ΕΠΙΛΥΣΗ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ CRAMER

Πηγές:

1. Λ.Μπακόπουλος, Ι.Χρυσοβέργης, *Εισαγωγή Στην Αριθμητική Ανάλυση*, Εκδόσεις Συμεών (1999)
2. Σχολικό Εγχειρίδιο Μαθηματικών, ΟΕΔΒ (1997)

ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Χρησιμοποιώντας τη γνωστή από την ΄Αλγεβρα μέθοδο Cramer με ορίζουσες για την απ' ευθείας επίλυση ενός γραμμικού συστήματος 100 εξισώσεων με 100 αγνώστους σε ένα μεγάλο σύγχρονο υπολογιστή απαιτείται περισσότερο από 10^{140} αιώνες! Αν όμως εφαρμόσουμε τη μέθοδο απαλοιφής Gauss (η οποία αναπτύσσεται σε αυτό το κεφάλαιο) στο παραπάνω γραμμικό σύστημα, τότε το σύστημα αυτό λύνεται στον ίδιο Υπολογιστή σε λιγότερο από 0.01 δευτερόλεπτο!

Παραδείγματα προβλημάτων που ανάγονται στην επίλυση ενός ή περισσοτέρων γραμμικών συστημάτων είναι οι συνήθεις και οι μερικές διαφορικές εξισώσεις, οι ολοκληρωτικές εξισώσεις, τα προβλήματα ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων, οι πολυωνυμικές και άλλες προσεγγίσεις συναρτήσεων, ο υπολογισμός ελαχίστων τετραγώνων, ο γραμμικός και μη γραμμικός προγραμματισμός, η βελτιστοποίηση συναρτησιακών, ο βέλτιστος έλεγχος κ.ά. Ακόμα και τα μη γραμμικά συστήματα, και τα άλλα μη γραμμικά προβλήματα, ανάγονται και αυτά στην επίλυση γραμμικών συστημάτων. Πιο συγκεκριμένα, ανάγονται στην επίλυση μιας ακολουθίας γραμμικών συστημάτων, των οποίων οι λύσεις επιδιώκεται να συγκλίνουν στη λύση του δοθέντος προβλήματος. ΄Ετσι, είναι σαφές ότι στην Αριθμητική Ανάλυση (και σε συναφείς άλλους κλάδους κατασκευαστικών Μαθηματικών, όπως ο βέλτιστος έλεγχος, η θεωρία προσεγγίσεως συναρτήσεων, ο μαθηματικός προγραμματισμός και διάφορα προβλήματα Επιχειρησιακής ΄Ερευνας) η ταχύτητα και η αξιοπιστία με την οποία μπορούν να λυθούν τα γραμμικά συστήματα στον Υπολογιστή παίζουν σημαντικό ρόλο και, προφανώς, εξαρτώνται από την αριθμητική μέθοδο που χρησιμοποιείται.

Διακρίνονται δύο γενικές μέθοδοι αριθμητικής λύσης γραμμικών συστημάτων της μορφής $Ax = b$, οι άμεσες και οι έμμεσες (ή επαναληπτικές). Στην πρώτη κατηγορία ανήκει η μέθοδος απαλοιφής Gauss και στη δεύτερη οι μέθοδοι Jacobi και Gauss-Seidel. Οι επαναληπτικές μέθοδοι χρησιμοποιούνται συχνά, ιδιαίτερα στη λύση μερικών διαφορικών εξισώσεων και προβλημάτων βελτιστοποίησης. Σε αυτή, και σε πολλές άλλες εφαρμογές, ο πίνακας Α αποτελείται από μεγάλο πλήθος μηδενικών στοιχείων με ειδική δομή. ΄Ετσι ένας σύγχρονος Υπολογιστής μπορεί να λύσει γρήγορα τέτοια γραμμικά συστήματα (π.χ. της τάξης $10^8 \times 10^8$) τα οποία προκύπτουν συχνά στις

2.6

ΕΠΙΛΥΣΗ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ν×ν ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΤΟΥ CRAMER

Είδαμε ότι ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων, μπορεί να έχει μια μονο λύση ή άπειρο πλήθος λύσεων ή να είναι αδύνατο.

