ορθή τάση είναι εφελκυστική, τότε η τάση αυτή εμφανίζεται στο διάγραμμα Mohr ως θετική. Όταν το τοπικό σύστημα $(\bar{\sigma}_n, \bar{\tau}_n)$ είναι δεξιόστροφο, τότε στο διάγραμμα Mohr η διατμητική αυτή τάση εμφανίζεται ως θετική. Αντιθέτως, όταν το τοπικό σύστημα $(\bar{\sigma}_n, \bar{\tau}_n)$ είναι αριστερόστροφο, τότε στο διάγραμμα Mohr η διατμητική αυτή τάση εμφανίζεται ως θετική (Εικ. 1-31).

Στη συνέχεια κατασκευάζουμε έναν κύκλο που διέρχεται από τα σημεία A και B και του οποίου το κέντρο βρίσκεται πάνω στον άξονα των ορθών τάσεων, $O\sigma_n$. Ο κύκλος αυτός καλείται κύκλος του Mohr. Το κέντρο M του κύκλου του Mohr προκύπτει από την τομή της ευθείας (AB) με τον άξονα των ορθών τάσεων, οπότε

$$(OM) = \sigma_M = \frac{1}{2}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = 7.5kPa \quad (1.110)$$

Η ακτίνα του κύκλου του Mohr προκύπτει από το ορθογώνιο τρίγωνο (ΜΑΓ) ή το τρίγωνο (ΜΒΓ'),

$$(MA) = (MB) = \tau_M = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \sigma_{xy}^2} = 3.91kPa \quad (1.111)$$

Αν σχεδιάσουμε τώρα τον κύκλο με κέντρο το σημείο Μ και ακτίνα τ_M παρατηρούμε ότι αυτός τέμνει τον άξονα των ορθών τάσεων σε δύο χαρακτηριστικά σημεία, που αντιστοιχούν σε ακρότατες τιμές για την ορθή τάση. Οι ακρότατες τιμές αυτές της ορθής τάσης ταυτίζονται με τις κύριες τάσεις σ_1 και σ_2 αντιστοίχως,

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma_M + \tau_M \\ \sigma_2 &= \sigma_M - \tau_M \end{aligned} \quad (1.112)$$

ή

$$\sigma_{1/2} = \frac{1}{2}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \sigma_{xy}^2} \quad (1.113)$$

Παρατηρούμε ότι πράγματι τα αντίστοιχα σημεία στο διάγραμμα Mohr έχουν τεταγμένη μηδέν, δηλαδή αντιστοιχούν στα επίπεδα εκείνα όπου η διατμητική τάση είναι μηδέν. Όπως φαίνεται στο σχήμα, ορίζουμε μια βοηθητική γωνία $\varphi_1 = \angle(xB\sigma_1)$, η οποία, όπως θα δείξουμε παρακάτω, δίνει την κατεύθυνση της κύριας ορθής τάσης σ_1 .

Τώρα θεωρούμε ένα τυχαίο επίπεδο με μοναδιαίο εξωτερικό διάνυσμα μ εσυνιστώσες, $n_x = \cos \varphi, n_y = \sin \varphi$. Έστω για παράδειγμα ότι το διάνυσμα αυτό σχηματίζει γωνία $\varphi = 40^\circ$ με το θετικό ημι-άξονα Ox . Οι εξ. (1.107) στην περίπτωση αυτή δίνουν: $\sigma_n = 10.89kPa, \tau_n = -1.94kPa$. Στο διάγραμμα Mohr το ζεύγος αυτό των τιμών αντιστοιχεί στο σημείο $\Xi(\varphi = 40^\circ)$. Από το διάγραμμα Mohr παίρνουμε ότι:

$$(A\Gamma) = \sigma_{xy} = \tau_M \sin 2\varphi_1 \Rightarrow \sin 2\varphi_1 = \frac{\sigma_{xy}}{\tau_M} \quad (1.114)$$

$$(M\Gamma) = \frac{1}{2}(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) = \tau_M \cos 2\varphi_1 \Rightarrow \cos 2\varphi_1 = \frac{\frac{1}{2}(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})}{\tau_M}$$

$$(O\Delta) = \sigma_M + \tau_M \cos 2(\varphi - \varphi_1) \quad (1.115)$$

Οπότε κάνοντας χρήση της τριγωνομετρικής ταυτότητας,

$$\cos 2(\varphi - \varphi_1) = \cos 2\varphi \cos 2\varphi_1 + \sin 2\varphi \sin 2\varphi_1 \quad (1.116)$$

