ΠΑΡΑΡΤΗΜΑΤΑ

1. Στοιχεία Διανυσματικού Λογισμού

1.1 Συμβολισμοί

Οι καρτεσιανές συντεταγμένες ενός σημείου στο χώρο συμβολίζονται ως

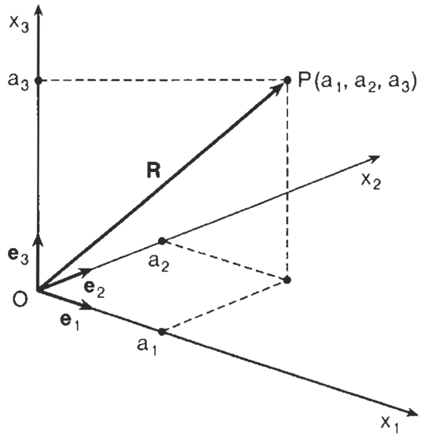
x, y, z

ή

x_1, x_2, x_3

αντιστοίχως

Στο σημείο του χώρου $P(a_1, a_2, a_3)$ αντιστοιχεί το διάνυσμα θέσης



$$\overrightarrow{OP} = \mathbf{R} = a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + a_3 \mathbf{e}_3$$

όπου $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ και $\mathbf{e}_3$ τα μοναδιαία διανύσματα βάσης.

Σε σχέση με τη σταθερή βάση $O(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ το διάνυσμα $\mathbf{R}$ μπορεί να παρασταθεί ως στήλη:

$$\{\mathbf{R}\} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

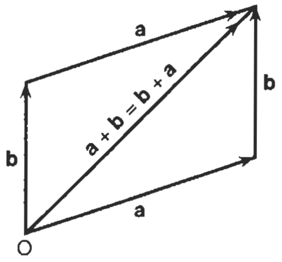
Ενίοτε χρησιμοποιείται και ο συμβολισμός μέσω **ελευθέρων δεικτών**:

$$\mathbf{R} = \sum_{i=1}^{3} a_i \mathbf{e}_i = a_i \mathbf{e}_i \quad (i = 1, 2, 3)$$

όπου η άθροιση πάνω στον επαναλαμβανόμενο δείκτη (i) εννοείται.

1.2 Άθροισμα Διανυσμάτων

Ο νόμος του παραλληλογράμμου ή 4ος νόμος του Νεύτωνα (lex quarta)



$$\mathbf{a} = \mathbf{b} + \mathbf{c}$$

ή

$$a_1\,\mathbf{e}_1 + a_2\,\mathbf{e}_2 + a_3\,\mathbf{e}_3 =$$

$$= b_1\,\mathbf{e}_1 + b_2\,\mathbf{e}_2 + b_3\,\mathbf{e}_3 + c_1\,\mathbf{e}_1 + c_2\,\mathbf{e}_2 + c_3\,\mathbf{e}_3$$

$$= (b_1 + c_1)\,\mathbf{e}_1 + (b_2 + c_2)\,\mathbf{e}_2 + (b_3 + c_3)\,\mathbf{e}_3$$

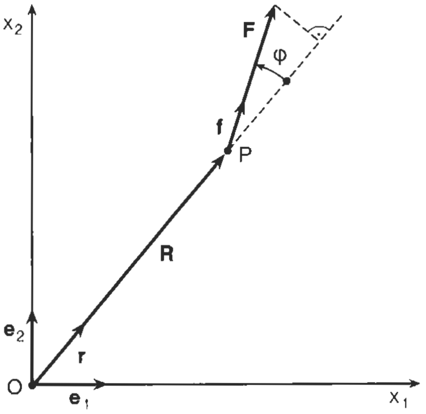
ή

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$$

ή $\quad a_1 = b_1 + c_1, \quad a_2 = b_2 + c_2, \quad a_3 = b_3 + c_3$

$$\underline{a_i = b_i + c_i} \quad (i = 1, 2, 3)$$

1.3 Εσωτερικό Γινόμενο Διανυσμάτων



$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{F} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{R}$$

$$\lambda\mathbf{R} \cdot \mathbf{F} = \lambda\,(\mathbf{R} \cdot \mathbf{F}) = \mathbf{R} \cdot (\lambda\mathbf{F})$$

$$\mathbf{R}\,(\mathbf{F} + \mathbf{Q}) = \mathbf{R} \cdot \mathbf{F} + \mathbf{R} \cdot \mathbf{Q}$$

Σε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων τα διανύσματα βάσης έχουν τις εξής ιδιότητες:

$$\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 = 1, \quad \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = 0, \quad \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_3 = 0 \quad \text{κ.ο.κ.}$$

ή

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{αν} \quad i = j \\ 0 & \text{αν} \quad i \neq j \end{cases} \qquad \text{(δέλτα του Kronecker)}$$

Οπότε:

