

4. ΟΛΟΣΩΜΟΙ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΟΙ ΦΟΡΕΙΣ

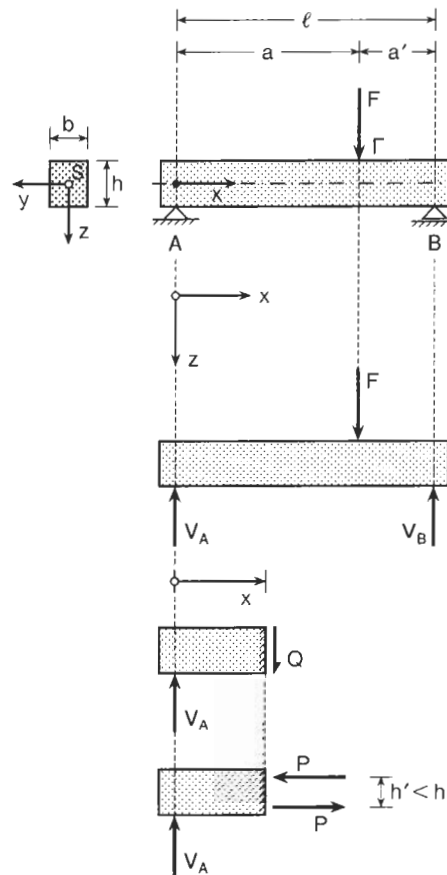
4.1 Βασικές Έννοιες και Ορισμοί

Η στατική λειτουργία των ολόσωμων φορέων μελετάται, όπως και στους δικτυωτούς, με τη βοήθεια της μεθόδου των τομών: Θεωρούμε ένα ολόσωμο φορέα, π.χ. μία αμφιέρειστη δοκό μήκους ℓ , που στηρίζεται στα σημεία A και B αντιστοίχως. Η δοκός αυτή έχει στο συγκεκριμένο παράδειγμα πλήρη ορθογωνική διατομή, διαστάσεων $h \times b$. Η δοκός φέρει ένα συγκεντρωμένο κατακόρυφο φορτίο F , που εφαρμόζεται στη θέση Γ ($x = a$).

Κατ' αρχήν ελευθερώνουμε τον φορέα από τις στηρίξεις του και τις αντικαθιστούμε με τις αντίστοιχες αντιδράσεις, που προκύπτουν από τις εξισώσεις ισορροπίας του ελευθέρου σώματος:

$$\left. \begin{aligned} \downarrow + \quad \Sigma F_z = 0: & \quad -V_A - V_B + F = 0 \\ \curvearrowright + \quad \Sigma M^B = 0: & \quad -V_A \cdot \ell + Fa' = 0 \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow V_A = \frac{a'}{\ell} F, \quad V_B = \frac{a}{\ell} F$$



Τώρα γεννάται το ερώτημα, πώς άραγε να μεταφέρεται στα στηρίγματα η δύναμη F . Η ερώτηση αυτή απαιτεί ουσιαστικά την κατασκευή ενός **στατικού προσομοιώματος** (μοντέλου) της λειτουργίας της δοκού. Για να περιγράψουμε μαθηματικά τη στατική λειτουργία της δοκού, προσφεύγουμε, όπως προαναφέραμε, στη μέθοδο της τομής. Σε τυχούσα θέση x της δοκού φέρουμε μία ιδεατή ορθή τομή, που αποκόπτει ένα τμήμα της δοκού. Έστω $x < a$, οπότε το μοναδικό εξωτερικό φορτίο που δρα στη δοκό είναι η αντίδραση V_A . Στο στατικό μοντέλο της δοκού πρέπει με κάθε ορθή τομή να εισάγουμε τόσες εσωτερικές δυνάμεις όσες χρειάζονται για την ισορροπία του αποκοπέντος τμήματος.

Πράγματι, από το σχήμα βλέπουμε ότι ισορροπία δυνάμεων απαιτεί την εμφάνιση μιας δύναμης Q που δρα κατακόρυφα δηλαδή παράλληλα στα χείλη της ορθής διατομής που εμφανίστηκε με την τομή:

$$+\downarrow \Sigma F_z = 0:$$

$$-V_A + Q = 0 \Rightarrow \underline{Q = V_A} \quad (1)$$

Η δύναμη Q που εμφανίζεται στη συγκεκριμένη διατομή, όπως κάθε εσωτερική δύναμη εμφανίζεται κατά ζεύγη. Η αντίδρασή της εμφανίζεται στην αντίπερα διατομή, έτσι ώστε, όταν νοερά συνεννώσουμε τον φορέα στη θέση της ιδεατής τομής αυτές να αλληλοαναιρούνται. Η δύναμη Q , που δρα κάθετα προς τον άξονα x της δοκού ονομάζεται **τέμνουσα διατμητική δύναμη**.

Η ισορροπία ροπών στο αποκομμένο τμήμα απαιτεί όπως στην διατομή αναπτύσσονται και ορθές δυνάμεις, παράλληλες προς τον άξονα x , οι οποίες να αποτελούν ζεύγος με συνισταμένη μεν δύναμη μηδέν αλλά με συνισταμένη ροπή διάφορη του μηδενός, έντασης

$$M = Ph'$$

έτσι ώστε,

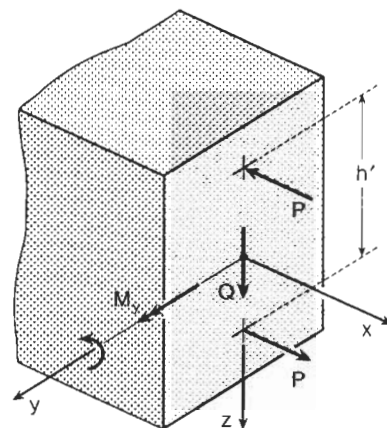
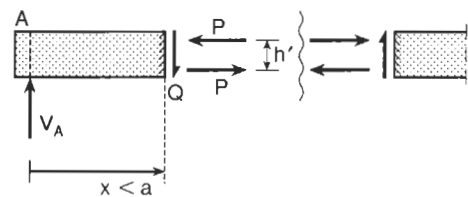
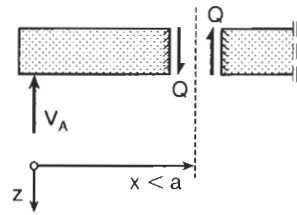
$$\curvearrowright \Sigma M^A = 0: -Qx + M = 0 \Rightarrow \underline{M = Qx} \quad (2)$$

Το τέμνον ζεύγος δυνάμεων $\{P, -P\}$ με ροπή M , εμφανίζεται και αυτό κατά ζεύγη, διότι είναι εσωτερικό στατικό μέγεθος. Το ζεύγος αυτό έχει διάνυσμα ροπής κάθετο προς το επίπεδο (x, z) , παράλληλο προς τον άξονα y :

$$\mathbf{M} = M_y \mathbf{e}_y$$

$$M_y = M$$

Η ροπή M του τέμνοντος ζεύγους δυνάμεων ονομάζεται **ροπή κάμψης**, διότι η δράση του προκαλεί κάμψη της δοκού.



Οι εξισώσεις ισορροπίας σε τμήματα του φορέα πρέπει να συμπληρωθούν τώρα με εκείνα που προκύπτουν, όταν η τομή γίνεται στα δεξιά του φορτίου F ($x > a$):

$$+\downarrow \Sigma F_z = 0:$$

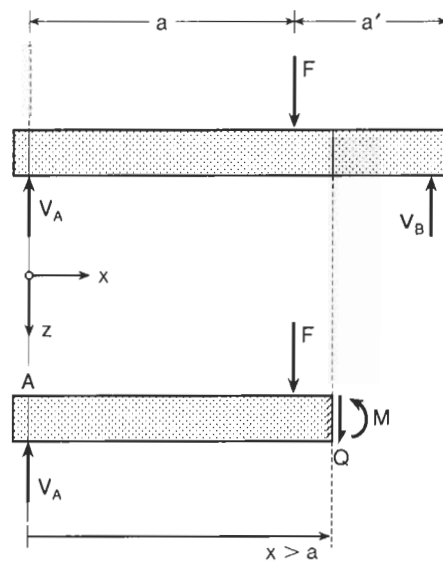
$$- V_A + F + Q = 0 \Rightarrow$$

$$Q = V_A - F = -V_B \quad (1')$$

$$\curvearrowright \Sigma M^A = 0:$$

$$- Fa - Qx + M = 0 \Rightarrow$$

$$M = Fa + Qx \quad (2')$$



Οι παραπάνω εξισώσεις (1), (2) και (1') και (2') για τις τέμνουσες δυνάμεις $Q = Q(x)$ και ροπές κάμψης $M = M(x)$ μπορούν να συνοψιστούν σε μορφή εξισώσεων και διαγραμμάτων:

4.2 Διαγράμματα Q και M

Για τον υπολογισμό των κατανομών των τέμνουσών δυνάμεων Q και των ροπών κάμψης M θεωρούμε το παραπάνω παράδειγμα της αμφιέρειστης δοκού κάτω από την επίδραση συγκεντρωμένου φορτίου F στη θέση $x = a$.

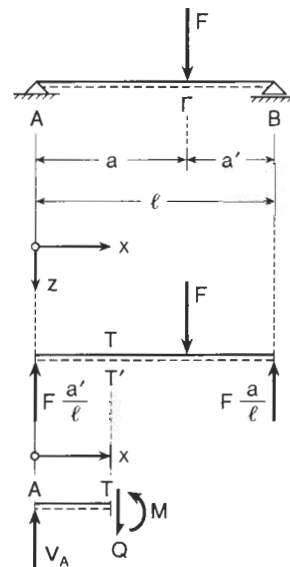
Κατ' αρχήν υπολογίζουμε τις αντιδράσεις:

$$V_A = F \frac{a'}{\ell}, \quad V_B = F \frac{a}{\ell} \quad (a' = \ell - a)$$

και σχεδιάζουμε τις δυνάμεις που ασκούνται στο ελεύθερο σώμα. Τα διαγράμματα των **εσωτερικών εντατικών μεγεθών** της δοκού (Q , M) προσδιορίζονται μέσω των αντιστοιχών εξισώσεων ισορροπίας δυνάμεων και ροπών για τμήμα AT της δοκού, μήκους x .

$$\Sigma F_z = 0$$

$$\Sigma M^A = 0$$



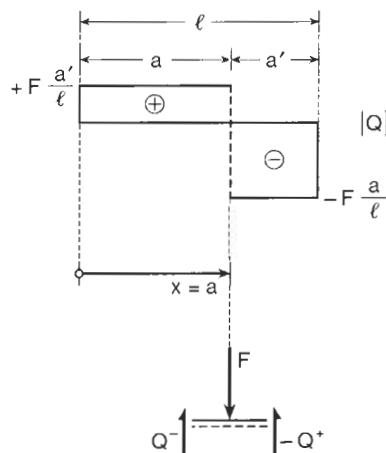
4.2.1 Διάγραμμα Τερνουσών Δυνάμεων Q

$$\text{Για } 0 \leq x < a: Q = F \frac{a'}{\ell}$$

$$a < x < \ell: Q = -F \frac{a}{\ell}$$

Παρατηρούμε ότι το διάγραμμα Q στη θέση εφαρμογής του συγκεντρωμένου φορτίου εμφανίζει ασυνέχεια και άλμα κατ' απόλυτη τιμή ίσο προς το φορτίο F.

$$[[Q]] = Q(a^+) - Q(a^-) = -F$$

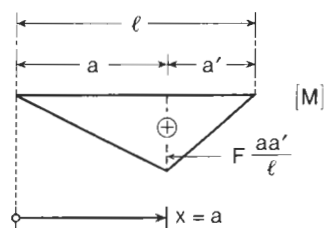


4.2.2 Διάγραμμα Ροπών Κάμψης M

$$\text{Για } 0 \leq x < a: M = Qx = F \frac{a'}{\ell} x$$

$$a < x \leq \ell: M = Fa + Qx$$

$$\Rightarrow M = Fa \left(1 - \frac{x}{\ell}\right)$$



Παρατηρούμε ότι στη θέση εφαρμογής του φορτίου $x = a$, η ροπή κάμψης είναι συνεχής και λαμβάνει την ακρότατη τιμή:

$$M_r = F \frac{aa'}{\ell}$$

Επίσης παρατηρούμε ότι στο παράδειγμα της αμφιέρειστης δοκού η ροπή κάμψης μηδενίζεται στις στηρίξεις (γιατί;):

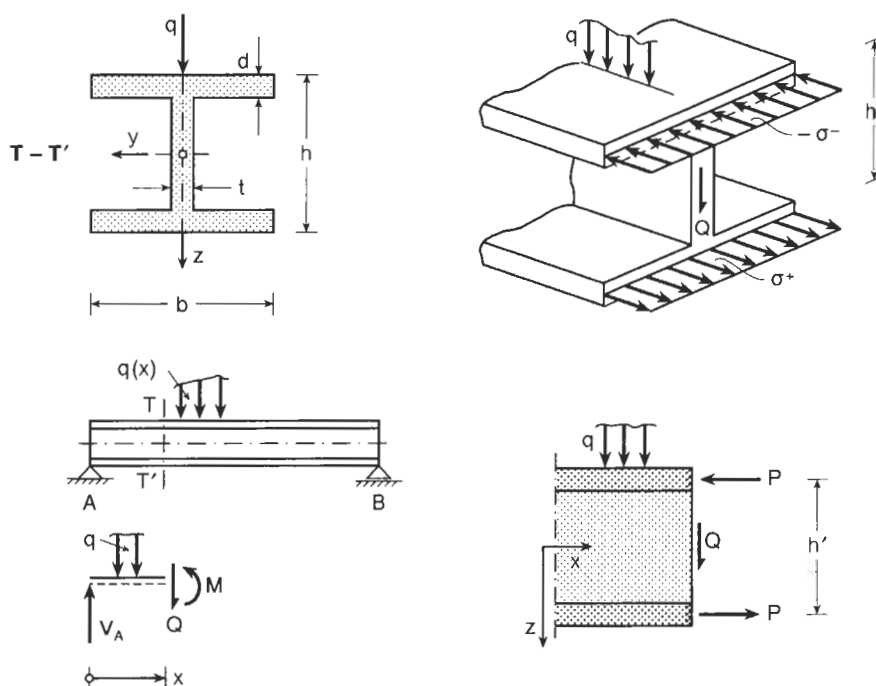
$$M(0) = M(\ell) = 0.$$

Στην περίπτωση όπου το φορτίο ασκείται στο **μέσο** της αμφιέρειστης δοκού ($a = a' = \ell/2$) η μέγιστη ροπή κάμψης είναι

$$M_m = \frac{F\ell}{4}$$

4.3 Επεξήγηση του Μηχανισμού «Μεταφοράς» των Φορτίων

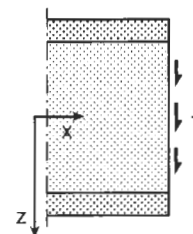
4.3.1 Διατομή σε Σχήμα I



Θεωρούμε μία αμφιέρειστη δοκό που κάτω από την επίδραση φορτίων $q = q(x)$ εμφανίζει στην τυχούσα διατομή της στη θέση x , τέμνουσα δύναμη Q και ροπή κάμψης M . Στο παράδειγμα που θεωρούμε, η διατομή της δοκού έχει σχήμα I. Η διατομή αυτή είναι πολύ διαδεδομένη σε μεταλλικές κατασκευές και αποτελείται από δύο πέλματα πλάτους b και πάχους d και κορμό ύψους h και πάχους t . Συνήθως τα πάχη d και t είναι κατά πολύ μικρότερα των άλλων δύο διαστάσεων b και h .