και της εξ. (1.110) παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned}
 (\text{O}\Delta) &= \sigma_M + \tau_M \cos 2\varphi \frac{\frac{1}{2}(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})}{\tau_M} + \tau_M \sin 2\varphi \frac{\sigma_{xy}}{\tau_M} \\
 &= \frac{1}{2}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) + \frac{1}{2}(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \cos 2\varphi + \sigma_{xy} \sin 2\varphi \\
 \Rightarrow (\text{O}\Delta) &= \sigma_{\xi\xi}
 \end{aligned} \tag{1.117}$$

Ομοίως από το διάγραμμα Mohr παίρνουμε ότι:

$$-(\Delta\xi) = \tau_M \sin 2(\varphi - \varphi_1) \tag{1.118}$$

Οπότε κάνοντας χρήση της τριγωνομετρικής ταυτότητας,

$$\sin 2(\varphi - \varphi_1) = \sin 2\varphi \cos 2\varphi_1 - \cos 2\varphi \sin 2\varphi_1 \tag{1.119}$$

και τις εξ.(1.114) παίρνουμε ότι,

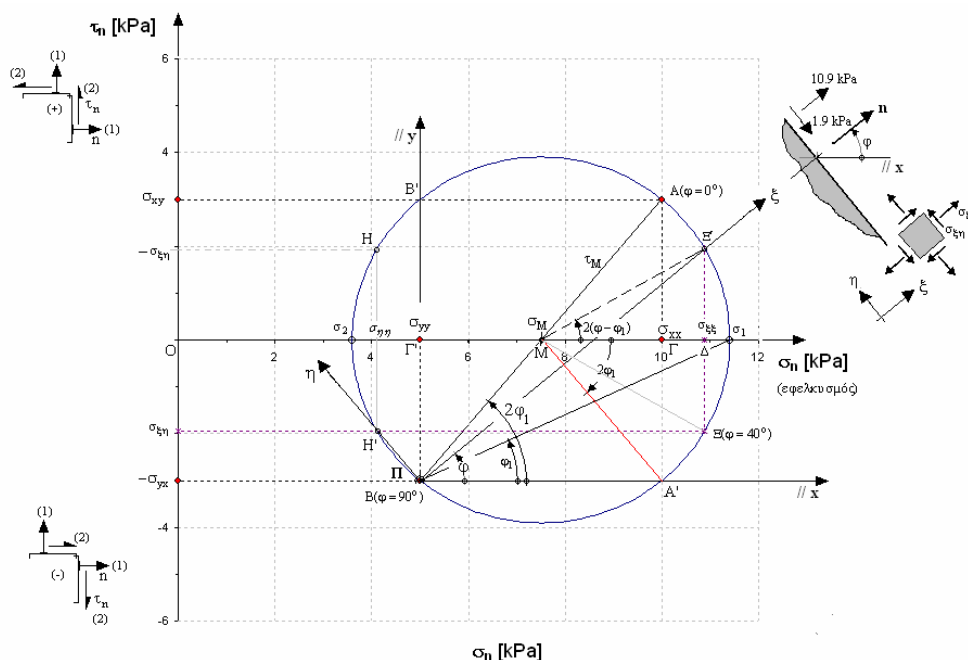
$$\begin{aligned}
 (\Delta\text{N}) &= -\tau_M \sin 2\varphi \frac{\frac{1}{2}(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})}{\tau_M} + \tau_M \cos 2\varphi \frac{\sigma_{xy}}{\tau_M} \\
 &= -\frac{1}{2}(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \sin 2\varphi + \sigma_{xy} \cos 2\varphi \\
 \Rightarrow (\Delta\xi) &= \sigma_{\xi\eta}
 \end{aligned} \tag{1.120}$$