Για ένα όμως γραμμικό σύστημα ν×ν (δηλαδή ένα σύστημα που έχει τον ίδιο αριθμό εξισώσεων και αγνώστων), μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το επόμενο θεώρημα, για να προσδιορίσουμε αν το σύστημα αυτό έχει μοναδική λύση:

ΘΕΩΡΗΜΑ: Αν ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος, τότε το σύστημα των γραμμικών εξισώσεων AX = B έχει μοναδική λύση, που δίνεται από την ισότητα $X = A^{-1}B$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έχουμε διαδοχικά τις ισοδύναμες ισότητες

$$\begin{aligned} AX &= B \\ A^{-1}(AX) &= A^{-1}B \\ (A^{-1}A)X &= A^{-1}B \\ I_\nu X &= A^{-1}B \\ X &= A^{-1}B \end{aligned}$$

Το επόμενο θεώρημα που αναφέρεται ως κανόνας του Cramer μας παρέχει μία ακόμα μέθοδο επίλυσης γραμμικού συστήματος ν×ν.

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω το ν×ν γραμμικό σύστημα AX = B.

- Αν $|A| \neq 0$, τότε το σύστημα έχει μοναδική λύση την $(x_1, x_2,\ldots,x_\nu)$ με

$$x_1 = \frac{Dx_1}{D},\ x_2 = \frac{Dx_2}{D},\ldots,\ x_\nu = \frac{Dx_\nu}{D}$$

όπου D είναι η ορίζουσα |A| των συντελεστών των αγνώστων και Dx_i, i=1,2,3,...,ν είναι η ορίζουσα που προκύπτει από την D αν αντικαταστήσουμε την i στήλη των συντελεστών του αγνώστου x_i με τη στήλη των σταθερών όρων.

- Αν $|A| = 0$, τότε το σύστημα ή είναι αδύνατο ή έχει άπειρο πλήθος λύσεων.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

- Έστω ότι $|A| \neq 0$. Τότε ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος και όπως είδαμε παραπάνω, η μοναδική λύση του ν×ν συστήματος AX=B, είναι $X=A^{-1}B$. Επομένως, σύμφωνα με τον τύπο $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{adj}A$, έχουμε διαδοχικά:

$$X = \frac{1}{|A|}\,\text{adj}A \cdot B$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_\nu \end{bmatrix} = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \ldots\ldots A_{\nu 1} \\ A_{12} & A_{22} \ldots\ldots A_{\nu 2} \\ \vdots & \vdots \qquad\quad \vdots \\ A_{1\nu} & A_{2\nu} \ldots\ldots A_{\nu\nu} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_\nu \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_\nu \end{bmatrix} = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} \beta_1 A_{11}+\beta_2 A_{21} +\ldots+ \beta_\nu A_{\nu 1} \\ \beta_1 A_{12}+\beta_2 A_{22} +\ldots+ \beta_\nu A_{\nu 2} \\ \vdots \\ \beta_1 A_{1\nu}+\beta_2 A_{2\nu} +\ldots+ \beta_\nu A_{\nu\nu} \end{bmatrix}$$

Από την ισότητα των πινάκων έχουμε:

$$x_1 = \frac{1}{|A|}(\beta_1 A_{11}+\beta_2 A_{21}+\ldots+\beta_\nu A_{\nu 1})$$

$$x_2 = \frac{1}{|A|}(\beta_1 A_{12}+\beta_2 A_{22}+\ldots+\beta_\nu A_{\nu 2})$$

....

$$x_\nu = \frac{1}{|A|}(\beta_1 A_{1\nu}+\beta_2 A_{2\nu}+\ldots+\beta_\nu A_{\nu\nu})$$

Αλλά, κάθε παράσταση μέσα στην παρένθεση είναι το ανάπτυγμα μιας ορισμένης ορίζουσας. Η πρώτη π.χ. παράσταση $\beta_1 A_{11}+\beta_2 A_{21}+\ldots+\beta_\nu A_{\nu 1}$ είναι το ανάπτυγμα κατά τα στοιχεία της πρώτης στήλης της ορίζουσας

$$Dx_1 = \begin{vmatrix} \beta_1 & \alpha_{12} & \alpha_{13}\ldots\alpha_{1\nu} \\ \beta_2 & \alpha_{22} & \alpha_{23}\ldots\alpha_{2\nu} \\ \vdots & \vdots & \vdots \quad \vdots \\ \beta_\nu & \alpha_{\nu 2} & \alpha_{\nu 3}\ldots\alpha_{\nu\nu} \end{vmatrix}$$

Επομένως $x_1 = \frac{Dx_1}{D}$. Ομοίως και για τους άλλους αγνώστους βρίσκουμε

$$x_2 = \frac{Dx_2}{D}, \quad x_3 = \frac{Dx_3}{D}, \ldots, x_\nu = \frac{Dx_\nu}{D}$$

- Η απόδειξη της δεύτερης περίπτωσης παραλείπεται.