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{F} = (a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + a_3 \mathbf{e}_3) \cdot (b_1 \mathbf{e}_1 + b_2 \mathbf{e}_2 + b_3 \mathbf{e}_3)$$

$$= a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

αλλά και

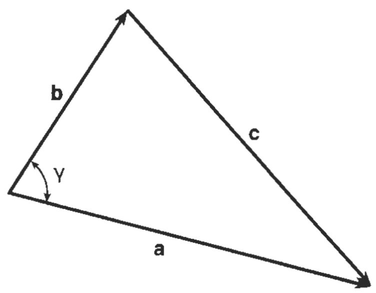
$$\mathbf{R} = |\mathbf{R}|\mathbf{r}, \quad R = |\mathbf{R}| = \sqrt{\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}, \quad \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} = 1, \quad r_1 = a_1/|\mathbf{R}| \quad \text{κ.ο.κ.}$$

$$\mathbf{F} = |\mathbf{F}|\mathbf{f}, \quad F = |\mathbf{F}| = \sqrt{\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}} = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}, \quad \mathbf{f} \cdot \mathbf{f} = 1, \quad f_1 = F_1/|\mathbf{F}| \quad \text{κ.ο.κ.}$$

$$\Rightarrow \mathbf{R} \cdot \mathbf{F} = |\mathbf{R}||\mathbf{F}|(\mathbf{r} \cdot \mathbf{f}) = |\mathbf{R}||\mathbf{F}| \cos\varphi = RF\cos\varphi$$

$$\Rightarrow \cos\varphi = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\ \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

Εφαρμογή: Ο νόμος του συνημιτόνου



$$\mathbf{a} = \mathbf{b} + \mathbf{c} \Rightarrow \mathbf{c} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$$

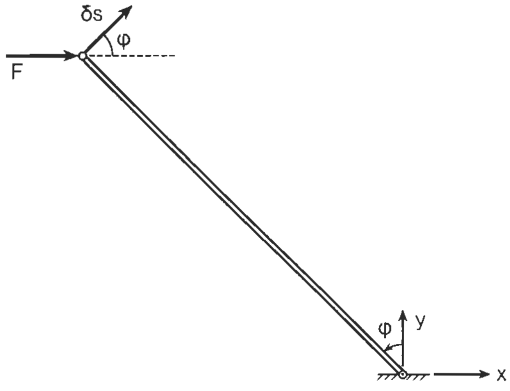
οπότε:

$$\mathbf{c} \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{a} - \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b})$$

$$= \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} - 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$$

$$\Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

- **Έργο δύναμης**



$$\mathbf{F} = F\mathbf{e}_x$$

$$\delta\mathbf{s} = \delta s\,(\cos\varphi\ \mathbf{e}_x + \sin\varphi\ \mathbf{e}_y)$$

$$\delta A = \mathbf{F} \cdot \delta\mathbf{s}$$

$$\Rightarrow \delta A = F\mathbf{e}_x \cdot \delta s\,(\cos\varphi\ \mathbf{e}_x + \sin\varphi\ \mathbf{e}_y)$$

$$\underline{\delta A = F\delta s\cos\varphi}$$

- **Έργο ροπής**

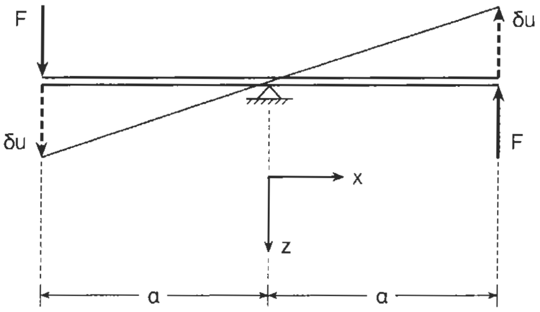
$\mathbf{F}_1 = F\mathbf{e}_z, \quad \mathbf{F}_2 = F(-\mathbf{e}_2)$

$\delta\mathbf{u}_1 = \delta u\mathbf{e}_z, \quad \delta\mathbf{u}_2 = \delta u(-\mathbf{e}_2)$

$\delta A = \Sigma\mathbf{F}_i \cdot \delta\mathbf{u}_i$

$\Rightarrow \quad \delta A = F\mathbf{e}_z \cdot \delta u\mathbf{e}_z + F(-\mathbf{e}_z) \cdot \delta u(-\mathbf{e}_z)$

$\delta A = 2F\delta u$

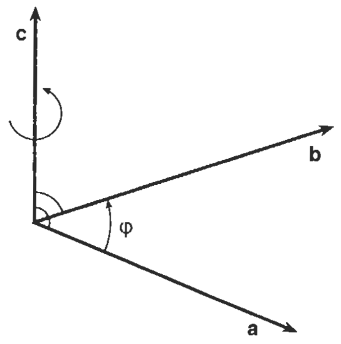


Με: $\delta u = \alpha\delta\varphi, \quad M = F(2a) \Rightarrow$

$\delta A = M\delta\varphi$

1.4 Εξωτερικό Γινόμενο Διανυσμάτων

$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$



Σε ένα δεξιόστροφο σύστημα συντεταγμένων το εξωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων βάσης ορίζεται ως εξής:

$\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_1 = 0,$

$\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_3 = -\mathbf{e}_2$ κ.ο.κ.