Άρα το σημείο Ξ στον κύκλο Mohr αντιστοιχεί στην εντατική κατάσταση, πάνω στο επίπεδο με μοναδιαίο εξωτερικό διάνυσμα \mathbf{n} , εξ. **Error! Reference source not found.**, που είναι παράλληλο προς το άξονα $O\xi$. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα έχουμε (Εικ. 1-32),

$$\sigma_{\xi\xi} = 10.889 \text{ kPa}$$

$$\sigma_{\eta\eta} = 4.111 \text{ kPa}$$

$$\sigma_{\xi\eta} = -1.941 \text{ kPa}$$



Εικ. 1-32: Κύκλος Mohr των τάσεων με πόλο

Στον κύκλο Mohr διακρίνουμε ένα χαρακτηριστικό σημείο $\Pi \equiv \Pi_n$, το οποίο θα ονομάσουμε, **πόλος των κάθετων**. Ο πόλος Π προκύπτει ως εξής: Από το σημείο $\Xi(\varphi)$ φέρνουμε κάθετο προς τον άξονα $O\sigma_n$ και ορίζουμε επί του κύκλου Mohr το σημείο Ξ' , ως το κατοπτρικό του Ξ ως προς τον άξονα $O\sigma_n$. Παρατηρούμε ότι η γωνία, $\angle(+x\Pi\Xi') = \varphi$. Άρα η ευθεία $\Pi\Xi'$ είναι παράλληλη προς τον άξονα $O\xi$, δηλαδή είναι παράλληλη προς το μοναδιαίο εξωτερικό διάνυσμα \mathbf{n} , το οποίο είναι κάθετο πάνω στο στοιχείο εκείνο όπου δρουν οι παραπάνω υπολογισθείσες, ορθή και διατμητική τάσεις, $\sigma_n = \sigma_n(\varphi)$, $\tau_n = \tau_n(\varphi)$.

Κατασκευή του πόλου των κάθετων: Έστω σημείο $\Xi(\varphi)$ πάνω στον κύκλο Mohr και Ξ' το κατοπτρικό του ως προς άξονα $O\sigma_n$. Αν φέρουμε μία ευθεία δια του Ξ' , παράλληλη προς το διάνυσμα \mathbf{n} (τον άξονα $O\xi$), τότε ευθεία αυτή τέμνει τον κύκλο Mohr στον πόλο Π .

Από την παραπάνω απόδειξη προκύπτει επίσης ότι **ο πόλος Π είναι μοναδικός για κάθε μία δεδομένη εντατική κατάσταση.**

Αν φέρουμε δια του πόλου μία ευθεία $\Pi\text{H}'$ που να είναι κάθετη στην $\Pi\Xi'$ και ως εκ τούτου παράλληλη προς άξονα $O\eta$ και ορίσουμε το σημείο H και το κατοπτρικό H' ως προς άξονα $O\sigma_n$, τότε παρατηρούμε ότι συμφώνως προς τα παραπάνω το σημείο H επί του κύκλου Mohr αντιστοιχεί στην εντατική κατάσταση πάνω στο επίπεδο εκείνο, του οποίου το μοναδιαίο εξωτερικό διάνυσμα \mathbf{n}' σχηματίζει το με τον θετικό ημι-άξονα Ox γωνία $\varphi' = 90^\circ + \varphi$.