Στη διατομή αυτή η τέμνουσα δύναμη παραλαμβάνεται από το κορμό μέσω των λεγομένων **διατμητικών τάσεων**, δηλαδή κατανεμημένων στοιχειωδών δυνάμεων παράλληλων προς την επιφάνεια πάνω στην οποία αυτές δρουν, με μέση ένταση

$$\tau = \frac{Q}{A_s}, \quad A_s \approx ht$$



Στα πέλματα αντιθέτως αναπτύσσονται **ορθές τάσεις**, που δρουν κάθετα προς την επιφάνεια της διατομής και έχουν ένταση,

$$\sigma \approx \frac{P}{A_\pi}, \quad A_\pi = bd$$

Στο παράδειγμα του σχήματος παρατηρούμε ότι η συνολική δύναμη που ασκείται στο κάτω πέλμα είναι εφελκυστική, οπότε η αντίστοιχη ορθή τάση είναι επίσης θετική,

$$\sigma^+ = + \frac{P}{A_\pi} > 0$$

ενώ η συνολική δύναμη που ασκείται στο πάνω πέλμα είναι θλιπτική, και αντίστοιχα,

$$\sigma^- = - \frac{P}{A_\pi} < 0$$

Επειδή το ζεύγος των δυνάμεων στα πέλματα πρέπει να έχει ροπή ίση με την ροπή κάμψης στη συγκεκριμένη θέση,

$$Ph' = M, \quad h' = h - 2 \frac{d}{2} \approx h \quad (d \ll h)$$

έπεται ότι και οι αναπτυσσόμενες εφελκυστικές ή θλιπτικές τάσεις στα αντίστοιχα πέλματα είναι ανάλογες της ροπής κάμψης M :

$$\sigma^\pm = \pm \frac{M}{W}$$

όπου

$$W = h' A_\pi \approx (bd)h$$

Η ποσότητα W , λέγεται **ροπή αντίστασης της διατομής**, διότι καθορίζει την αντίσταση της δοκού σε εγκάρσια καταπόνηση. Δηλαδή για δεδομένη ροπή κάμψης (εξωτερική φόρτιση) οι τάσεις που θα αναπτυχθούν στα πέλματα της δοκού με διατομή I θα είναι αντιστρόφως ανάλογες της γεωμετρικής ποσότητας W . Από τον παραπάνω τύπο για τη ροπή αντίστασης της διατομής I , παρατηρούμε ότι αυξάνοντας το ύψος h του κορμού η τάση στα πέλματα μειώνεται αισθητά.

4.3.2 Ορθογωνική Διατομή

Στην ορθογωνική διατομή ο μηχανισμός παραλαβής των εσωτερικών δυνάμεων είναι πιο πολύπλοκος απ' ότι στη *λεπτότοιχη* διατομή I . Ειδικότερα για την τέμνουσα δύναμη Q , ο μηχανισμός παραλαβής του διατμητικού φορτίου θα αναλυθεί μέσα στα πλαίσια της

Μηχανικής του Παραμορφωσίμου Σώματος¹. Εδώ θα αναλύσουμε συνοπτικά μόνο τον μηχανισμό παραλαβής της ροπής κάμψης.

Σύμφωνα με το σχήμα κάθε στοιχειώδης επιφάνεια $dA = b dz$ συνεισφέρει ροπή κάμψης

$$dM = dP \cdot z, \quad dP = \sigma dA$$

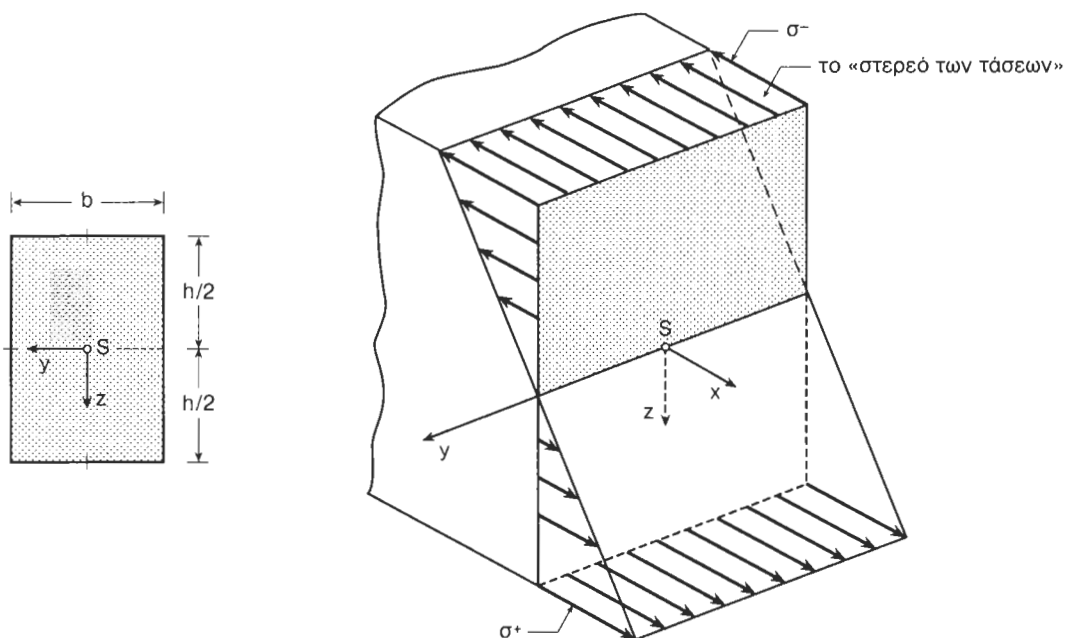
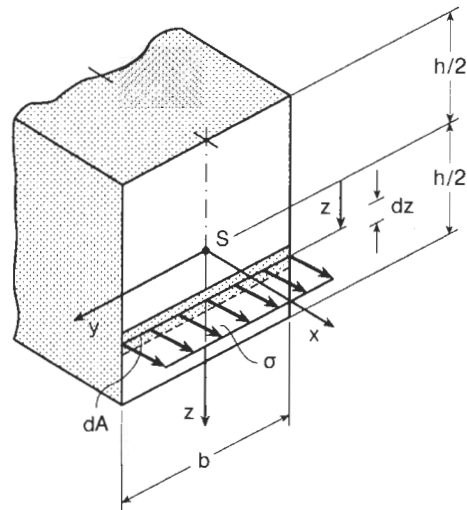
οπότε η συνολική ροπή που μπορεί να παραλάβει η διατομή, είναι

$$M = \int_{(A)} dM = \int_{(A)} \sigma z dA$$

και εξαρτάται από την κατανομή της ορθής τάσης σ πάνω στη διατομή.

Η απλούστερη κατανομή ορθών τάσεων πάνω στη διατομή που έχει συνισταμένη, ζεύγος δυνάμεων, είναι η **γραμμική** κατανομή:

$$\sigma = c z$$



1. Πρβλ. Ι. Βαρδουλάκη, Τεχνική Μηχανική II §5.9 εκδόσεις Συμμετρία 1999.

Πράγματι επειδή ο άξονας y περνάει από το κέντρο βάρους S της διατομής, η συνιστάμενη ορθή δύναμη είναι μηδέν για την κατανομή αυτή:

$$N = \int_{(A)} c z dA = 0$$

ενώ η συνιστάμενη ροπή παίρνει τη μορφή

$$M = c \int_{(A)} z^2 dA$$

Η ποσότητα

$$I_y = \int z^2 dA \quad (*)$$

χαρακτηρίζει γεωμετρικά τη διατομή και λέγεται **ροπή αδράνειας** της διατομής, ως προς άξονα y . Στην περίπτωση ορθογωνικής διατομής ύψους h και πλάτους b βρίσκουμε ότι

$$I_y = \int_{-h/2}^{h/2} z^2 b dz = b \left[\frac{z^3}{3} \right]_{-h/2}^{h/2} = b \frac{(h/2)^3}{3} = \frac{bh^3}{12}$$

Στην περίπτωση που εξετάζουμε βρίσκουμε επίσης ότι η σταθερά c στον τύπο κατανομής της τάσης υπολογίζεται από τη ροπή και τη ροπή αδράνειας,

$$c = \frac{M}{I_y}$$

άρα

$$\sigma = cz \Rightarrow \underline{\sigma = \frac{M}{I_y} z}$$

Η τάση σ λαμβάνει ακρότατες τιμές πάλι στα άκρα της διατομής, δηλαδή για

$$z = \pm h/2 \quad \sigma = \pm \frac{M}{I_y} \frac{h}{2} = \pm \frac{M}{W_y}$$

όπου η ροπή αντίστασης για την ορθογωνική διατομή προκύπτει ως εξής:

$$W_y = \frac{I_y}{h/2} = \frac{bh^2}{6}$$

Πάλι παρατηρούμε ότι το ύψος h της δοκού προσδίδει σημαντική *αντίσταση* σε κάμψη, δηλαδή μείωση των αναπτυσσόμενων ορθών τάσεων λόγω κάμψης.

4.4 Εξισώσεις Ισορροπίας Τεμνουσών Δυνάμεων και Ροπών Κάμψης

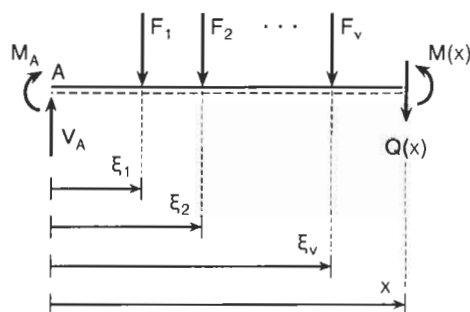
4.4.1 Συγκεντρωμένα Φορτία

Θεωρούμε κατ' αρχήν ισορροπία δυνάμεων:

$$+\downarrow \Sigma F_z = 0: (0 < \xi_1 < \dots < \xi_v < x)$$

$$Q + F_1 + F_2 + \dots + F_v - V_A = 0 \Rightarrow$$

$$Q = V_A - \sum_{i=1}^v F_i \quad (\xi_v < x)$$



Ισορροπία ροπών ως προς τη θέση x δίνει:

$$\curvearrowright \Sigma M^x = 0: M - M_A - V_A x - F_1(x - \xi_1) - \dots - F_v(x - \xi_v) = 0 \Rightarrow$$

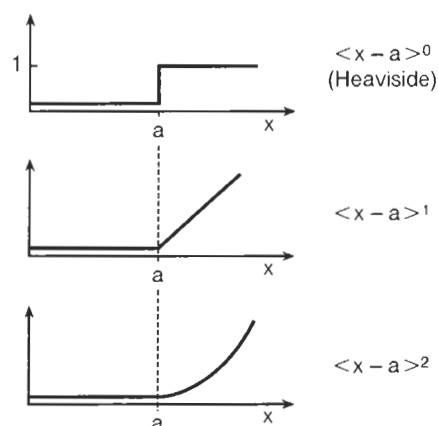
$$M = M_A + V_A x - \sum_{i=1}^v F_i(x - \xi_i) \quad (\xi_v < x)$$

Για τη συντομότερη γραφή των παραπάνω εκφράσεων για τις τέμνουσες και τις ροπές κάμψης κάνουμε χρήση του λεγομένου συμβόλου **Macaulay-Föppl**:

$$\langle x - a \rangle^n = \begin{cases} 0 & \text{για } x < a \\ (x - a)^n & \text{για } x > a \end{cases}$$

Σημειώνουμε επίσης την εξής ιδιότητα του συμβόλου Macaulay-Föppl:

$$\int \langle x - a \rangle^n dx = \frac{1}{n+1} \langle x - a \rangle^{n+1}$$



Συμφώνως με τον παραπάνω συμβολισμό έχουμε τις εξής εκφράσεις για τις τέμνουσες και τις ροπές κάμψης:

$$Q = V_A - \langle x - \xi_1 \rangle^0 F_1 - \dots - \langle x - \xi_v \rangle^0 F_v - \dots$$

$$M = M_A + V_A x - \langle x - \xi_1 \rangle^1 F_1 - \dots - \langle x - \xi_v \rangle^1 F_v - \dots$$

4.4.2 Κάμψη 4 Σημείων

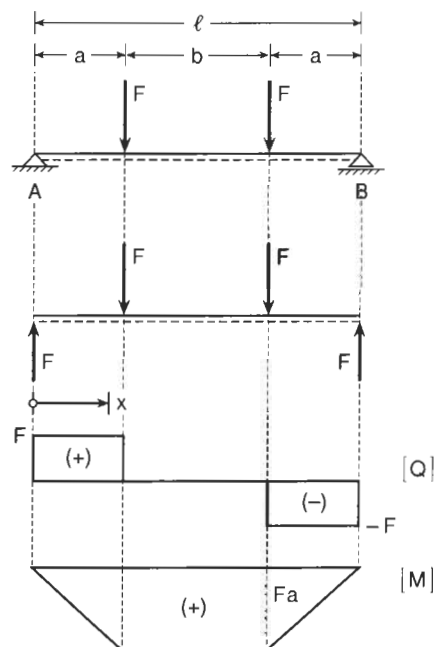
Θεωρούμε αμφιέριστη δοκό που φορτίζεται συμμετρικά από δύο ίσα φορτία F στις θέσεις $x = a$ και $x = \ell - a$.

Σύμφωνα με τους παραπάνω τύπους έχουμε τις εξής εκφράσεις για τις τέμνουσες δυνάμεις και ροπές κάμψης:

$$Q = F - \langle x - a \rangle^0 F - \langle x - \ell + a \rangle^0 F$$

$$M = Fx - \langle x - a \rangle^1 F - \langle x - \ell + a \rangle^1 F$$

Στο μεσαίο φάτνωμα ($a < x < \ell - a$) λέμε πως έχουμε **καθαρή κάμψη**, επειδή οι τέμνουσες μηδενίζονται και η ροπή κάμψης είναι σταθερή.



4.4.3 Καταναμημένα Φορτία

Θεωρούμε ένα φορέα που φορτίζεται από καταναμημένο φορτίο:

$$q = q(x) \quad [q] = \frac{F}{L}$$

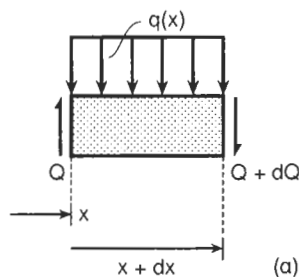
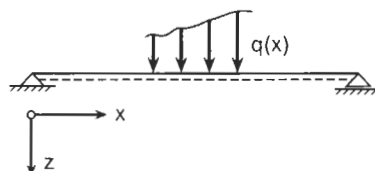
Στη θέση x αποτέμνουμε ένα στοιχείο μήκους dx και θεωρούμε,

α) **ισοροπία δυνάμεων:**

$$+\downarrow \Sigma F_z = 0:$$

$$-Q + qdx + Q + dQ = 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{dQ}{dx} + q(x) = 0} \quad (1)$$



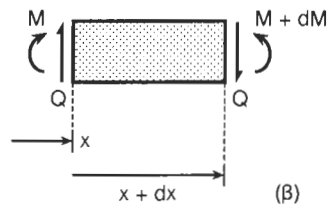
β) **ισορροπία ροπών** σε προσέγγιση απειροστών πρώτης τάξης:

$$\sum \circlearrowleft M^x = 0: -M - Qdx + M + dM = 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{-Q + \frac{dM}{dx} = 0} \quad (2)$$

Η δεύτερη εξίσωση δίνει:

$$Q = \frac{dM}{dx}$$



Από τις παραπάνω εξισώσεις (1) και (2) μπορούμε τέλος να απαλείψουμε το Q:

$$\boxed{\frac{d^2 M}{dx^2} = -q(x)} \quad (3)$$

Οι παραπάνω διαφορικές εξισώσεις ισορροπίας στο στοιχείο του φορέα, μπορούν να ολοκληρωθούν κατ' ευθείαν (με την προϋπόθεση να είναι γνωστές οι αρχικές τιμές στο $x = 0$, $Q(0)$, $M(0)$):

$$\frac{dQ}{dx} = -q(x) \Rightarrow Q(x) = Q(0) - \int_0^x q(\xi) d\xi$$

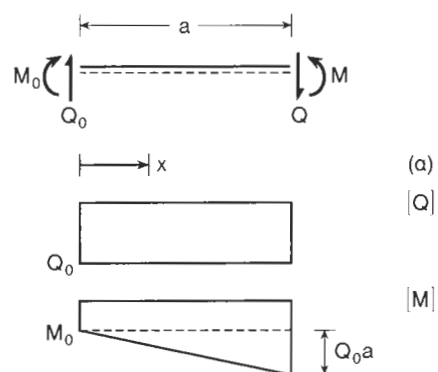
$$\frac{dM}{dx} = Q(x) \Rightarrow M(x) = M(0) + \int_0^x Q(\xi) d\xi$$