Γενικώς

$\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j = \varepsilon_{ijk}\mathbf{e}_k$, ε_{ijk} έψιλον του Levi-Civita:

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{αν } (i, j, k) \text{ κυκλική εναλλαγή του } (1, 2, 3) \\ -1 & \text{αν } (i, j, k) \text{ κυκλική εναλλαγή του } (2, 1, 3) \\ 0 & \text{σε κάθε άλλη περίπτωση} \end{cases}$$

Άρα:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

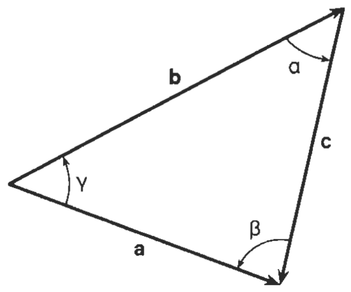
$$= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{e}_1 - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{e}_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \mathbf{e}_3$$

Εφαρμογή: Ο νόμος του ημιτόνου

$\mathbf{a} = \mathbf{b} + \mathbf{c} \;\Rightarrow\; \mathbf{b} = \mathbf{a} - \mathbf{c}$

$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times (\mathbf{a} - \mathbf{c})$

$\quad = \mathbf{a} \times \mathbf{a} - \mathbf{a} \times \mathbf{c} = -\,\mathbf{a} \times \mathbf{c}$



$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow\; \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{c} \times \mathbf{a} \\ \mathbf{a} \times \mathbf{b} = (\mathbf{b} + \mathbf{c}) \times \mathbf{c} = \mathbf{b} \times \mathbf{c}\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\underline{\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \mathbf{c} \times \mathbf{a}}$$

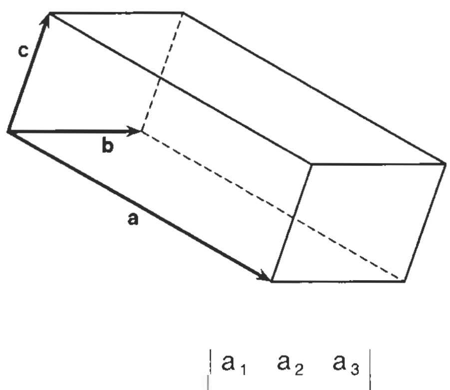
$$|a|\,|b| \sin\gamma = |b|\,|c| \sin\alpha = |c|\,|a| \sin\beta \;\Rightarrow\; \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}\,.$$

1.5 Μεικτό Γινόμενο Διανυσμάτων

Η ποσότητα

$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$

ισούται με τον όγκο του στερεού που εσωκλείεται από τα διανύσματα **a**, **b** και **c** και είναι θετική, όταν τα **a**, **b**, **c** αποτελούν δεξιόστροφο σύστημα.



$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \;\Rightarrow\; (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Άρα ο όγκος V του παραλληλεπιπέδου που αναπτύσσεται από τα διανύσματα **a**, **b**, **c** δίνεται διαδοχικά από τους παρακάτω τύπους:

$$V = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = -(\mathbf{b} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{c} = -\mathbf{c} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{a})$$

$$= (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = -(\mathbf{c} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a} = -\mathbf{a} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{b})$$

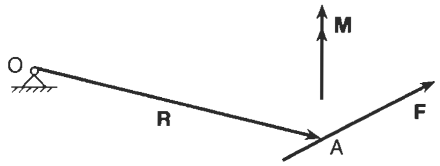
$$= (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = -(\mathbf{a} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{b} = -\mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{c})$$

2. Ιδιότητες Ολισθαίνοντων Διανυσμάτων

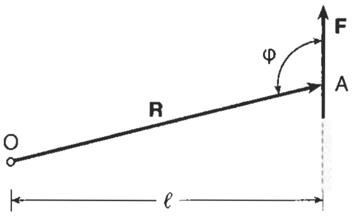
2.1 Ροπή Διανύσματος ως προς Σημείο

Η ροπή του διανύσματος **F** ως προς το σημείο Ο ορίζεται ως το εξωτερικό γινόμενο του διανύσματος θέσης

$$\overrightarrow{OA} = \mathbf{R}$$



σε τυχόν σημείο Α του άξονα της **F**, επί την **F**:



$$\mathbf{M} = \mathbf{R} \times \mathbf{F}$$

$$|\mathbf{M}| = |\mathbf{F}| \cdot |\mathbf{R}| \cdot \sin\varphi$$

ή

$$M = F\ell$$

Αναλυτικά έχουμε τις εξής εκφράσεις για τη ροπή:

$$\mathbf{M} = \mathbf{R} \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \mathbf{e}_1 (a_2 F_3 - a_3 F_2) + \mathbf{e}_2 (a_3 F_1 - a_1 F_3) + \mathbf{e}_3 (a_1 F_2 - a_2 F_1)$$