Θεώρημα:

Έστω ένα (ορθογώνιο) σύστημα αξόνων $O(\xi, \eta)$ στραμμένων ως προς άξονες $O(x, y)$ κατά γωνία φ . Η ορθή και διατμητική τάση που ασκούνται πάνω σε ένα επίπεδο (Ξ) ,

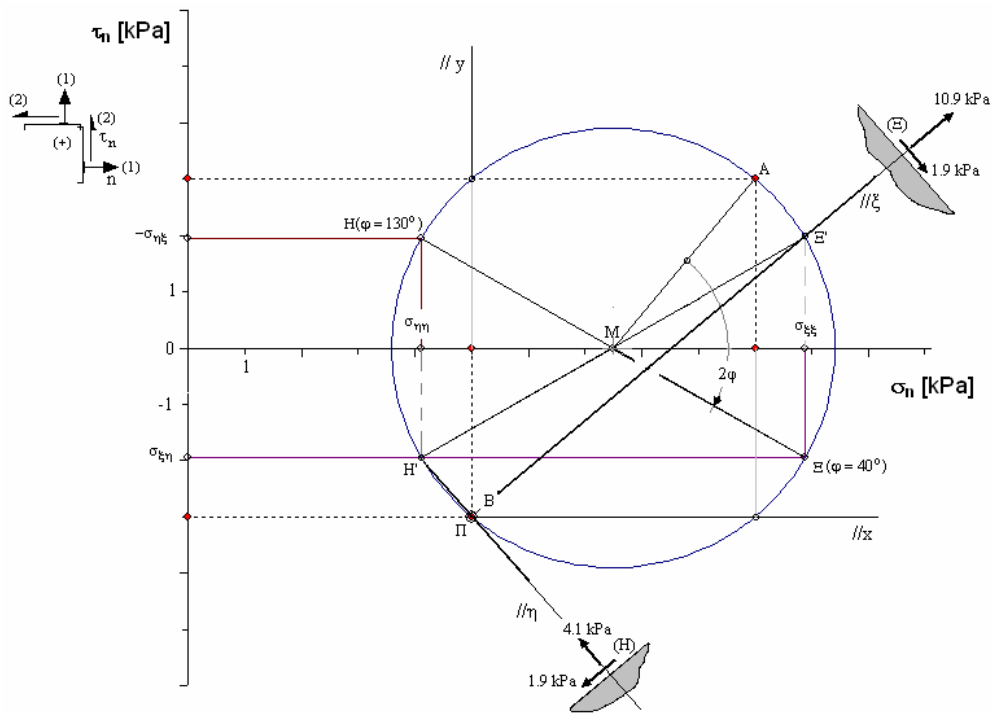
κάθετο στον άξονα ξ και εκείνες που ασκούνται πάνω σε ένα επίπεδο (H) κάθετο προς τον άξονα η απεικονίζονται στον κύκλο Mohr σε αντιδιαμετρικά σημεία Ξ και H αντιστοίχως, έτσι ώστε οι αντίστοιχες επίκεντρες γωνίες να είναι:

$$\sphericalangle (AM\Xi) = 2\varphi \quad (1.121)$$

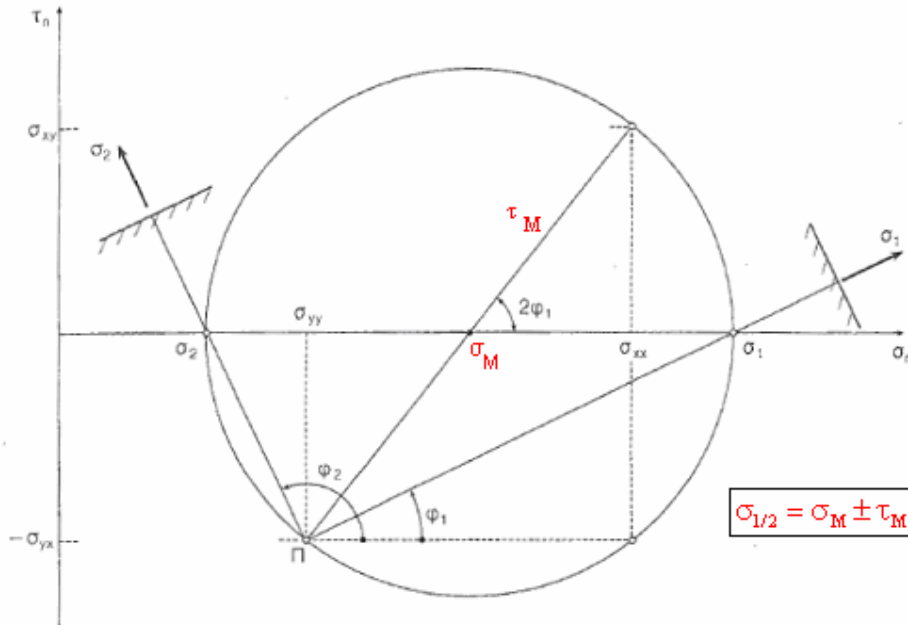
$$\sphericalangle (AMH) = 2(90^\circ + \varphi) = \sphericalangle (AM\Xi) + 180^\circ \quad (1.122)$$