Παραδείγματα:

α) Όπως προκύπτει από τα παραπάνω ολοκληρώματα, σ' ένα αφόρτιστο τμήμα ενός γραμμωτού φορέα ($q = 0$) οι τέμνουσες είναι σταθερές και οι ροπές κάμψης μεταβάλλονται γραμμικά

$$Q = Q_0$$

$$M = M_0 + Q_0 x$$



β) Αντιστοίχως, για σταθερό καταναεμημένο φορτίο ($q = q_0$: σταθ.) οι τέμνουσες μεταβάλλονται γραμμικά και οι ροπές παραβολικά:

$$Q = Q_0 - q_0 x$$

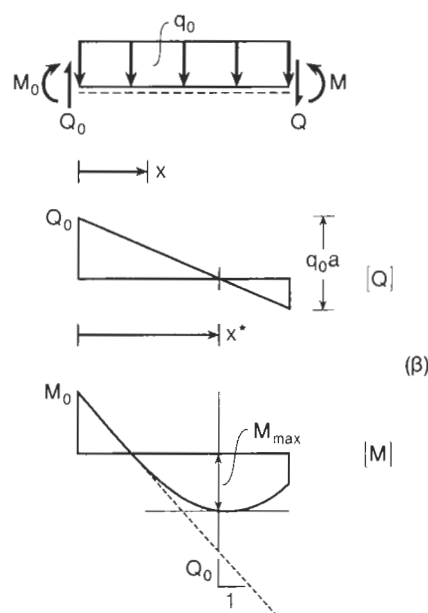
$$M = M_0 + Q_0 x - \frac{1}{2} q_0 x^2$$

Παρατηρούμε ότι:

$$\left. \frac{dM}{dx} \right|_{x=0} = Q_0$$

Επίσης, εκεί που μηδενίζονται οι τέμνουσες, οι ροπές κάμψης έχουν (αναλυτικό) ακρότατο:

$$Q|_{x=x^*} = 0 \Rightarrow M|_{x=x^*} = \text{Extr!}$$



Προσοχή: Τα αναλυτικά ακρότατα δεν συνεπάγονται απολύτως μέγιστες ή ελάχιστες τιμές

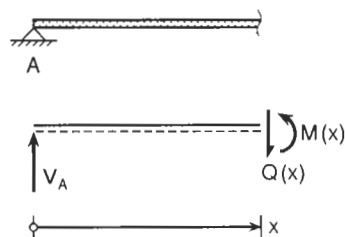
4.4.4 Συνοριακές Συνθήκες

Κατά την ολοκλήρωση των εξισώσεων ισορροπίας προκύπτουν δύο σταθερές ολοκλήρωσης, $Q_0 = Q(0)$ και $M_0 = M(0)$, που με τη σειρά τους πρέπει να προσδιοριστούν από αντίστοιχες **συνοριακές συνθήκες**. Θεωρούμε τις εξής τυπικές στηρίξεις:

- **Άρθρωση:** Για $x = 0$:

$$Q(0) = V_A$$

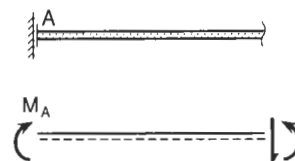
$$M(0) = 0$$



- **Εγκάρσιος Οδηγός:**

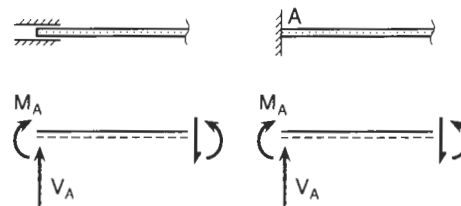
$$Q(0) = 0$$

$$M(0) = M_A$$



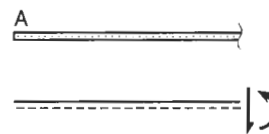
- **Διαμήκης Οδηγός ή Πάκτωση:**

$$Q(0) = V_A, \quad M(0) = M_A$$



- **Ελεύθερο Σύνορο:**

$$Q(0) = 0, \quad M(0) = 0$$



4.4.5 Εφαρμογές

1) Αμφιέριστη δοκός υπό σταθερό φορτίο

- Αντιδράσεις:

$$V_A = V_B = \frac{q_0 \ell}{2},$$

$$M_A = M_B = 0$$

- Διάγραμμα τεμνουσών:

$$Q = Q(0) - \int_0^x q_0 d\xi \Rightarrow$$

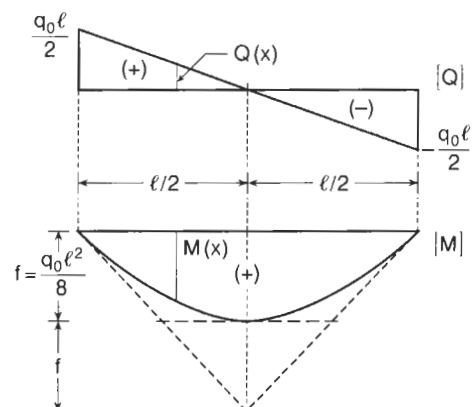
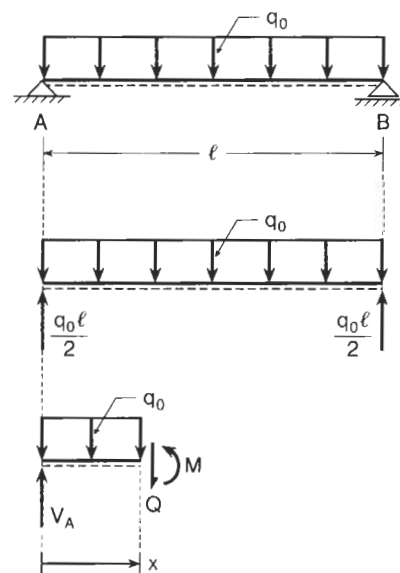
$$Q = V_A - q_0 x = \frac{q_0 \ell}{2} \left(1 - 2 \frac{x}{\ell} \right)$$

$$\text{Για } x = \frac{\ell}{2} \Rightarrow Q = 0.$$

- Διάγραμμα ροπών κάμψης:

$$M = M(0) + \int_0^x \frac{q_0 \ell}{2} \left(1 - 2 \frac{\xi}{\ell} \right) d\xi \Rightarrow$$

$$M = \frac{q_0 \ell^2}{2} \left\{ \left(\frac{x}{\ell} \right) - \left(\frac{x}{\ell} \right)^2 \right\}$$



Παρατηρούμε ότι στην περίπτωση της αμφιέριστης δοκού κάτω από σταθερό φορτίο η μέγιστη ροπή κάμψης εμφανίζεται στο μέσον της και έχει ένταση:

$$\underline{M_{\max} = \frac{q_0 \ell^2}{8}} \quad (\text{για } x = \frac{\ell}{2}, Q = 0)$$

2) Πρόβολος υπό σταθερό φορτίο

- Αντιδράσεις:

$$V_A = q_0 \ell, \quad M_A = \frac{1}{2} q_0 \ell^2$$

- Τέμνουσες:

$$Q = Q(0) - \int_0^x q_0 d\xi = V_A - q_0 x \Rightarrow$$

$$Q = q_0 \ell \left(1 - \frac{x}{\ell} \right)$$

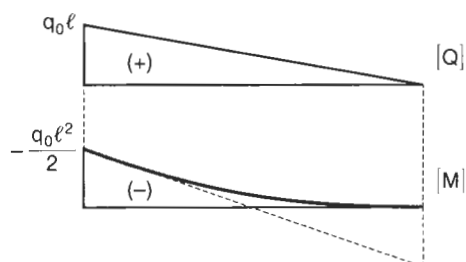
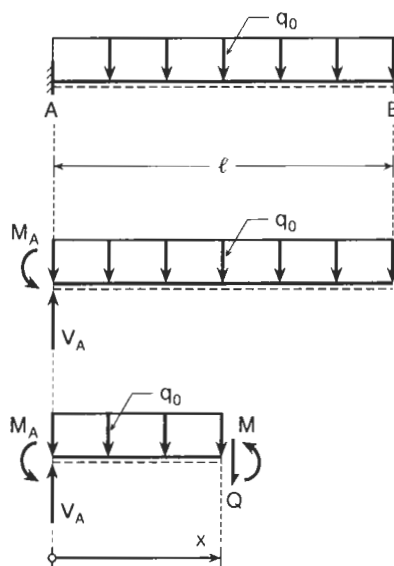
- Ροπές κάμψης:

$$M = M(0) + \int_0^x Q d\xi$$

$$= -M_A + \int_0^x q_0 \ell \left(1 - \frac{\xi}{\ell} \right) d\xi$$

$$M = -\frac{1}{2} q_0 \ell^2 + q_0 \ell \left(x - \frac{1}{2} \frac{x^2}{\ell} \right) \Rightarrow$$

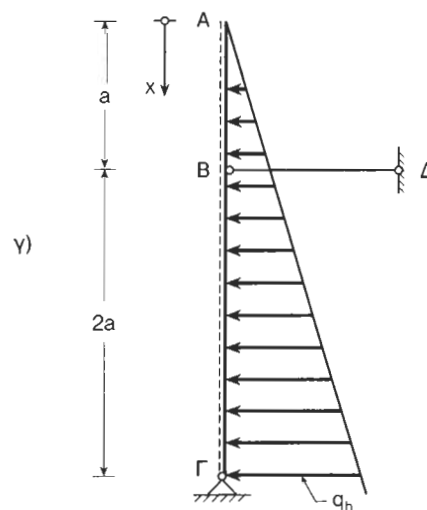
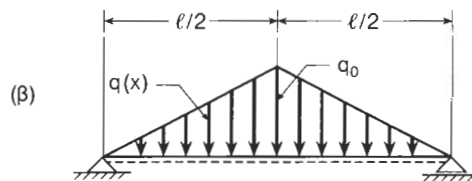
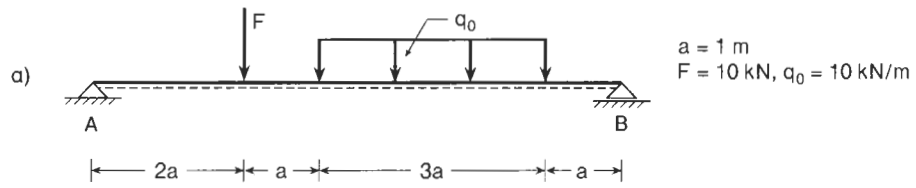
$$M = -q_0 \ell^2 \left\{ \frac{1}{2} - \left(\frac{x}{\ell} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{x}{\ell} \right)^2 \right\}$$



Παρατηρούμε ότι η μέγιστη ροπή κάμψης εμφανίζεται στην πάκτωση και έχει αρνητικό πρόσημο.

4.4.6 Λυμένες Ασκήσεις

Να υπολογιστούν και να σχεδιαστούν τα διαγράμματα Q και M για τους παρακάτω φορείς



Λύσεις:**α) Μεικτή φόρτιση**

$$+\downarrow \Sigma F = 0:$$

$$- V_A + F + q_0 \cdot 3a - V_B = 0$$

$$\Rightarrow V_A + V_B = F + 3q_0 a$$

$$\curvearrowright \Sigma M^B = 0: - V_A \cdot 7a +$$

$$F \cdot 5a + (q_0 \cdot 3a) \cdot \frac{5}{2} a = 0$$

$$\Rightarrow V_A = \frac{5}{7} F + \frac{15}{14} q_0 a = 17.857 \text{ kN}$$

$$V_B = \frac{2}{7} F + \frac{27}{14} q_0 a = 22.143 \text{ kN}$$

$$Q = Q(0) - \langle x - 2a \rangle^0 F$$

$$- \langle x - 3a \rangle^1 q_0 + \langle x - 6a \rangle^1 q_0$$

$$Q = V_A - \langle x - 2a \rangle^0 F - \{ \langle x - 3a \rangle^1 - \langle x - 6a \rangle^1 \} q_0$$

$$M = M(0) + Q(0)x - \langle x - 2a \rangle^1 F$$

$$- \left\{ \frac{1}{2} \langle x - 3a \rangle^2 - \frac{1}{2} \langle x - 6a \rangle^2 \right\} q_0$$

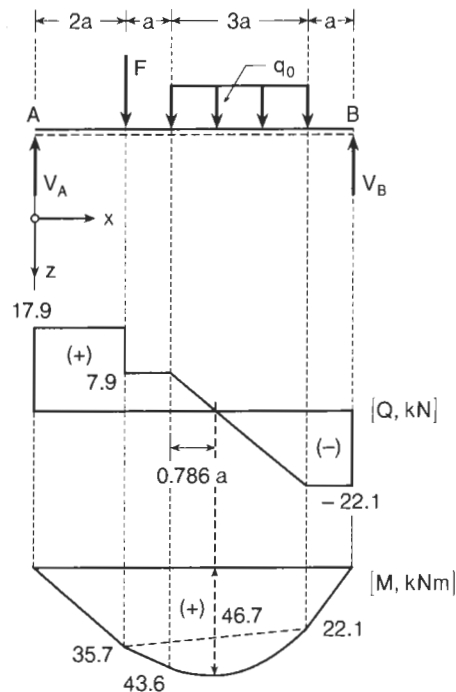
$$M = V_A x - \langle x - 2a \rangle^1 F$$

$$- \left\{ \frac{1}{2} \langle x - 3a \rangle^2 - \frac{1}{2} \langle x - 6a \rangle^2 \right\} q_0$$

Για $x = 3a + 0.786a = 3.786a$: $M = M_{\max}$

$$M_{\max} = 17.857 \cdot 3.786 - (3.786 - 2) \cdot 10 - \frac{1}{2} (3.786 - 3)^2 \cdot 10 \text{ [kN} \cdot \text{m]}$$

$$M_{\max} = 46.657 \text{ kNm}$$



β) Καταναμημένο τριγωνικό φορτίο

$$q = q_0 - q_0 \frac{|x|}{\ell/2}$$

$$V_A = V_B = \frac{1}{2} q_0 \frac{\ell}{2} = \frac{q_0 \ell}{4}$$

$$Q = Q(0) - q_0 x \pm \frac{q_0}{\ell/2} \frac{x^2}{2}$$

Για: $x = -\frac{\ell}{2}$, $Q = V_A \Rightarrow$

$$Q(0) + q_0 \frac{\ell}{2} - \frac{q_0}{\ell/2} \frac{1}{2} \left(-\frac{\ell}{2}\right)^2 = \frac{q_0 \ell}{4}$$