ή

$$M_1 = (a_2 F_3 - a_3 F_2)$$

$$M_2 = (a_3 F_1 - a_1 F_3)$$

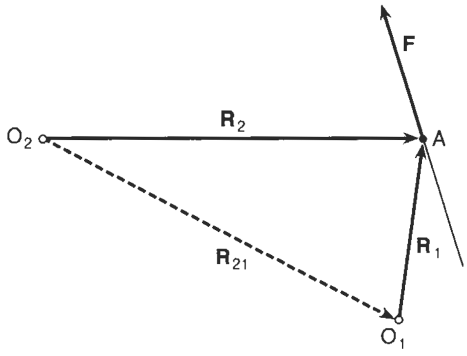
$$M_3 = (a_1 F_2 - a_2 F_1)$$

Ας θεωρήσουμε τώρα τις ροπές του διανύσματος **F** ως προς δύο σημεία O_1 και O_2:

$$\mathbf{M}_1 = \mathbf{R}_1 \times \mathbf{F}$$

$$\mathbf{M}_2 = \mathbf{R}_2 \times \mathbf{F}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{M}_2 - \mathbf{M}_1 = (\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1) \times \mathbf{F}$$

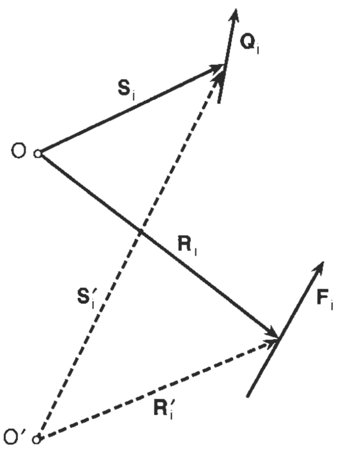


Με:

$$\mathbf{R}_{21} = \mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1 \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\mathbf{M}_2 = \mathbf{M}_1 + \mathbf{R}_{21} \times \mathbf{F}}$$

2.2 Ισοδύναμα Συστήματα Διανυσμάτων



Δύο συστήματα διανυσμάτων: $\{\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, ...\}$ και $\{\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2, ...\}$ θα λέγονται **ισοδύναμα** όταν έχουν το ίδιο γεωμετρικό άθροισμα (συνισταμένη) **R** και την ίδια ροπή **M** ως προς τυχόν σημείο του χώρου.

Έστω πράγματι ότι

$$\Sigma\mathbf{F}_i = \Sigma\mathbf{Q}_i = \mathbf{R}$$

και έστω ότι ως προς O:

$$\Sigma\mathbf{R}_i \times \mathbf{F}_i = \Sigma\mathbf{S}_i \times \mathbf{Q}_i = \mathbf{M}^{(O)}$$

Οι ροπές των συστημάτων αυτών ως προς άλλο, τυχόν σημείο O′ του χώρου είναι (βλέπε αποτέλεσμα του 2.1)

$$\mathbf{M}_F^{(O')} = \Sigma\mathbf{R}_i \times \mathbf{F}_i + \Sigma\overrightarrow{O'O} \times \mathbf{R}_i$$

$$= \mathbf{M}^{(O)} + \overrightarrow{O'O} \times \Sigma\mathbf{R}_i$$

$$= \mathbf{M}^{(O)} + \overrightarrow{O'O} \times \mathbf{R}$$

$$\mathbf{M}_Q^{(O')} = \Sigma\mathbf{S}_i \times \mathbf{Q}_i + \Sigma\overrightarrow{O'O} \times \mathbf{Q}_i$$

$$= \mathbf{M}^{(O)} + \overrightarrow{O'O} \times \Sigma\mathbf{Q}_i$$

$$= \mathbf{M}^{(O)} + \overrightarrow{O'O} \times \mathbf{R}$$

άρα η ισότητα των ροπών ισχύει και ως προς Ο′:

$$\mathbf{M}_F^{(O')} = \mathbf{M}_Q^{(O')}$$

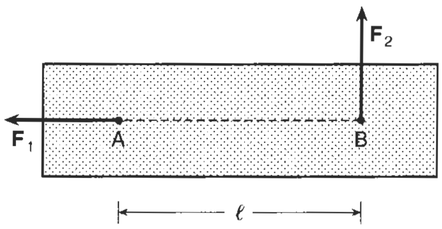
Λήμμα

Αν ένα σύστημα δυνάμεων $\{\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \ldots\}$ έχει συνισταμένη ροπή μηδέν ως προς ένα σημείο του χώρου, τότε έχει συνισταμένη ροπή μηδέν ως προς οποιοδήποτε άλλο σημείο του χώρου.