Από το θεώρημα αυτό προκύπτει ότι:

ΠΟΡΙΣΜΑ

Το ομογενές σύστημα $AX = O$,
- έχει μόνο τη μηδενική λύση, αν και μόνο αν $|A| \neq 0$.
- έχει και μη μηδενικές λύσεις (άπειρο πλήθος), αν και μόνον αν $|A| = 0$.

ΣΧΟΛΙΑ

1) Ένα $\nu\times\nu$ γραμμικό σύστημα $AX = B$ με $|A| \neq 0$, λέγεται και **σύστημα Cramer,** η δε επίλυση του συστήματος αυτού αναφέρεται και ως **κανόνας** του **Cramer.**

2) Για την επίλυση ενός $\nu\times\nu$ γραμμικού συστήματος $AX = B$ με $|A| = 0$ εργαζόμαστε συνήθως με τη μέθοδο απαλοιφής του Gauss.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1η **Να λυθεί το σύστημα** $\begin{cases} 2x+3y-\omega = 1 \\ 4x+y+2\omega = 5 \\ x-y+\omega = 2 \end{cases}$

ΛΥΣΗ

Έχουμε $D = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$, $Dx = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 5 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 7$, $Dy = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -3$

και $D\omega = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$. Επομένως, σύμφωνα με τον κανόνα του Cramer, είναι

$$x = \frac{Dx}{D} = \frac{7}{5},\ y = \frac{Dy}{D} = \frac{3}{5} \text{ και } \omega = \frac{D\omega}{D} = \frac{0}{5} = 0.$$

Δηλαδή το σύστημα έχει τη μοναδική λύση $(\frac{7}{3}, -\frac{3}{5}, 0)$.

$\boxed{\textbf{2η}}$ **Να λυθεί το σύστημα:** $\begin{cases} x + y - \omega = 1 \\ 2x + 3y + \lambda\omega = 3 \\ x + \lambda y + 3\omega = 2 \end{cases}$

ΛΥΣΗ

Έχουμε
$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & \lambda \\ 1 & \lambda & 3 \end{vmatrix} = -\lambda^2 - \lambda + 6 = -(\lambda+3)(\lambda-2)$$

$$Dx = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & \lambda \\ 2 & \lambda & 3 \end{vmatrix} = -\lambda^2 - \lambda + 6 = -(\lambda+3)(\lambda-2)$$

$$Dy = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & \lambda \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -\lambda + 2 = -(\lambda-2) \qquad \text{και}$$

$$D\omega = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & \lambda & 2 \end{vmatrix} = -\lambda + 2 = -(\lambda-2)$$

Οι τιμές της παραμέτρου λ που μηδενίζουν την D είναι οι -3 και 2.

- Για $\lambda \neq -3$ και $\lambda \neq 2$ είναι $D \neq 0$ και επομένως:

$$x = \frac{Dx}{D} = \frac{-(\lambda+3)(\lambda-2)}{-(\lambda+3)(\lambda-2)} = 1, \quad y = \frac{Dy}{D} = \frac{-(\lambda-2)}{-(\lambda+3)(\lambda-2)} = \frac{1}{\lambda+3} \text{ και}$$
$$\omega = \frac{D\omega}{D} = \frac{-(\lambda-2)}{-(\lambda+3)(\lambda-2)} = \frac{1}{\lambda+3}$$

δηλαδή το σύστημα έχει τη μοναδική λύση $(1, \frac{1}{\lambda+3}, \frac{1}{\lambda+3})$

- Για $\lambda = -3$ το σύστημα γίνεται $\begin{cases} x + y - \omega = 1 \\ 2x + 3y - 3\omega = 3 \\ x - 3y + 3\omega = 2 \end{cases}$

Σχηματίζουμε τον επαυξημένο πίνακα του συστήματος και έχουμε διαδοχικά:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -3 & 3 \\ 1 & -3 & 3 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{c} \Gamma_2 \to \Gamma_2 - 2\Gamma_1 \\ \Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_1 \\ \sim \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 4 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} \Gamma_3 \to \Gamma_3 + 4\Gamma_2 \\ \sim \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right]$$

Άρα για $\lambda = -3$ το σύστημα είναι αδύνατο.