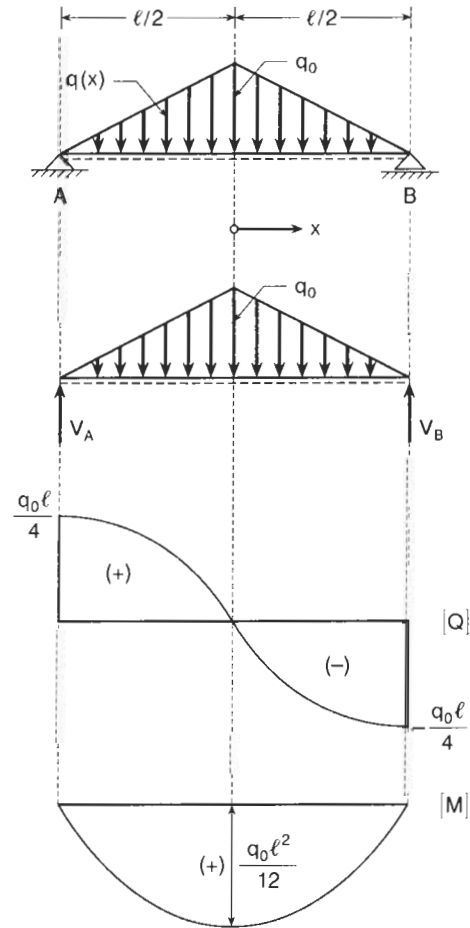
$$\Rightarrow Q(0) = 0,$$

$$Q = -q_0 x \pm q_0 \frac{x^2}{\ell}$$

$$M = M(0) - \frac{1}{2} q_0 x^2 \pm \frac{1}{3} q_0 \frac{x^3}{\ell}$$

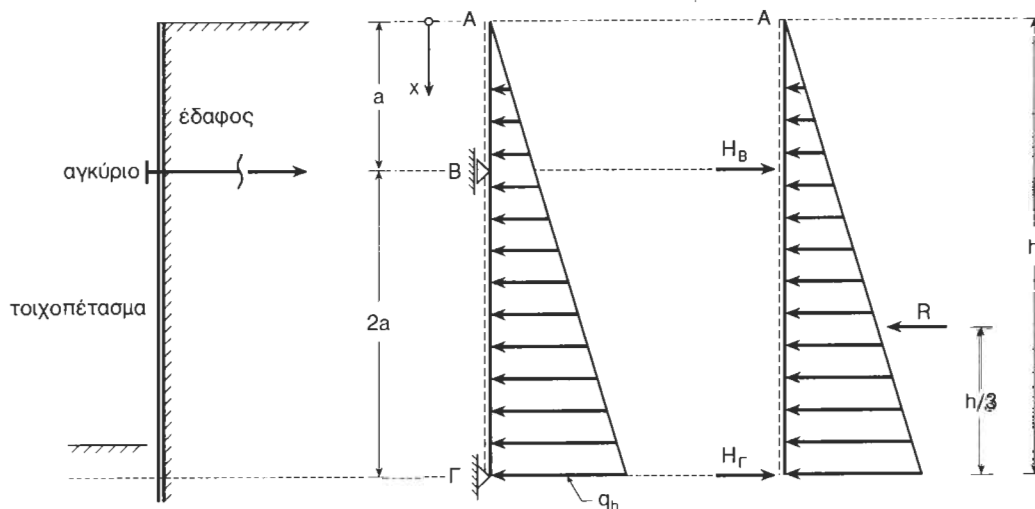
Για: $x = -\frac{\ell}{2}$, $M = 0 \Rightarrow M(0) = \frac{q_0 \ell^2}{12}$

$$M = \frac{q_0 \ell^2}{12} - \frac{q_0 x^2}{2} \pm \frac{q_0 x^3}{3\ell}$$



Παρατηρούμε ότι στην περίπτωση που το καταναμημένο φορτίο είναι γραμμικό ως προς x τότε το διάγραμμα τεμνουσών είναι παραβολικό και το διάγραμμα ροπών κάμψης είναι κυβικό. Αυτό σημαίνει ότι στην περίπτωση αυτή για το σχεδιασμό των διαγραμμάτων θα χρειαστεί, κάνοντας χρήση των διάφορων σχέσεων συμμετρίας, να υπολογιστούν οι αντίστοιχες συναρτήσεις $Q = Q(x)$ και $M = M(x)$ για μία σχετικά πυκνή διαμέριση του διαστήματος $0 \leq x \leq \ell/2$. Για τέτοιους υπολογισμούς ενδείκνυται η χρήση λογισμικού χάρτου (π.χ. Excel). Για εξάσκηση θα ήταν χρήσιμο στο σημείο αυτό να σχεδιαστούν τα παραπάνω διαγράμματα τεμνουσών δυνάμεων και ροπών κάμψης κάνοντας χρήση λογισμικού χάρτου.

γ) Τοιχοπέτασμα με αγκύριο



• **Αντιδράσεις:**

$$H_B + H_\Gamma = \frac{1}{2} q_h h = \frac{3}{2} q_h a$$

$$H_B \cdot 2a - R \frac{h}{3} = 0 \quad \left(R = \frac{1}{2} q_h h \right)$$

$$\Rightarrow H_B = \frac{3}{4} q_h a, \quad H_\Gamma = \frac{3}{4} q_h a$$

• **Τέμνουσες δυνάμεις:**

$$Q = Q(0) - \int_0^x q(\xi) d\xi + H_B \langle x - a \rangle^0$$

$$q = q_h \frac{x}{h} = \frac{1}{3} q_h \frac{x}{a}, \quad Q(0) = 0 \Rightarrow$$

$$Q = -\frac{1}{3} \frac{q_h}{a} \int_0^x \xi d\xi + \frac{3}{4} q_h a \langle x - a \rangle^0$$

$$Q = -\frac{1}{6} q_h a \left(\frac{x}{a} \right)^2 + \frac{3}{4} q_h a \langle x - a \rangle^0$$

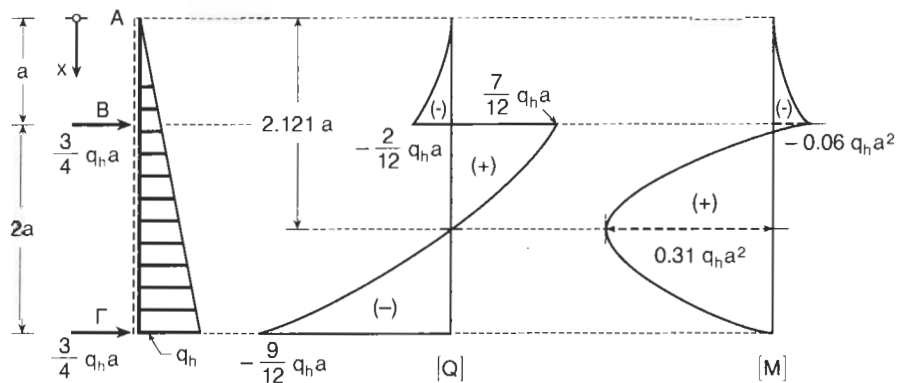
$$x = a^-: Q = -\frac{1}{6} q_h a,$$

$$x = a^+: Q = -\frac{1}{6} q_h a + \frac{3}{4} q_h a = \frac{7}{12} q_h a$$

$$x = 3a: Q = -\frac{1}{6} q_h a \cdot 3^2 + \frac{3}{4} q_h a = -\frac{3}{4} q_h a (= -H_\Gamma!)$$

$$Q = 0 \Rightarrow -\frac{1}{6} q_h a \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \frac{3}{4} q_h a = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{3}{2} \sqrt{2} a \approx 2.121 a$$



• **Ροπές Κάμψης:**

$$M = M(0) + \int_0^x Q(\xi) d\xi, \quad M(0) = 0 \Rightarrow$$

$$M = -\frac{1}{18} q_h a^2 \left(\frac{x}{a}\right)^3 + \frac{3}{4} q_h a < x - a >$$

$$x = a: M = -\frac{1}{18} q_h a^2 \approx -0.056 q_h a^2$$

$$x = \frac{3\sqrt{2}}{2} a: M = M_{\max} = -\frac{1}{18} q_h a^2 \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^3 + \frac{3}{4} q_h a^2 \left(\frac{3\sqrt{2}}{2} - 1\right)$$

$$M_{\max} = \frac{3}{4} (\sqrt{2} - 1) q_h a^2 \approx 0.311 q_h a^2$$

Έλεγχος: $x = 3a: M = -\frac{1}{18} q_h a^2 3^3 + \frac{3}{4} q_h a^2 (3 - 1) = 0 (!).$

Έστω Δ το σημείο όπου η συνισταμένη φόρτιση μηδενίζεται ($x'_\Delta = u$):

$$u = \frac{e_a}{e_p - e_a} h$$

Έστω R_a η συνισταμένη της φόρτισης πάνω από το σημείο Δ :

$$R_a = \frac{1}{2} (h + u) e_a h = \frac{1}{2} \frac{e_p}{e_p - e_a} e_a h^2$$

η οποία ασκείται σε απόσταση h_a από το σημείο Δ :

$$h_a = \frac{e_p - e_a}{e_p} \left[\frac{1}{3} + \left(\frac{u}{h} \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{u}{h} \right)^2 \right] h$$

Έστω R_p η συνισταμένη της φόρτισης κάτω από το σημείο Δ :

$$R_p = \frac{1}{2} (e_p - e_a) t^2, \quad (t = d - u)$$

που ασκείται σε απόσταση h_p κάτω από το Δ :

$$h_p = \frac{2}{3} t$$

• **Ισορροπία δυνάμεων:** $\sum F_h = 0$

$$R_a + H_r - R_p = 0 \Rightarrow$$

$$H_r = \frac{1}{2} (e_p - e_a) t^2 - \frac{1}{2} \frac{e_p}{e_p - e_a} e_a h^2$$

• **Ισορροπία ροπών ως προς Δ :** $\sum M^\Delta = 0$

$$R_a h_a - H_r t + R_p \cdot h_p = 0$$

η οποία τελικά δίνει μια εξίσωση για τον υπολογισμό του βάθους πάκτωσης του τοίχου²:

$$\left(\frac{t}{h} \right)^3 - \alpha \left(\frac{t}{h} \right) - \alpha \left(\frac{h_a}{h} \right) = 0, \quad \alpha = 3 \frac{e_p e_a}{(e_p - e_a)^2}$$

2. Για την επίλυση της κυβικής αλγεβρικής εξίσωσης ιδέ Παράρτημα.

Αριθμητικό Παράδειγμα

Έστω

$$e_a = \frac{1}{3} \cdot 21 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2} = 7 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2}, \quad e_p = 3 \cdot 21 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2} = 63 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2}$$

Για $h = 5 \text{ m}$ έχουμε τα εξής αριθμητικά αποτελέσματα:

$$u = 0.625 \text{ m}, \quad h_a = 2.060 \text{ m} \Rightarrow t = 4.469 \text{ m} \Rightarrow d = t + u = 5.094 \text{ m}$$

Άρα το απαιτούμενο μήκος του τοίχου αντιστήριξης είναι,

$$\ell = h + d = 10.094 \text{ m}$$

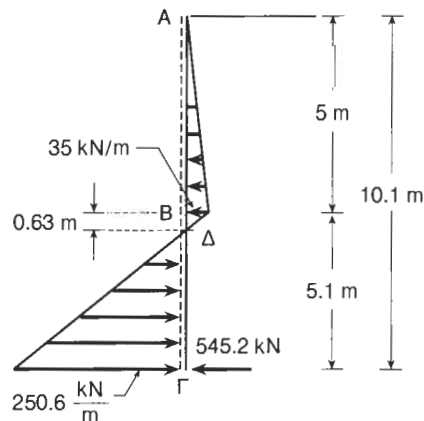
οφείλει δε αυτός να είναι σε θέση να παραλάβει στο κάτω άκρο του οριζόντια δύναμη

$$H_r = 545.2 \text{ kN/m}$$

Άσκηση

Μετά τον παραπάνω προσδιορισμό των εδαφικών ωθήσεων στον τοίχο αντιστήριξης θα χρειαστεί να προσδιοριστούν η τιμή και η θέση της μέγιστης ροπής κάμψης. Για τον σκοπό αυτό ζητείται:

- Να υπολογιστούν αναλυτικά τα διαγράμματα Q και M στη βάση γενικών τύπων για τη φόρτιση.
- Να σχεδιαστούν τα διαγράμματα M και Q για το συγκεκριμένο παράδειγμα κάνοντας χρήση λογισμικού χάρτου.



4.5 Δοκός Gerber

Ο φορέας χωρίζεται σε δύο τμήματα (I) και (II), η δε διαχωριστική γραμμή διέρχεται από το σημείο στήριξης B. Αντίστοιχα εισάγουμε δύο συντεταγμένες x_1 και x_2 , οπότε

$$(I): \quad q_I = q_0$$

$$Q_I = -q_0 x_1 + c_1$$

$$M_I = -\frac{1}{2} q_0 x_1^2 + c_1 x_1 + c_2$$

$$(II): \quad q_{II} = 0$$

$$Q_{II} = c_3$$

$$M_{II} = c_3 x_2 + c_4$$

Στις παραπάνω εκφράσεις εμφανίζονται 4 σταθερές ολοκλήρωσης c_1, \dots, c_4 , οι οποίες καθορίζονται από αντίστοιχες συνοριακές και μεταβατικές συνθήκες:

- **Συνοριακές συνθήκες:**

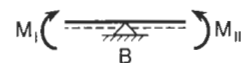
$$x_1 = 0 \quad M_I = 0, \quad x_2 = 2a \quad M_{II} = 0.$$

- **Συνθήκη στην άρθρωση G:**

$$x_1 = 2a \quad M_I = 0$$

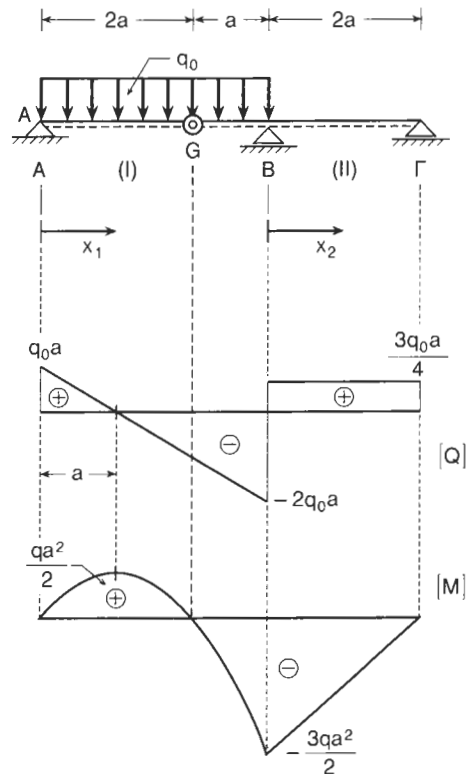
- **Συνθήκη ισορροπίας:**

$$M_I(x_1 = 3a) = M_{II}(x_2 = 0)$$



Από τις παραπάνω συνθήκες προκύπτουν τελικά οι τιμές για τις σταθερές ολοκλήρωσης και στη συνέχεια τα διαγράμματα Q και M,

$$c_1 = q_0 a, \quad c_2 = 0, \quad c_3 = \frac{3}{4} q_0 a, \quad c_4 = -\frac{3}{2} q_0 \ell^2$$



4.6 Ταξινόμηση Φορτίσεων

4.6.1 Κατανεμημένα Φορτία

Οι διαφορικές εξισώσεις ισορροπίας στο απειροστικό στοιχείο dx συνδέουν τη μεταβολή της τέμνουσας με το φορτίο:

$$\frac{dQ}{dx} = -q(x) \Rightarrow dQ = -q(x) dx$$

και τη μεταβολή της ροπής κάμψης με την τέμνουσα:

$$\frac{dM}{dx} = Q(x) \Rightarrow dM = Q(x) dx$$

Αντίστοιχα οι ολοκληρωτικές εξισώσεις ισορροπίας σε **πεπερασμένο** τμήμα του φορέα αφορούν τα ίδια τα μεγέθη και όχι τις μεταβολές τους

$$Q = Q(0) - \int_0^x q(\xi) d\xi$$

$$M = M(0) + \int_0^x Q(\xi) d\xi$$

4.6.2 Συγκεντρωμένα Φορτία

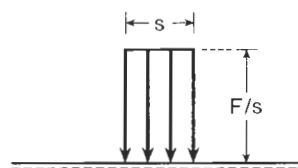
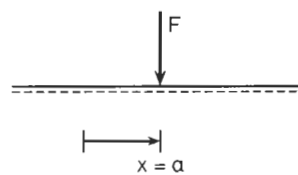
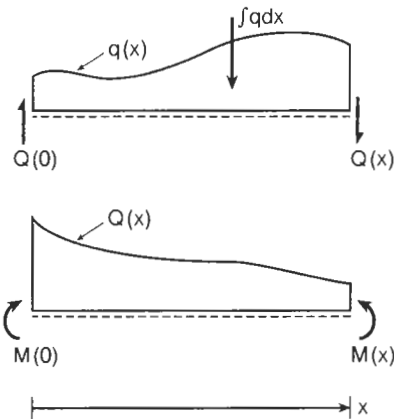
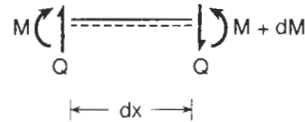
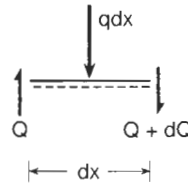
Στην περίπτωση που η φόρτιση αποτελείται από συγκεντρωμένο φορτίο F στη θέση $x = a$, εισάγουμε μία γενικευμένη κατανομή,

$$q(x) = \delta(x - a)F$$

που μπορεί να θεωρηθεί ως όριο μιας ακολουθίας κατανομών

$$q_s = \left(\left\langle x - \left(a - \frac{s}{2} \right) \right\rangle^0 - \left\langle x - \left(a + \frac{s}{2} \right) \right\rangle^0 \right) \frac{F}{s}$$

για $s \rightarrow 0$ και $F = \text{σταθ.}$ (κατανομή **Dirac**).