Με άλλα λόγια για την διατύπωση των εξισώσεων ισορροπίας ροπών η επιλογή του σημείου ως προς το οποίο θα υπολογισθούν οι ροπές των δυνάμεων που ασκούνται σε ένα φορέα είναι αυθαίρετη και συνήθως υπαγορεύεται από παρατηρήσεις που οδηγούν σε απλούστερους υπολογισμούς.

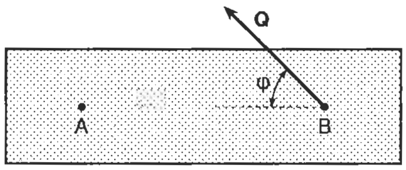
Παράδειγμα:

Δύο διανύσματα $\mathbf{F}_1$ και $\mathbf{F}_2$ προσαρτημένα στα σημεία Α και Β είναι ισοδύναμα προς ένα διάνυσμα $\mathbf{Q}$, προσαρτημένο στο σημείο Β. Οπότε η συνισταμένη $\mathbf{R}$ των $\mathbf{F}_1$ και $\mathbf{F}_2$ ισούται με την $\mathbf{Q}$:



$$\mathbf{Q} = \mathbf{R} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$$

Επίσης η ροπή της $\mathbf{Q}$ ως προς τυχόν σημείο ισούται με την ροπή των $\{\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2\}$ ως προς το σημείο αυτό.

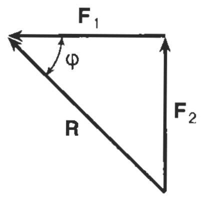


Ειδικά για το σημείο Α έχουμε:

$$\mathbf{M}_F^{(A)} = \overrightarrow{AB} \times \mathbf{F}_2 \Rightarrow M_F^{(A)} = F_2\,\ell$$

$$\mathbf{M}_Q^{(A)} = \overrightarrow{AB} \times \mathbf{Q}$$

$$\Rightarrow M_Q^{(A)} = Q\,\ell \sin\varphi = R\,\ell \sin\varphi$$



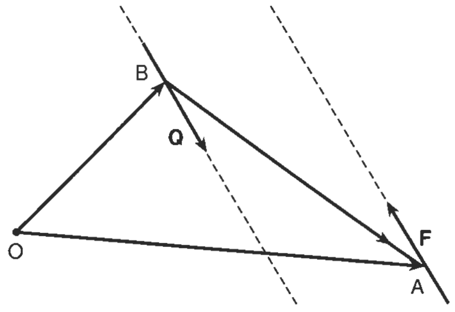
οπότε από τις παραπάνω σχέσεις παίρνουμε:

$$\sin\varphi = \frac{F_2}{R}$$

2.3 Επίπεδο Ζεύγος Διανυσμάτων

Θεωρούμε δύο παράλληλα διανύσματα **F** και **Q** που έχουν συνισταμένη μηδέν

$$\mathbf{R} = \mathbf{F} + \mathbf{Q} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{Q} = -\mathbf{F}$$



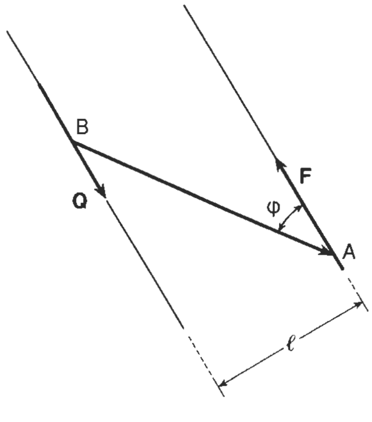
Θεωρούμε επίσης τη ροπή του συστήματος των δυνάμεων {**F**, **Q**} ως προς τυχόν σημείο Ο του χώρου

$$\mathbf{M}^{(0)} = \overrightarrow{OA} \times \mathbf{F} + \overrightarrow{OB} \times \mathbf{Q}$$

$$= \overrightarrow{OA} \times \mathbf{F} - \overrightarrow{OB} \times \mathbf{F}$$

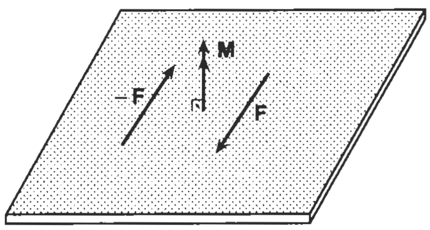
$$= \left(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}\right) \times \mathbf{F}$$

$$\mathbf{M}^{(0)} = \overrightarrow{BA} \times \mathbf{F}$$



Το διάνυσμα αυτό της ροπής του ζεύγους των δυνάμεων {**F**, **Q** = – **F**} είναι κάθετο προς το επίπεδο του ζεύγους, και έχει μέτρο

$$M = \overrightarrow{BA} \cdot |\mathbf{F}| \cdot \sin\varphi = \underline{|\mathbf{F}| \cdot \ell}$$