- Για $\lambda = 2$ το σύστημα γίνεται $\begin{cases} x + y - \omega = 1 \\ 2x + 3y + 2\omega = 3 \\ x + 2y + 3\omega = 2 \end{cases}$

Σχηματίζουμε τον επαυξημένο πίνακα του συστήματος και έχουμε διαδοχικά:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \end{array}\right] \underset{\sim}{\begin{array}{c} \Gamma_2 \to \Gamma_2 - 2\Gamma_1 \\ \Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_1 \end{array}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \end{array}\right] \underset{\sim}{\Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \underset{\sim}{\Gamma_1 \to \Gamma_1 - \Gamma_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Επομένως $\begin{cases} x = 5\omega \\ y = 1-4\omega \end{cases}$

Άρα για $\lambda=2$ το σύστημα έχει άπειρο πλήθος λύσεων της μορφής $(5\kappa, 1-4\kappa, \kappa)$, $\kappa \in \mathbb{R}$.

3η **Να λυθεί το ομογενές σύστημα** $\begin{cases} x+\alpha y \quad +2\omega = 0 \\ \alpha x-3y+(\alpha+1)\omega = 0 \\ -x+2y \quad +\alpha\omega = 0 \end{cases}$, $\alpha \in \mathbb{R}$

ΛΥΣΗ

Έχουμε $D = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & 2 \\ \alpha & -3 & \alpha+1 \\ -1 & 2 & \alpha \end{vmatrix} = (\alpha+2)(-\alpha^2+\alpha-4)$

Η τιμή της παραμέτρου α που μηδενίζει την ορίζουσα $D = (\alpha+2)(-\alpha^2+\alpha-4)$ είναι η -2 (γιατί $-\alpha^2+\alpha-4 < 0$ για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$).

- Για $\alpha \neq -2$ είναι $D \neq 0$ και επομένως το σύστημα έχει μοναδική λύση που προφανώς είναι η μηδενική (0,0,0).

- Για $\alpha = -2$ το σύστημα γίνεται: $\begin{cases} x-2y+2\omega = 0 \\ -2x-3y-\omega = 0 \\ -x+2y-2\omega = 0 \end{cases}$

Σχηματίζουμε τον επαυξημένο πίνακα του συστήματος και έχουμε διαδοχικά:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & -3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right] \underset{\sim}{\begin{array}{c} \Gamma_2 \to \Gamma_2 + 2\Gamma_1 \\ \Gamma_3 \to \Gamma_3 + \Gamma_1 \end{array}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -7 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \underset{\sim}{\Gamma_2 \to -\frac{1}{7}\Gamma_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3/7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \underset{\sim}{\Gamma_1 \to \Gamma_1 + 2\Gamma_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 8/7 & 0 \\ 0 & 1 & -3/7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Επομένως $\begin{cases} x = -\dfrac{8}{7}\omega \\ y = \dfrac{3}{7}\omega \end{cases}$

Άρα το σύστημα έχει άπειρο πλήθος λύσεων της μορφής $\left(-\frac{8}{7}\kappa, \frac{3}{7}\kappa, \kappa\right)$, $\kappa \in \mathbb{R}$

Παρατηρήσεις

1η Ο κανόνας του Cramer δεν είναι αποδοτική μέθοδος για να χρησιμοποιηθεί στη λύση συστημάτων με ένα μεγάλο αριθμό εξισώσεων, γιατί πρέπει να υπολογιστούν πολλές ορίζουσες μεγάλης τάξης.

2η Ως προς τους αριθμητικούς υπολογισμούς η μέθοδος επίλυσης συστήματος με τον αλγόριθμο του Gauss υπερτερεί του κανόνα του Cramer. Όμως ο κανόνας του Cramer είναι ιδιαίτερα χρήσιμος σε θεωρητικά ζητήματα.