Στην περίπτωση αυτή το διάγραμμα τεμνουσών είναι ασυνεχές και εμφανίζει στη θέση $x = a$ **άλμα** κατ' απόλυτη τιμή ίσο προς το φορτίο F :

$$Q^+ = Q^- - \langle x - a \rangle^0 F$$

Αντίστοιχα το διάγραμμα ροπών κάμψης εμφανίζει στη θέση εφαρμογής του συγκεντρωμένου φορτίου **ασυνέχεια στη κλίση** του:

$$\frac{dM}{dx} \Big|_{x^-} = Q^-, \quad \frac{dM}{dx} \Big|_{x^+} = Q^+$$

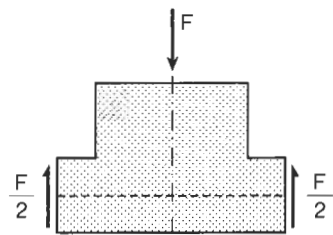
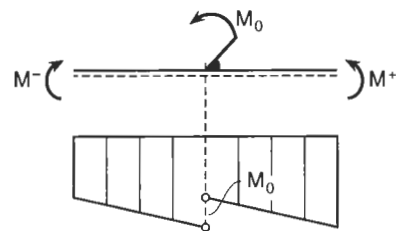
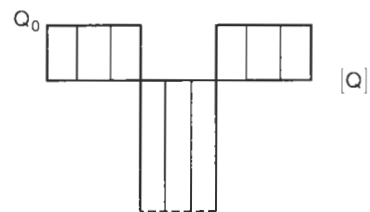
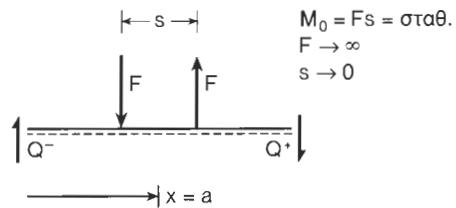
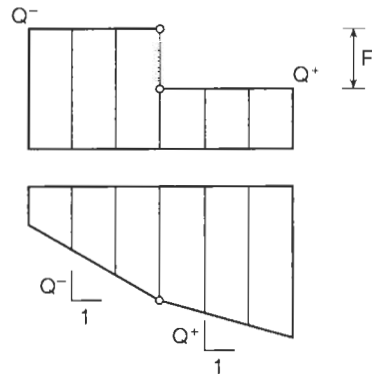
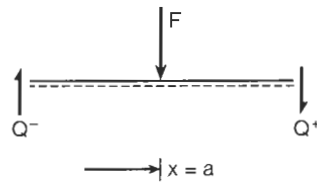
Επειδή δε, $M = \int Q dx$, η ροπή κάμψης στο σημείο $x = a$ είναι συνεχής.

Η περίπτωση τώρα της φόρτισης του φορέα από μία συγκεντρωμένη ροπή έντασης M_0 στη θέση $x = a$ προσεγγίζεται από ένα ζεύγος δυνάμεων $\{F, -F\}$, που ασκούνται σε μικρή απόσταση s μεταξύ τους. Στο όριο $s \rightarrow 0$ (με $M_0 = Fs = \text{σταθ.}$) το διάγραμμα τεμνουσών εμφανίζει στη θέση $x = a$ μία **ιδιομορφία** ($Q \rightarrow -\infty$)

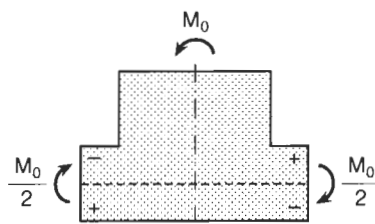
$$Q = Q_0 - \delta(x - a) M_0$$

ενώ το διάγραμμα ροπών κάμψης εμφανίζει ένα πεπερασμένο άλμα κατ' απόλυτη τιμή ίσο προς το καμπτικό φορτίο M_0 :

$$M^+ = M^- - \langle x - a \rangle^0 M_0$$



συγκεντρωμένη δύναμη
(μηχανισμός διάτρησης)



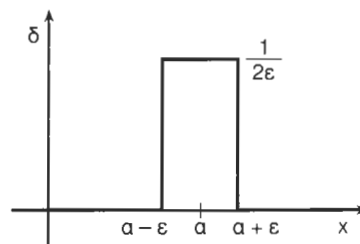
συγκεντρωμένη ροπή
(μηχανισμός εξάρθρωσης)

Γενικευμένες συναρτήσεις

Συνάρτηση δέλτα (Dirac):

$$\delta(x-a) = \langle x-a \rangle^{-1}$$

$$\int_b^c f(x) \delta(x-a) dx = f(a), \quad b < a < c$$

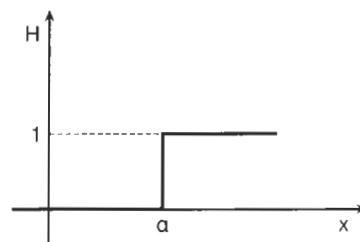
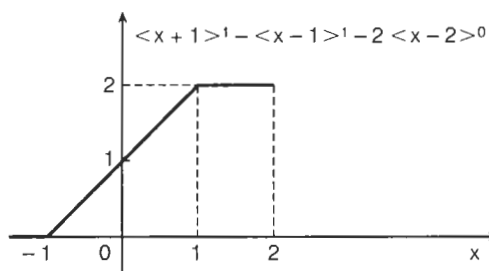
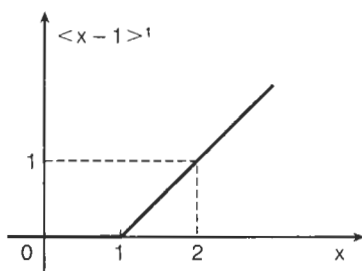


Συνάρτηση βήματος (Heaviside):

$$H(x-a) = \langle x-a \rangle^0$$

$$\int \langle x-x_0 \rangle^{-1} dx = \langle x-x_0 \rangle^0 + c_1$$

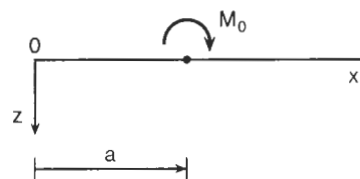
$$\int \langle x-x_0 \rangle^{-2} dx = \langle x-x_0 \rangle^{-1} + c_2$$

**Παραδείγματα:****1) Συγκεντρωμένη ροπή:**

$$q(x) = -M_0 \langle x-a \rangle^{-2}$$

$$Q(x) = M_0 \langle x-a \rangle^{-1}$$

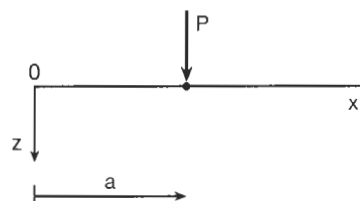
$$M(x) = M_0 \langle x-a \rangle^0$$

**2) Συγκεντρωμένη δύναμη:**

$$q(x) = P \langle x-a \rangle^{-1}$$

$$Q(x) = -P \langle x-a \rangle^0$$

$$M(x) = -P \langle x-a \rangle^1$$

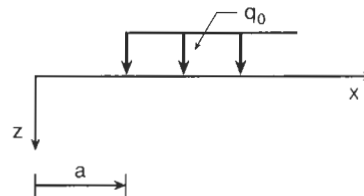


3) Ομοιόμορφο καταναμημένο φορτίο:

$$q(x) = q_0 \langle x - a \rangle^0$$

$$Q(x) = -q_0 \langle x - a \rangle^1$$

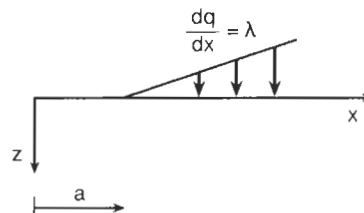
$$M(x) = -q_0 \frac{\langle x - a \rangle^2}{2}$$

**4) Γραμμικά καταναμημένο φορτίο:**

$$q(x) = \lambda \langle x - a \rangle^1$$

$$Q(x) = \frac{\lambda}{2} \langle x - a \rangle^2$$

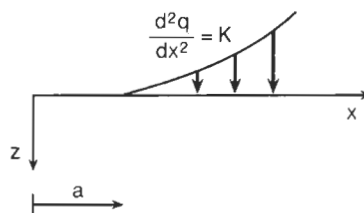
$$M(x) = -\frac{\lambda}{6} \langle x - a \rangle^3$$

**5) Παραβολικά καταναμημένο φορτίο:**

$$q(x) = \frac{K}{2} \langle x - a \rangle^2$$

$$Q(x) = \frac{K}{6} \langle x - a \rangle^3$$

$$M(x) = -\frac{K}{24} \langle x - a \rangle^4$$

**Παράδειγμα****• Αντιδράσεις:**

$$+\downarrow \Sigma F_z = 0: -V_A - V_B + F = 0$$

$$\curvearrowright \Sigma M^B = 0: V_A 4a - F 3a - M_0 = 0$$

$$\Rightarrow V_A = F, \quad V_B = 0.$$

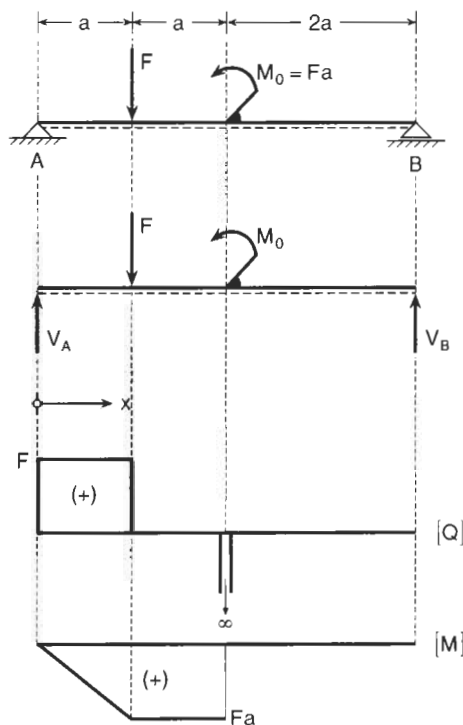
• Διάγραμμα τεμνουσών:

$$Q = V_A - F \langle x - a \rangle^0 - M_0 \delta(x - 2a)$$

• Διάγραμμα ροπών κάμψης:

$$M = V_A x - F \langle x - a \rangle^1 - M_0 \langle x - 2a \rangle^0$$

$$= Fx - F \langle x - a \rangle^1 - Fa \langle x - 2a \rangle^0$$



Παρατήρηση

Όπως γίνεται σαφές από τα προηγούμενα παραδείγματα οι **γραμμικές** διαφορικές εξισώσεις ισορροπίας για τις τέμνουσες Q και τις ροπές κάμψης M καταλήγουν σε γραμμικές εξαρτήσεις των Q και M από τα φορτία,

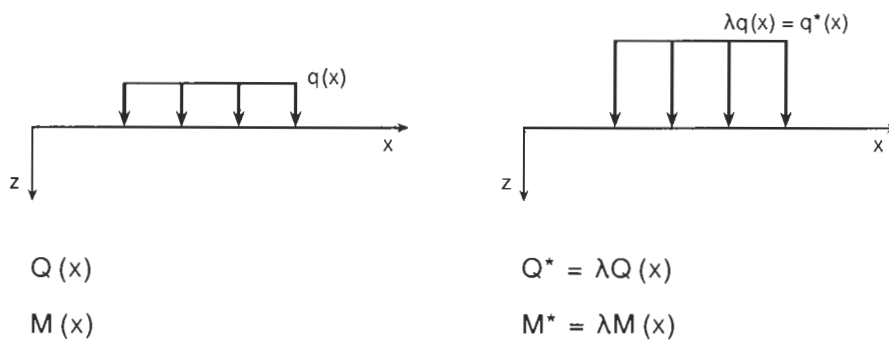
$$Q(\lambda F, \dots) = \lambda Q(F, \dots)$$

$$Q(F_1 + F_2, \dots) = Q(F_1, \dots) + Q(F_2, \dots), \text{ κ.λπ.}$$

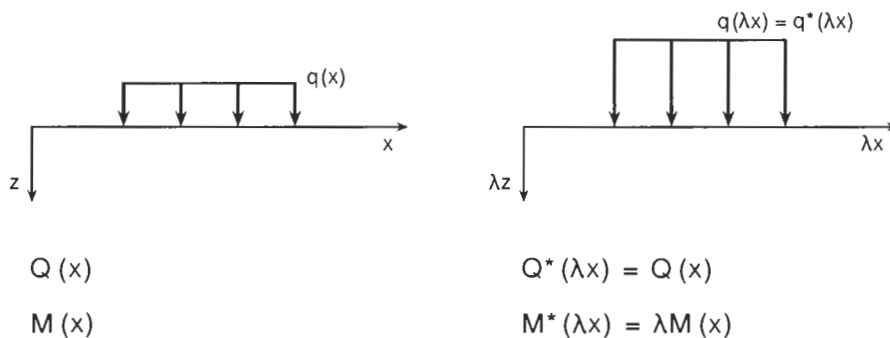
Επειδή λοιπόν οι παραπάνω συναρτήσεις είναι γραμμικές ως προς τα φορτία, γι' αυτό μπορούμε στη Στατική να εφαρμόσουμε τη λεγόμενη **Αρχή της Επαλληλίας** των φορτίσεων. Ως άσκηση θα ήταν σκόπιμο να βρεθούν τα διαγράμματα Q και M που αντιστοιχούν για το παραπάνω παράδειγμα στην εφαρμογή συγκεντρωμένου φορτίου και συγκεντρωμένης ροπής ξεχωριστά και να επαλληθευθεί η Αρχή της Επαλληλίας των φορτίσεων.

Νόμοι ομοιότητας σε δοκούς

1) Ίδια γεωμετρία, αλλαγή φορτίου



2) Ίδιο φορτίο, αλλαγή γεωμετρίας



Απόδειξη της περίπτωσης 1:

$$\frac{dQ(x)}{dx} + q(x) = 0 \quad \frac{dQ^*(x)}{dx} + \lambda q(x) = 0$$

$$\Rightarrow Q^*(x) = \lambda Q(x)$$

$$\frac{dM(x)}{dx} = Q(x) \quad \frac{dM^*(x)}{dx} = Q^*(x) = \lambda Q(x)$$

$$\Rightarrow M^*(x) = \lambda M(x)$$

Απόδειξη της περίπτωσης 2:

$$\frac{dQ(x)}{dx} + q(x) = 0 \quad \frac{dQ^*(\lambda x)}{d(\lambda x)} + q(\lambda x) = 0$$

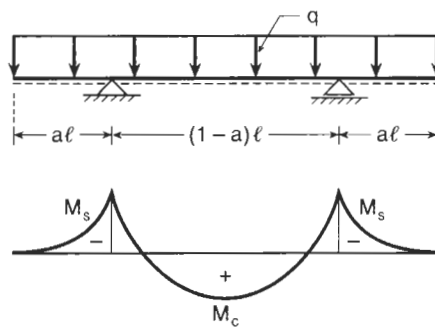
$$\Rightarrow Q^*(\lambda x) = Q(x)$$

$$\frac{dM(x)}{dx} = Q(x) \quad \frac{dM^*(\lambda x)}{d(\lambda x)} = Q^*(\lambda x) = Q(x)$$

$$\Rightarrow M^*(\lambda x) = \lambda M(x)$$

Ασκήσεις

- 1) Να υπολογιστεί η θέση στήριξης στην αμφιπροέχουσα δοκό, έτσι ώστε η μέγιστη και ελάχιστη ροπή να είναι ίσες απολύτως.