Άρα η ροπή του ζεύγους είναι η αυτή ως προς οποιοδήποτε σημείο του χώρου και ως εκ τούτου ανεξάρτητη του σημείου Ο ως προς το οποίο υπολογίζονται οι ροπές των επί μέρους δυνάμεων του ζεύγους. Η ροπή **M** του ζεύγους {**F**, – **F**} είναι διάνυσμα **ελεύθερο** κάθετο στο επίπεδο του ζεύγους των δυνάμεων.

Εφαρμογή:

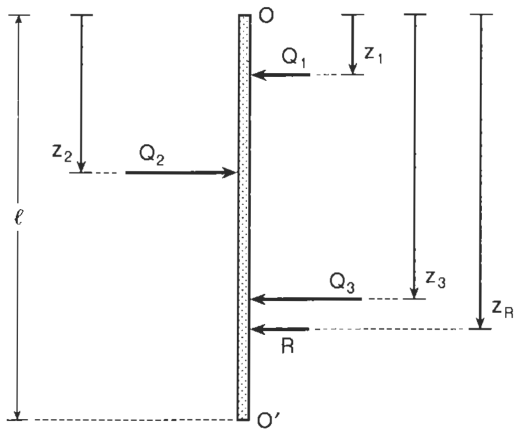
Δίδεται ένα σύστημα διανυσμάτων {$\mathbf{Q}_1$, $\mathbf{Q}_2$, $\mathbf{Q}_3$}, όπου τα μέτρα τους και οι θέσεις τους είναι:

$Q_1 = Q, \quad z_1 = 2.7\,\mathrm{m}$

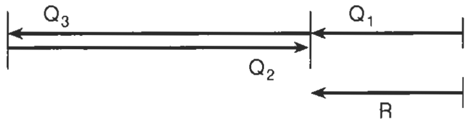
$Q_2 = 2Q, \quad z_2 = 7.2\,\mathrm{m}$

$Q_3 = 2Q, \quad z_3 = 12.8\,\mathrm{m}$

Να βρεθεί ένα ισοδύναμο σύστημα, αποτελούμενο από **ένα** διάνυσμα **R**.



Οπότε:



$$\mathbf{R} = \mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_2 + \mathbf{Q}_3$$

$$= \mathbf{Q} - 2\mathbf{Q} + 2\mathbf{Q} = \mathbf{Q} \;\Rightarrow\; \underline{R = Q}$$

$$R z_R = Q_1 z_1 - Q_2 z_2 + Q_3 z_3$$

ή

$$Q Z_R = Q \cdot 2.7\,\mathrm{m} - 2Q \cdot 7.2\,\mathrm{m} + 2Q \cdot 12.8\,\mathrm{m} \;\Rightarrow\; \underline{z_R = 13.9\,\mathrm{m}}$$

Αν τώρα υπολογίσουμε τις ροπές των συστημάτων ($\mathbf{Q}_1$, $\mathbf{Q}_2$, $\mathbf{Q}_3$} και {$\mathbf{R}$} ως προς ένα άλλο σημείο, π.χ. το σημείο O′, τότε βρίσκουμε:

$$M_Q^{(O')} = (\ell - z_1) Q_1 - (\ell - z_2) Q_2 + (\ell - z_3) Q_3$$

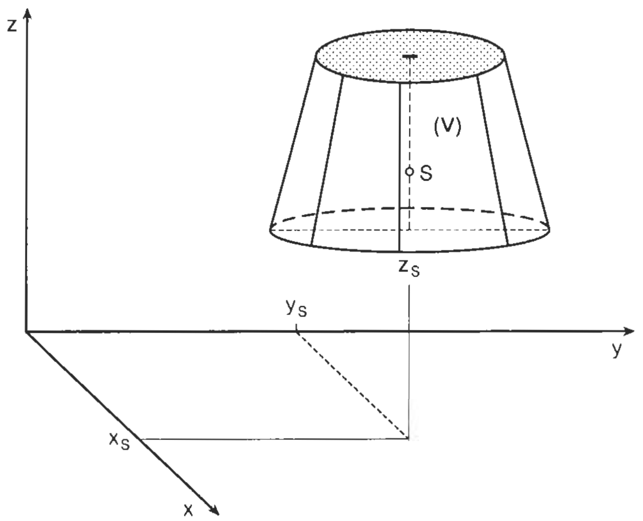
$$= \ell (Q_1 - Q_2 + Q_3) - (z_1 Q_1 - z_2 Q_2 + z_3 Q_3)$$