Άρα τα σημεία Ξ και H είναι αντιδιαμετρικά. Και ομοίως και τα σημεία Ξ' και H' (Εικ. 1-33).

Από την παραπάνω κατασκευή προκύπτει ότι πράγματι τα αντιδιαμετρικά σημεία του κύκλου Mohr που βρίσκονται πάνω στον άξονα των ορθών τάσεων αντιστοιχούν στα κύρια επίπεδα του τανυστή των τάσεων. Όπως φαίνεται από τον κύκλο του Mohr (Εικ. 1-34), οι κύριες τάσεις είναι αντίστοιχα η μέγιστη και η ελάχιστη ορθή τάση, ενώ είναι προφανές ότι στα κύρια επίπεδα οι διατμητικές τάσεις είναι μηδέν.



Εικ. 1-33: Γραφικός προσδιορισμός του ελκυστή σε τυχόν επίπεδο



Εικ. 1-34: Γραφικός προσδιορισμός κυρίων τάσεων και κατευθύνσεων

Συμπέρασμα: Έστω ότι μια δεδομένη επίπεδη εντατική κατάσταση σε κάποιο σημείο ενός δίσκου περιγράφεται από τον τανυστή των τάσεων. Ο τανυστής των τάσεων με τη σειρά του ταυτίζεται με την ομάδα των πινάκων των τάσεων

$$\begin{bmatrix} \sigma_{\xi\xi} & \sigma_{\xi\eta} \\ \sigma_{\eta\xi} & \sigma_{\eta\eta} \end{bmatrix} \tag{1.123}$$

που προκύπτουν από κάποιο δεδομένο (αντιπρόσωπο)

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{bmatrix} \tag{1.124}$$

μέσω ενός ορθογώνιου μετασχηματισμού στροφής των αξόνων της μορφής

$$\begin{bmatrix} \sigma_{\xi\xi} & \sigma_{\xi\eta} \\ \sigma_{\eta\xi} & \sigma_{\eta\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \tag{1.125}$$

Π.χ. για $\varphi = \varphi_1$ η εξ. (1.125) δίδει,

$$\begin{bmatrix} \sigma_{\xi\xi} & \sigma_{\xi\eta} \\ \sigma_{\eta\xi} & \sigma_{\eta\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{bmatrix} \tag{1.126}$$

Συμφώνως με τα παραπάνω, η ολότητα αυτών των απεικονίσεων της εντατικής κατάστασης απεικονίζεται αμφιμονοσήμαντα στον αντίστοιχο (μοναδικό) κύκλο Mohr με πόλο Π. Με άλλα λόγια ο κύκλος Mohr των τάσεων με πόλο Π συνιστά τη γεωμετρική παράσταση του τανυστή των τάσεων.

Παρατήρηση

Η σύμβαση πρόσημου στη Γεωτεχνική Μηχανική δεν συμβαδίζει με εκείνη της Τεχνικής Μηχανικής. Ως εκ τούτου η κατασκευή του κύκλου Mohr των τάσεων επίσης διαφέρει.