Λύση

$$M_s = -(2a)^2 \frac{q\ell^2}{8} \quad M_c = (1-4a) \frac{q\ell^2}{8}$$

$$|M_s| = M_c \Rightarrow 4a^2 + 4a - 1 = 0 \quad (0 < a < 1/4)$$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{2} (\sqrt{2} - 1) = 0.2071$$

και επομένως

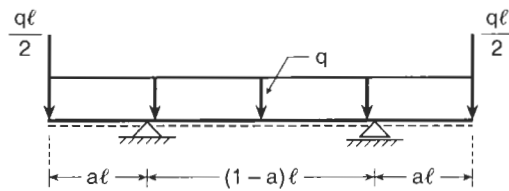
$$M_c = 0.1716 \frac{q\ell^2}{8} = -M_s$$

$$\text{Av } a = 0 \quad M_c = \frac{q\ell^2}{8}$$

$$\text{Av } a = 1 \quad M_s = -\frac{q\ell^2}{2}$$

Παρατηρούμε, ότι υπάρχει σαφής βελτιστοποίηση στο μέγεθος των ροπών κάμψης.

2) Να υπολογιστεί η θέση στήριξης στην αμφιπροέχουσα δοκό, έτσι ώστε η μέγιστη και ελάχιστη ροπή να είναι ίσες απολύτως



Λύση

$$M_s = -(4a^2 + 4a) \frac{q\ell^2}{8}$$

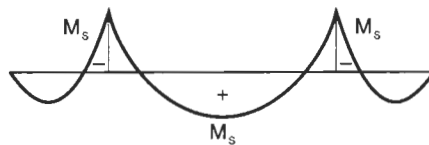
$$(0 < a < 1/8)$$

$$M_c = (1 - 8a) \frac{q\ell^2}{8}$$

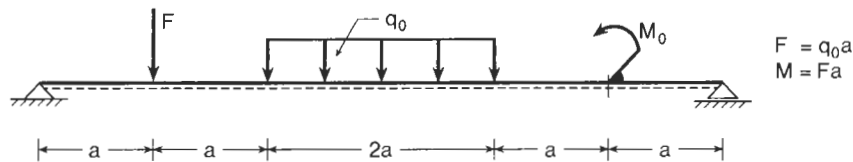
$$|M_s| = M_c$$

$$4a^2 + 12a - 1 = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{2} (\sqrt{10} - 3) = 0.0811$$

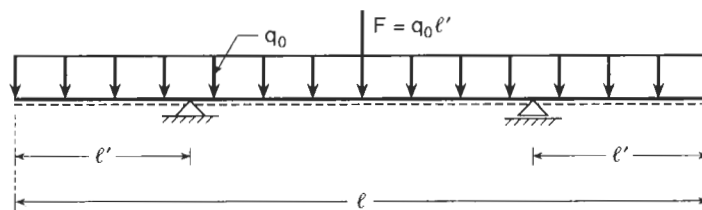
$$M_c = 0.3509 \frac{q\ell^2}{8}$$



- 3) Να υπολογιστούν και να σχεδιαστούν τα διαγράμματα τεμνουσών και ροπών κάμψης του φορέα:



- 4) Για την εικονιζόμενη αμφιπροέχουσα δοκό να υπολογιστεί το μήκος των προβόλων $\ell' = \lambda \ell$, έτσι ώστε η ροπή κάμψης στο μέσον της δοκού και οι ροπές κάμψης στις στηρίξεις να ισούνται κατ' απόλυτον τιμή.



Απάντηση: $\lambda = \frac{1}{4} (\sqrt{5} - 1)$

4.7 Απλά Ισοστατικά Πλαίσια

Ας θεωρήσουμε τον φορέα του σχήματος, που έχει μορφή πλαισίου και που στηρίζεται στο σημείο Α με άρθρωση και στο σημείο Δ με κύλιση.

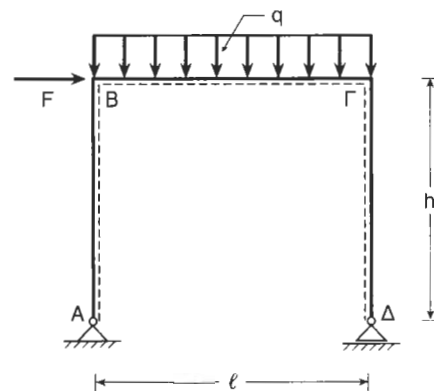
Οι αντιδράσεις προκύπτουν από την ισορροπία στο ελεύθερο σώμα:

$$+\uparrow (\Sigma F) = 0: V_A + V_\Delta - ql = 0$$

$$\rightarrow (\Sigma F) = 0: -H_A + F = 0$$

$$\curvearrowright (\Sigma M)^A = 0:$$

$$V_\Delta \cdot \ell - ql \frac{\ell}{2} - Fh = 0$$



Άρα:

$$V_A = \frac{q\ell}{2} - F \left(\frac{h}{\ell} \right)$$

$$V_\Delta = \frac{q\ell}{2} + F \left(\frac{h}{\ell} \right)$$

$$H_A = F$$

Για τον υπολογισμό των εντατικών μεγεθών στα διάφορα τμήματα του πλαισίου, παρατηρούμε κατ' αρχήν ότι αυτό μπορεί να γίνει με τη μέθοδο των τομών: Αποχωρίζοντας τις γωνίες Β και Γ αντικαθιστούμε τον φορέα από τρεις ευθύγραμμους φορείς, τους οποίους αναλύουμε ξεχωριστά.

• Ορθοστάτης AB

Για την ισορροπία του στελέχους αυτού, και για κάθε θέση σε απόσταση s_1 ($0 \leq s_1 \leq h$) από το άκρο Α πέραν της τέμνουσας Q και της ροπής κάμψης M πρέπει να ασκείται και μία αξονική δύναμη N:

$$N = -V_A, \quad Q = H_A,$$

$$M = Q \cdot s_1 = H_A \cdot s_1$$

• Γωνία Β:

Ισορροπία δυνάμεων και ροπών στη γωνία Β δίνει:

$$+\downarrow (\Sigma F) = 0: N_{B'} + Q_{B''} = 0 \Rightarrow$$

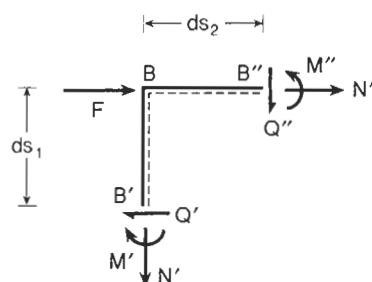
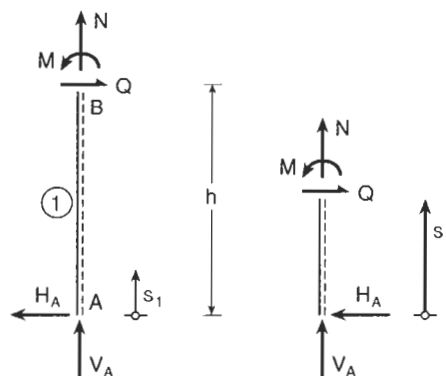
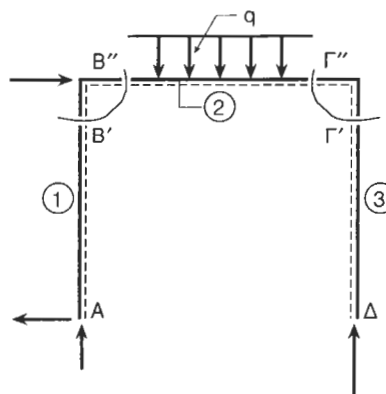
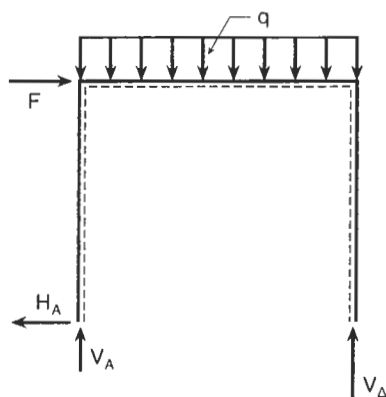
$$Q_{B''} = -N_{B'} = -(-V_A) = V_A$$

$$\rightarrow (\Sigma F) = 0: -Q_{B'} + F + N_{B''} = 0 \Rightarrow$$

$$N_{B''} = -F + Q_{B'} = -F - H_A = -F + F = 0 (!)$$

$$\curvearrowright \Sigma M^B = 0: -M_{B'} + M_{B''} = 0 \Rightarrow$$

$$M_{B''} = M_{B'} = H_A \cdot h$$

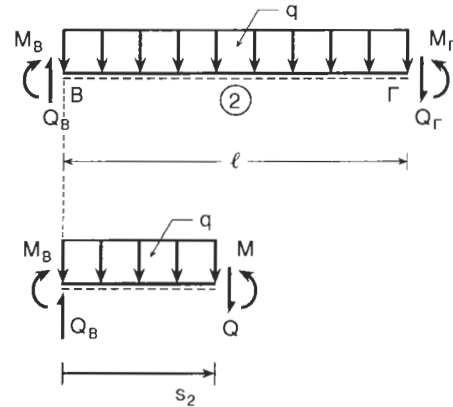


• **Δοκός ΒΓ**

Το οριζόντιο τμήμα ΒΓ δεν δέχεται αξονικές δυνάμεις. Οι τέμνουσες Q και ροπές κάμψης M προκύπτουν από τις γνωστές εκφράσεις:

$$Q = Q_B - \int_0^{s_2} q ds = V_A - qs_2$$

$$M = M_B + \int_0^{s_2} Q ds = H_A h + V_A s_2 - \frac{1}{2} qs_2^2$$



Στο σημείο Γ ($s_2 = \ell$) έχουμε:

$$Q_G = V_A - q\ell = \frac{q\ell}{2} - F \left(\frac{h}{\ell} \right) - q\ell = -\frac{q\ell}{2} - F \left(\frac{h}{\ell} \right)$$

$$M_G = H_A h + V_A \ell - \frac{1}{2} q\ell^2 =$$

$$Fh + \left(\frac{q\ell}{2} - F \frac{h}{\ell} \right) \ell - \frac{1}{2} q\ell^2 = 0 \quad (!)$$

• **Γωνία Γ:**

$$+\downarrow (\Sigma F) = 0: -Q_{\Gamma''} + N_{\Gamma'} = 0$$

$$\Rightarrow N_{\Gamma'} = Q_{\Gamma''} = -\frac{q\ell}{2} - F \left(\frac{h}{\ell} \right)$$

$$\rightarrow (\Sigma F) = 0:$$

$$-N_{\Gamma''} - Q_{\Gamma'} = 0 \Rightarrow Q_{\Gamma'} = -N_{\Gamma''} = 0$$

$$\curvearrowright (\Sigma M) = 0:$$

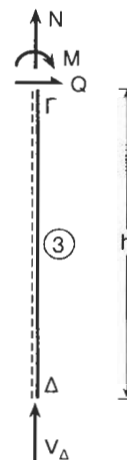
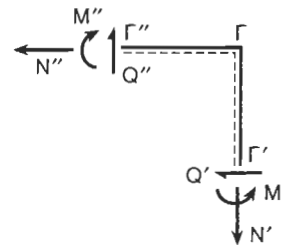
$$-M_{\Gamma''} + M_{\Gamma'} = 0 \Rightarrow M_{\Gamma'} = M_{\Gamma''} = 0.$$

• **Ορθοστάτης ΓΔ:**

$$N = -V_\Delta = -\frac{q\ell}{2} - F \left(\frac{h}{\ell} \right) \quad (!)$$

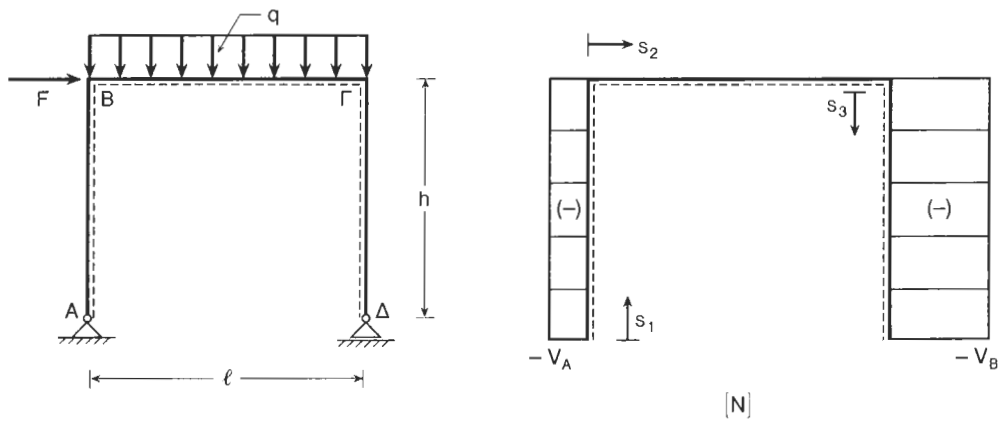
$$Q = 0 \quad (!)$$

$$M = 0. \quad (!)$$

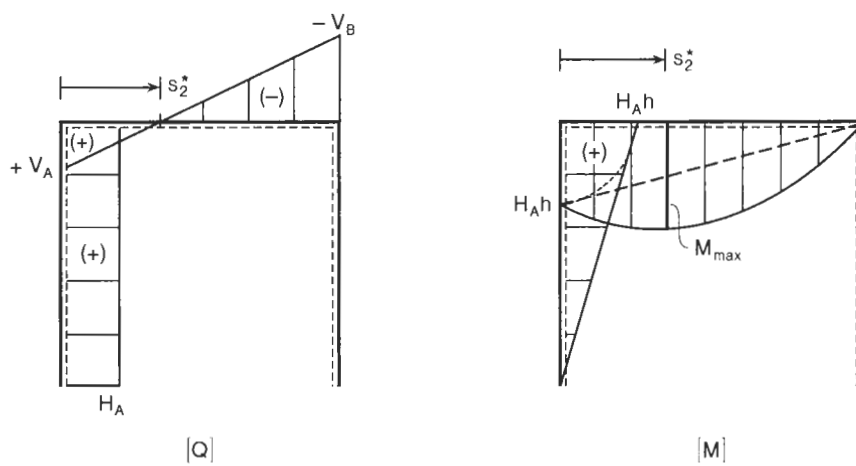


Σύνοψη αποτελεσμάτων:

1) Φόρτιση και διάγραμμα αξονικών δυνάμεων N

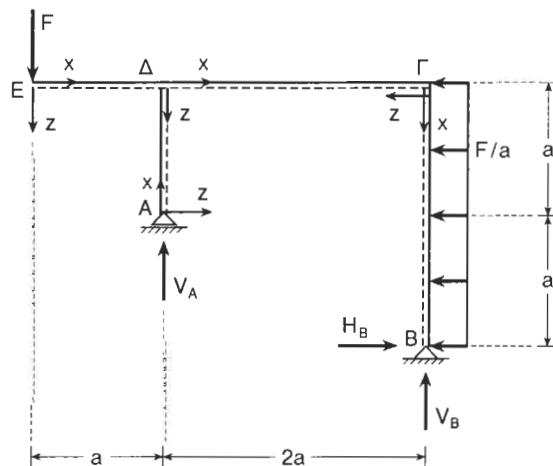


2) Διαγράμματα τεμνουσών δυνάμεων Q και ροπών κάμψης M



Ασκήσεις

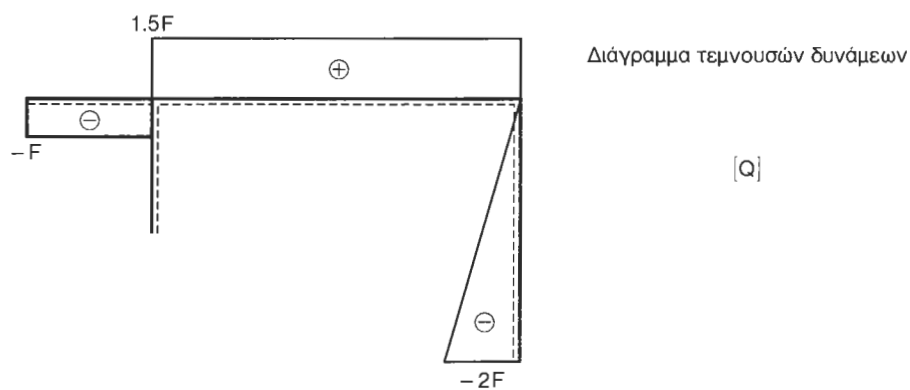
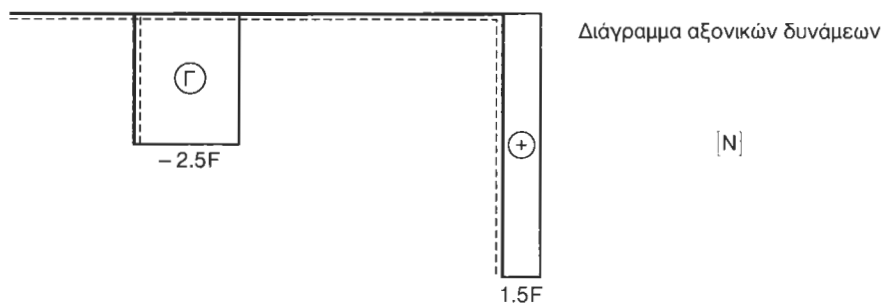
1) Να υπολογιστούν τα διαγράμματα [M], [Q], [N] στο κάτωθι πλαίσιο.