$$= \ell R - z_R R = (\ell - z_R) R = M_R^{(O')}\,!$$

3. Κέντρο Βάρους

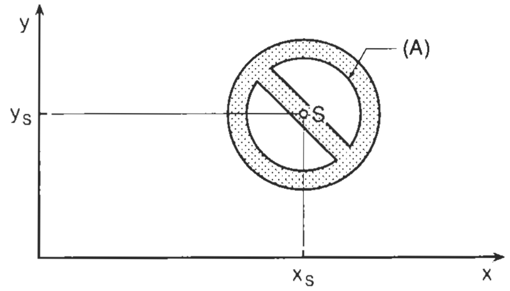
α) Για ένα τυχαίο τριδιάστατο ομογενές σώμα οι συντεταγμένες του κέντρου βάρους (κ.β.) δίνονται από τις σχέσεις:

$$x_S = \frac{\int xdV}{\int dV}, \quad y_S = \frac{\int ydV}{\int dV}, \quad z_S = \frac{\int zdV}{\int dV}$$



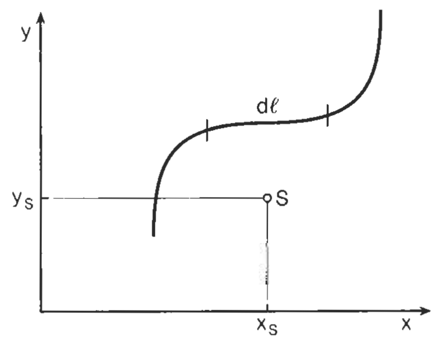
β) Ομοίως για το κ.β. μιας επιφάνειας έχουμε τις σχέσεις:

$$x_S = \frac{\int xdA}{\int dA}, \quad y_S = \frac{\int ydA}{\int dA}$$

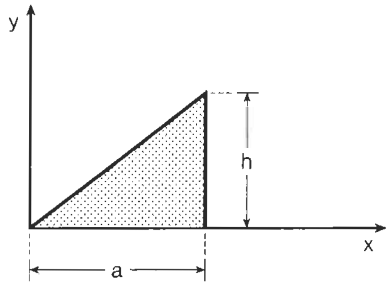


γ) Για το κ.β. μίας γραμμής στο επίπεδο:

$$x_s = \frac{\int x d\ell}{\int d\ell}, \quad y_s = \frac{\int y d\ell}{\int d\ell}$$



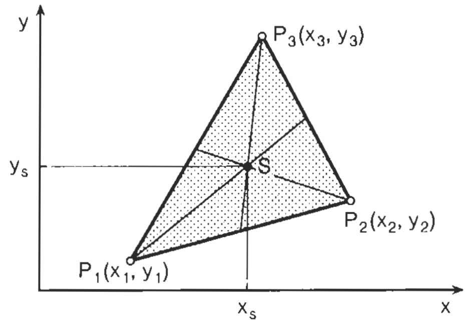
α) Τρίγωνο



$$x_S = \frac{2}{3}a$$

$$y_S = \frac{1}{3}h$$

$$A = \frac{1}{2}ah$$

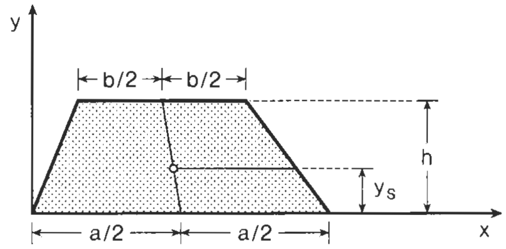


$$x_S = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3)$$

$$y_S = \frac{1}{3}(y_1 + y_2 + y_3)$$

$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}^{(1)}$$

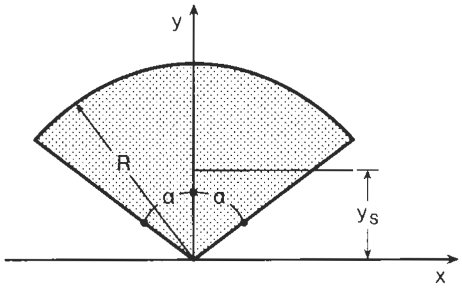
β) Τραπέζιο



$$y_S = \frac{h}{3}\,\frac{a + 2b}{a + b}$$

$$A = \frac{1}{2}(a + b)h$$

γ) Κυκλικός Τομέας



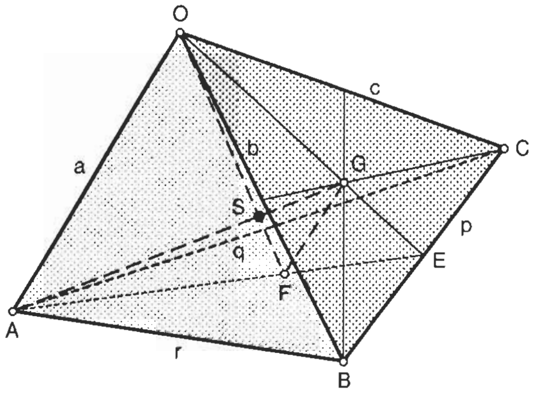
$$y_S = \frac{2}{3}R\,\frac{\sin\alpha}{\alpha}$$

$$A = \alpha R^2$$

---

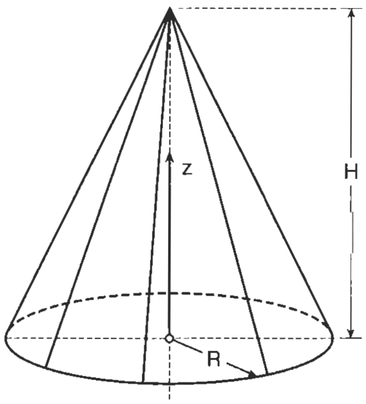
1. Τρία σημεία $P_i(x_i, y_i)$, $i = 1, 2, 3$ κείνται επ' εθείας όταν $A = 0$.

δ) Τετράεδρο



$$V^2 = \frac{1}{288}\begin{vmatrix} 0 & r^2 & q^2 & a^2 & 1 \\ r^2 & 0 & p^2 & b^2 & 1 \\ q^2 & p^2 & 0 & c^2 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad (OS):(SF) = (OA):(GF) = 3:1$$

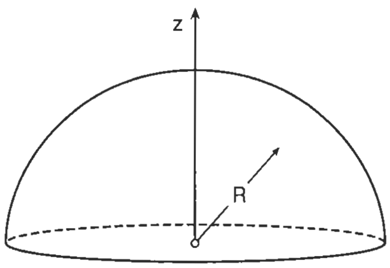
ε) Κώνος



$$z_S = \frac{1}{4}H$$

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$$

στ) Ημισφαίριο



$$z_S = \frac{3}{8}R$$

$$V = \frac{2}{3}\pi R^3$$

4. Στοιχεία αριθμητικής ανάλυσης

Κατά την επίλυση ισοστατικών δικτυωμάτων με την μέθοδο των κόμβων μπορούμε να συμπεράνουμε ότι οι άγνωστες δυνάμεις των ράβδων $S_1, S_2, \ldots, S_n$ μπορούν να βρεθούν από την συμπύκνωση γραμμικών εξισώσεων ισορροπίας σε κάθε κόμβο του δικτυώματος. Το πρόβλημα τελικά τίθεται σε μητρωϊκή μορφή ως

$$\utilde{A}\,\utilde{x} = \utilde{b}$$

όπου $\utilde{A}$ είναι ένα τετραγωνικό μητρώο (πίνακας) $n \times n$, που ενσωματώνει την γεωμετρία του δικτυώματος, $\utilde{x}$ είναι το διάνυσμα των αγνώστων τάσεων των ράβδων και $\utilde{b}$ είναι ένα διάνυσμα που ενσωματώνει τα γνωστά φορτία στους κόμβους και τις αντιδράσεις. Η επίλυση του ανωτέρω συστήματος δίνεται από

$$\utilde{x} = \utilde{A}^{-1}\,\utilde{b}$$

όπου $\utilde{A}^{-1}$ είναι το αντίστροφο μητρώο ($\utilde{A}^{-1}\,\utilde{A} = \utilde{I}$, όπου $\utilde{I}$ είναι ο μοναδιαίος πίνακας $n \times n$). Στους ισοστατικούς φορείς $\det A \neq 0$.

Ξενόγλωσση και Ελληνική Βιβλιογραφία

1) J.M. Gere and S.P. Timoshenko, *Mechanics of Materials*, 3rd SI Edition, Champan and Hall, 1995.
2) E.P. Beer and E.R. Johnston Jr., *Mechanics of Materials*, 2nd Edition in SI Units, McGraw Hill, 1992.
3) D. Gross, W. Hauger, W. Schnell *Technische Mechanik 1,* Springer 2002.
4) J. Heyman, *Elements of the theory structures* Cambridge University Press, 1996.
5) Α. Κουνάδη, *Σημειώσεις Ελαστικής Ευστάθειας,* 1983.

SI Μονάδες

Δύναμη **Newton**	[N]
Μάζα **kilogram**	[kg]
Μήκος **meter**	[m]
Χρόνος **second**	[sec]

$$\boxed{1\,\mathrm{N} = 1\,\mathrm{kg\,m\,sec^{-2}}}$$

Τάση **Pascal** [Pa]

$$\boxed{1\,\mathrm{Pa} = 1\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m^2}}}$$

Υποδιαιρέσεις

$1\mu = 10^{-6}$ $1m = 10^{-3}$ $1c = 10^{-2}$ $1d = 10^{-1}$

$1k = 10^{3}$ $1M = 10^{6}$ $1G = 10^{9}$