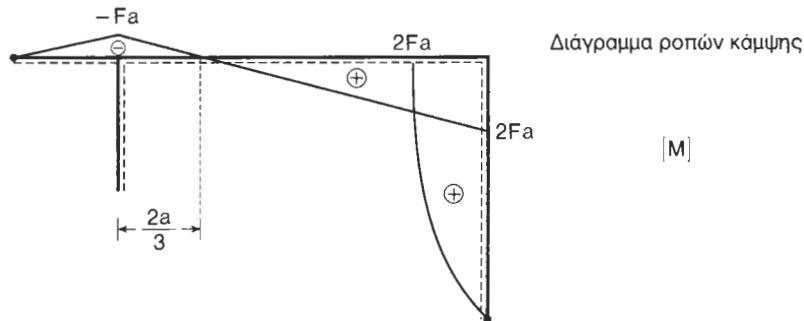


Λύση

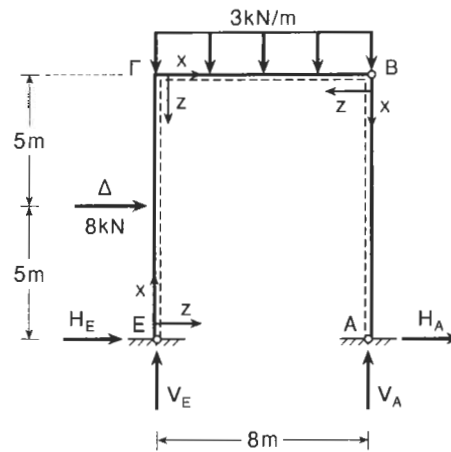
Από ισορροπία προκύπτουν οι αντιδράσεις

$$V_A = 2.5F \quad V_B = -1.5F \quad H_B = 2F$$





2) Να υπολογιστούν τα διαγράμματα [M], [Q], [N] στο κάτωθι πλαίσιο.

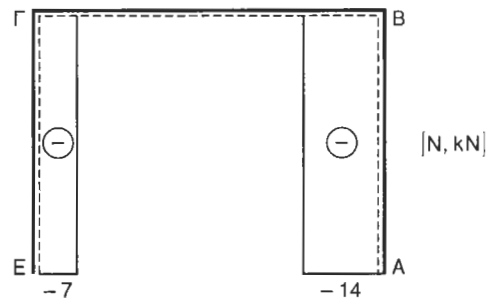


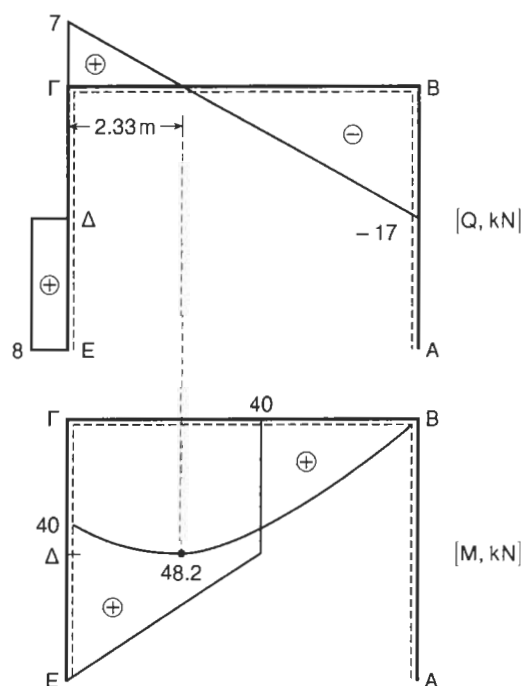
Λύση

Υπολογισμός αντιδράσεων, όπου ο φορέας είναι ουσιαστικά ένα τριαρθρωτό τόξο.

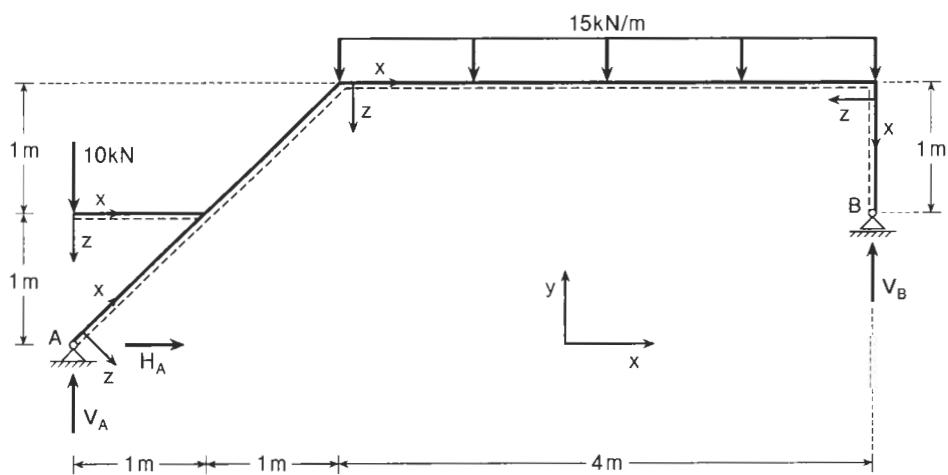
$$H_A = 0, \quad V_A = 17\text{kN},$$

$$H_E = -8\text{kN}, \quad V_E = 7\text{kN}$$





3) Να υπολογιστούν τα διαγράμματα [M], [Q], [N] στο κάτωθι πλαίσιο.



Λύση

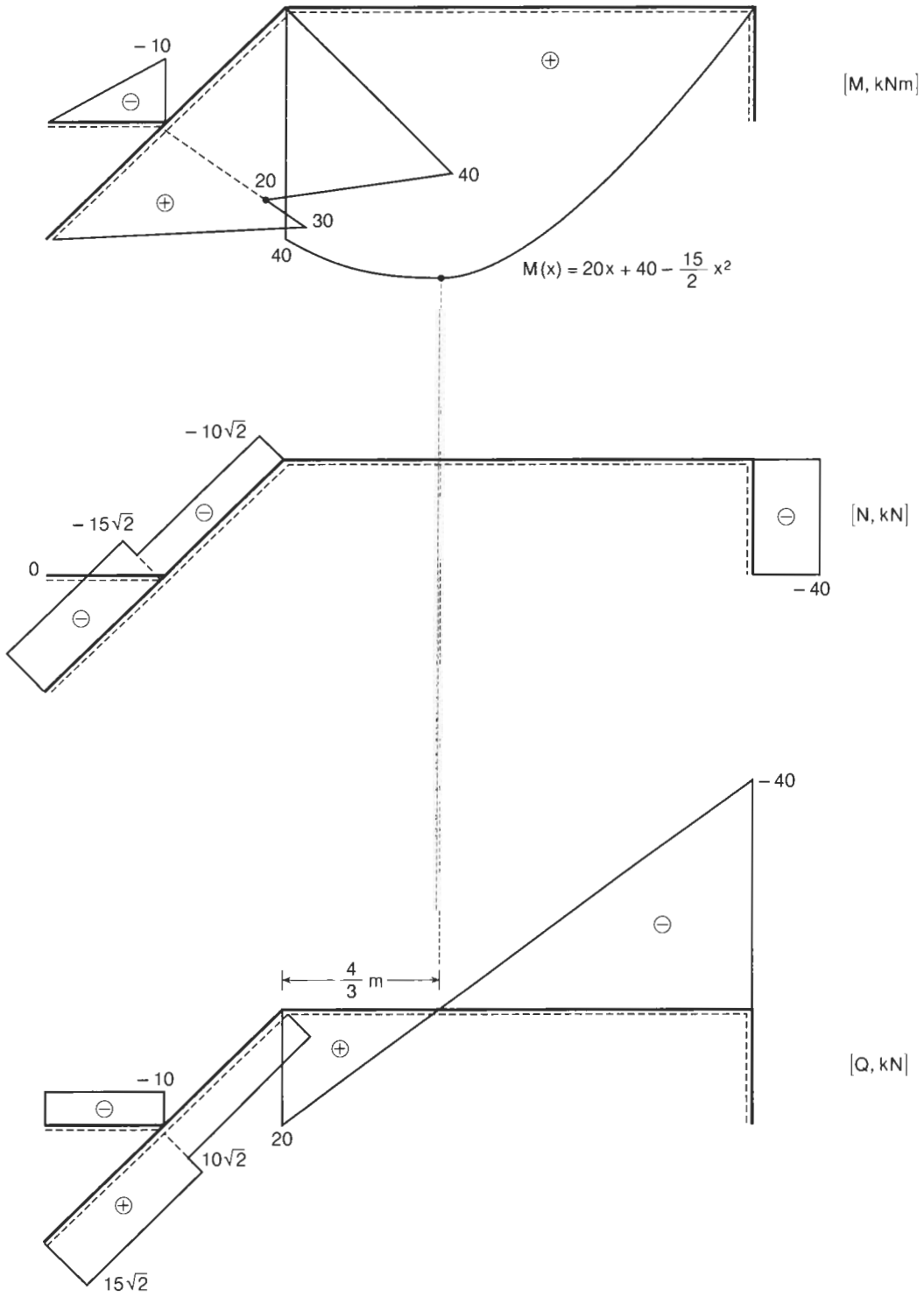
Υπολογισμός αντιδράσεων στο καθολικό σύστημα συντεταγμένων (x, y):

$$\rightarrow \Sigma F_x = 0 \Rightarrow H_A = 0$$

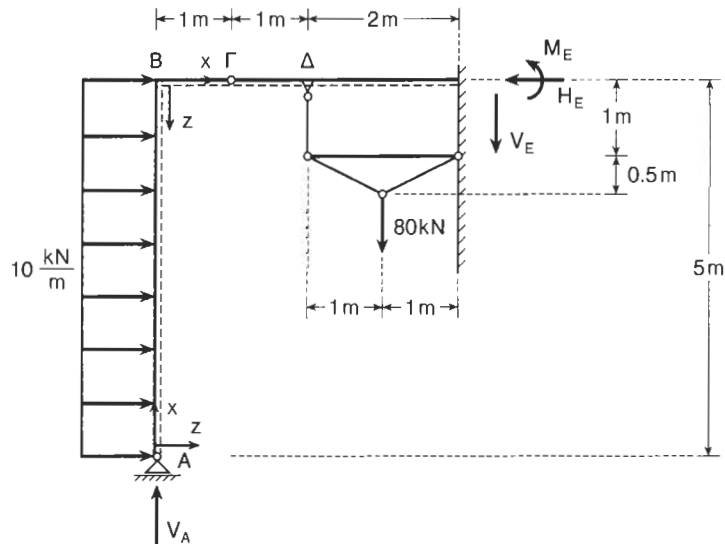
$$+\uparrow \Sigma F_y = 0 \Rightarrow V_A + V_B = 70\text{kN}$$

$$\curvearrow + \Sigma M_A = 0 \Rightarrow V_B = 40\text{kN}$$

Επομένως, $V_A = 30\text{kN}$



4) Να υπολογιστούν τα διαγράμματα $[M]$, $[Q]$, $[N]$ στο κάτωθι πλαίσιο που συνδέεται στο Δ με ένα απλό δικτύωμα.

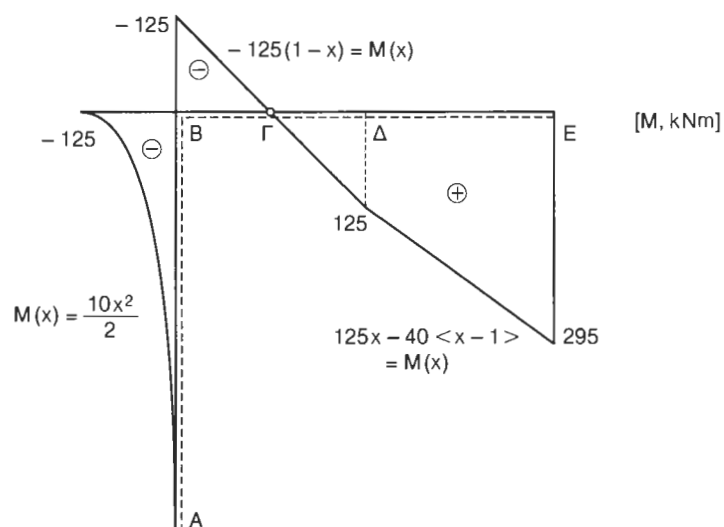


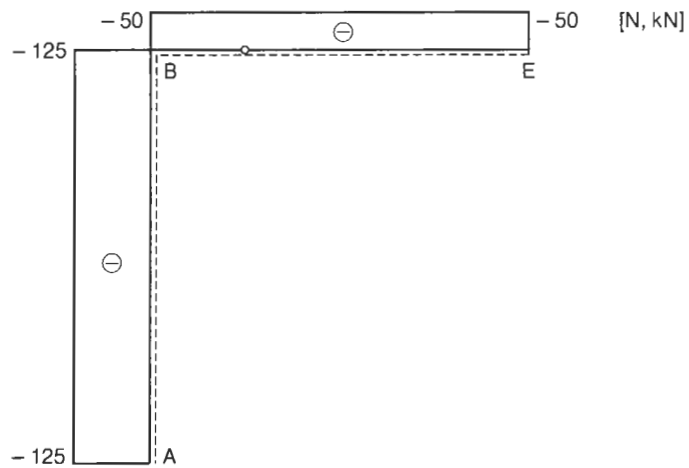
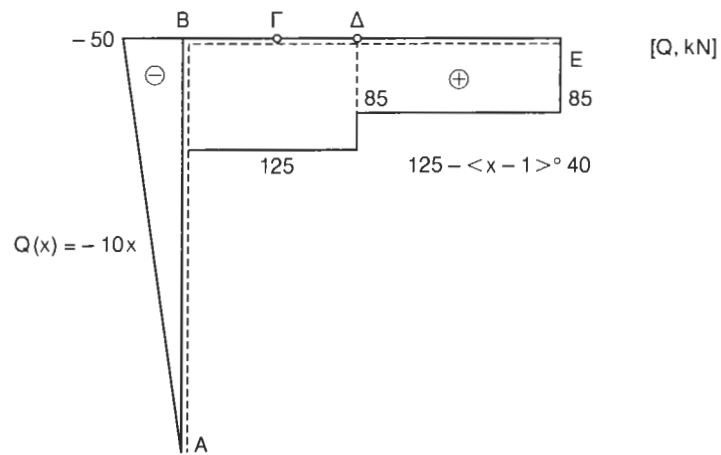
Λύση

Αντιδράσεις:

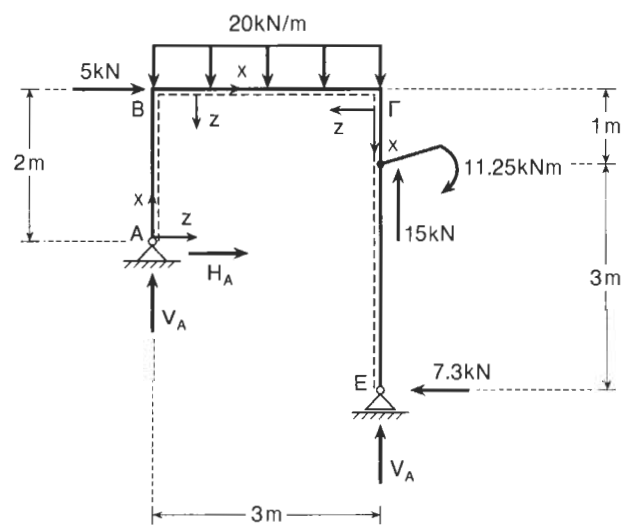
$$V_A = 125\text{kN}, \quad H_E = 50\text{kN}$$

$$V_E = 85\text{kN}, \quad M_E = 295\text{kNm}$$





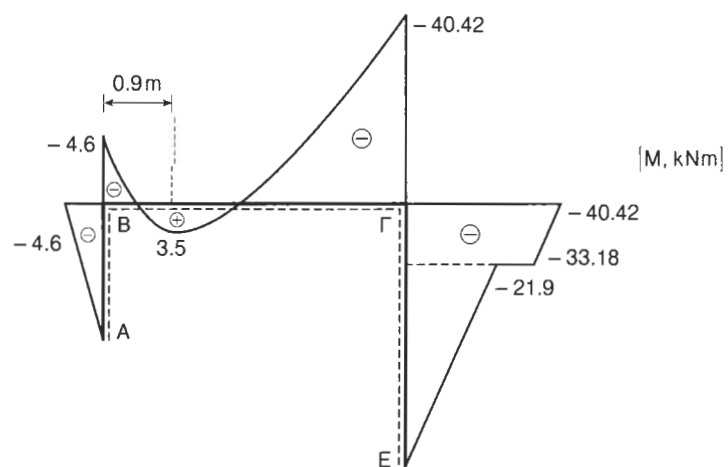
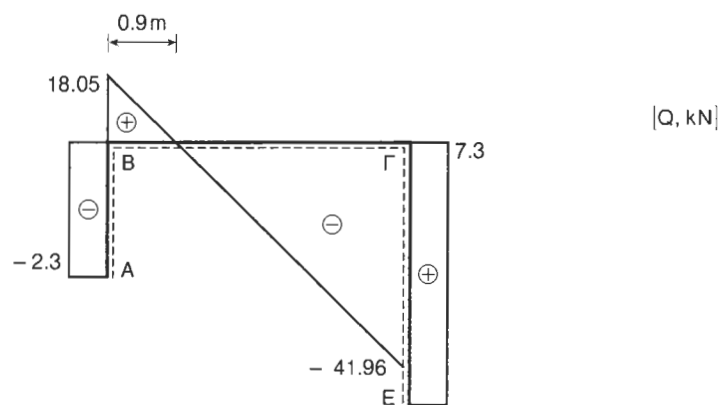
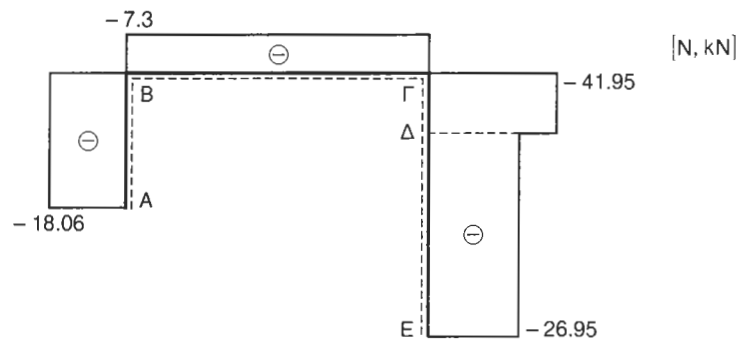
5) Να υπολογιστούν τα διαγράμματα [M], [Q], [N] στο κάτωθι πλαίσιο.



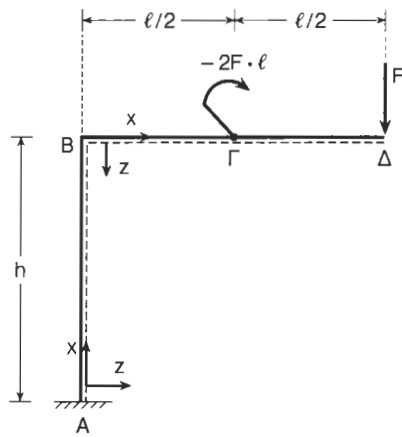
Λύση

Αντιδράσεις:

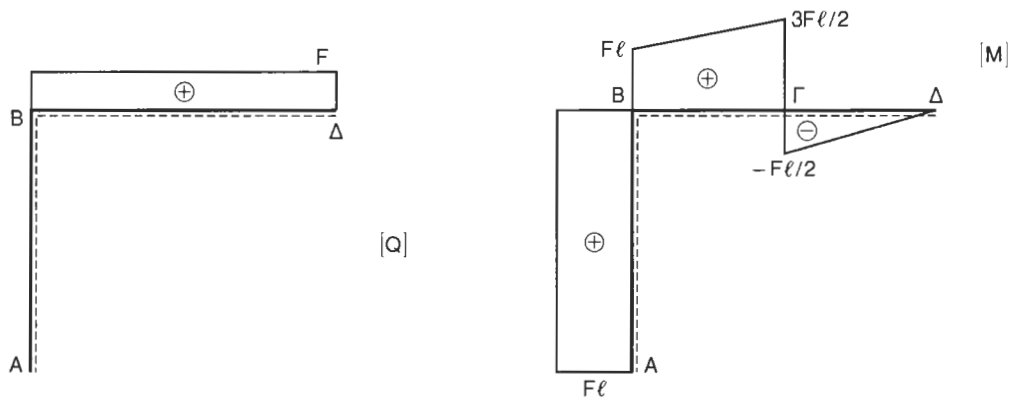
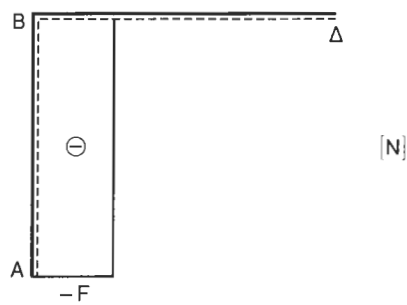
$$V_A = 18.06\text{kN}, \quad H_A = 2.3\text{kN}, \quad V_E = 26.94\text{kN}$$



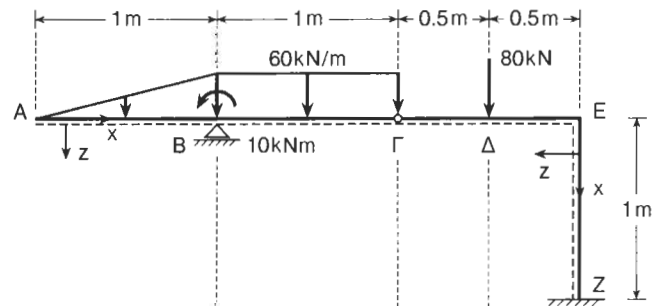
6) Να υπολογιστούν τα διαγράμματα [M], [Q], [N] στο πλαίσιο του κάτωθι σχήματος.



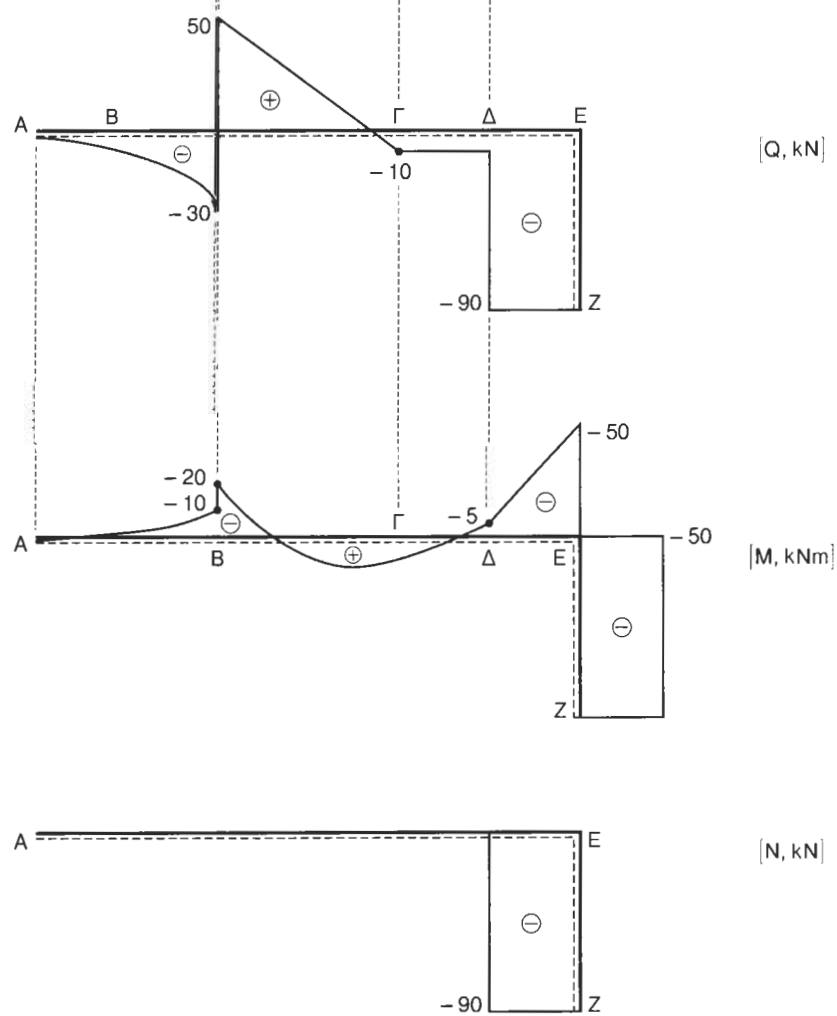
Λύση



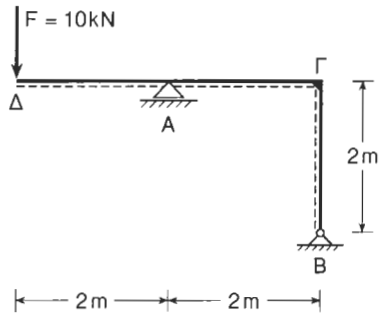
7) Να υπολογιστούν τα διαγράμματα $[M]$, $[Q]$, $[N]$ στο πλαίσιο του κάτωθι σχήματος.



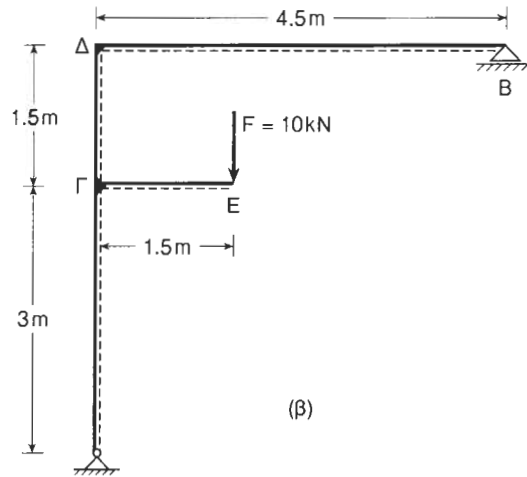
Λύση



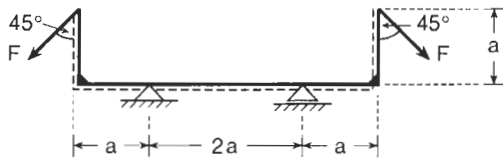
8) Να υπολογιστούν και να σχεδιαστούν τα διαγράμματα M, Q, N για τους παρακάτω φορείς.



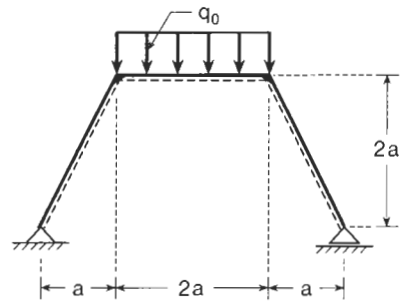
(α)



(β)

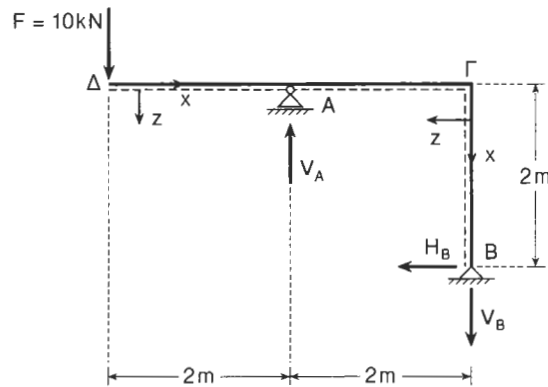


(γ)

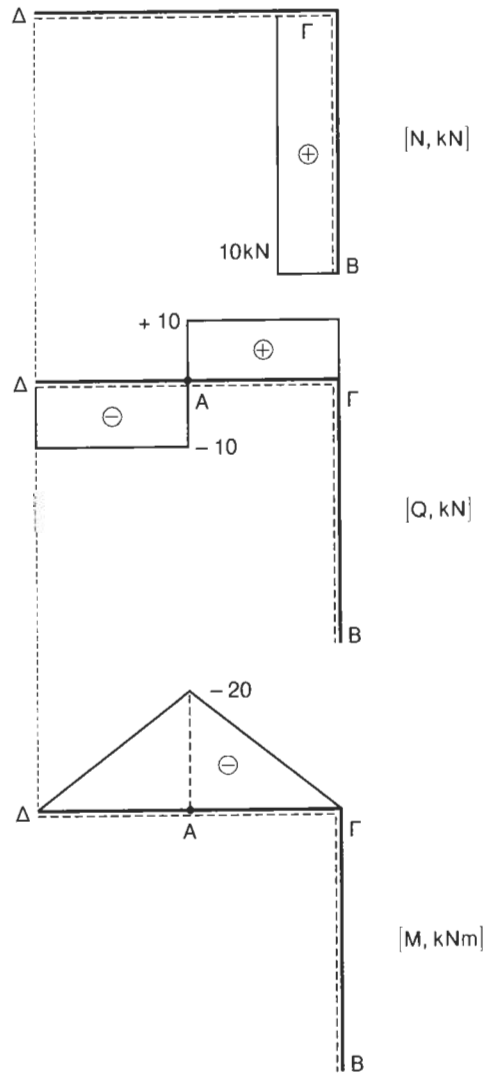


(δ)

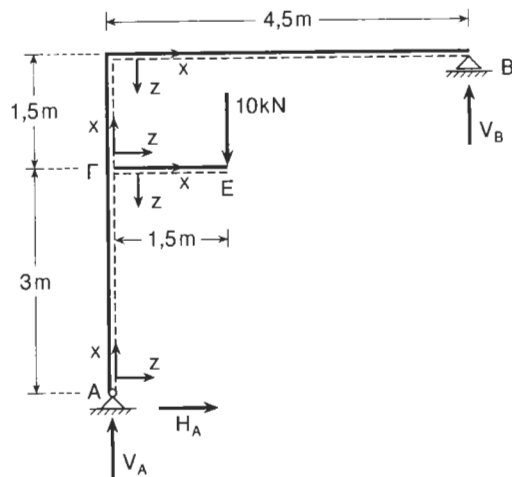
(α) Λύση



$$V_B = 10\text{kN}, \quad H_B = 0, \quad V_A = 20\text{kN}$$



(8) Λύση



Αντιδράσεις:

$$H_A = 0$$

$$10 \times 1.5 - V_B \cdot 4.5 = 0 \Rightarrow V_B = \frac{10}{3} \approx 3.3 \text{ kN}$$

$$V_A + V_B = 10 \Rightarrow V_A = \frac{20}{3} \approx 6.7 \text{ kN}$$

