Ε.Μ.Π., Τομέας Μηχανικής
ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΤΟΥ ΣΥΝΕΧΟΥΣ ΜΕΣΟΥ
Εξέταση: Πέμπτη, 10 Ιουλίου 2008, 8:30 π.μ.
Διδάσκων: Καθηγητής Ι. Βαρδουλάκης

ΘΕΜΑ 1
Δίδεται η περιγραφή της κίνησης κατά Lagrange ενός μονοδιάστατου Συνεχούς:

$$x = X(\xi,t) = \xi(1+f(t)) \quad , \quad f(t) \geq 0 \tag{1.1}$$

όπου η συνάρτηση χρόνου υπακούει στην αρχική συνθήκη,

$$f(0) = 0 \tag{1.2}$$

Δίδεται επίσης η ταχύτητα των υλικών σημείων του εν λόγω Συνεχούς σε περιγραφή κατά Euler,

$$v^E(x,t) = xt \tag{1.3}$$

Ζητείται να προσδιορισθεί η συνάρτηση χρόνου $f(t)$ και στη συνέχεια η συνάρτηση κίνησης, $X(\xi,t)$, εξ.(1.1).

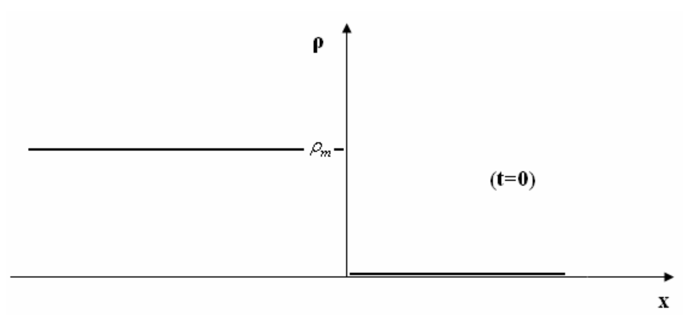
ΘΕΜΑ 2
Θεωρείται το μοντέλο κυκλοφοριακής ροής Underwood:

$$v = V(\rho) = v_0 \exp\left(-\frac{\rho}{\rho_m}\right), \quad 0 \leq \rho < \rho_\sigma \qquad (2.1)^1$$

όπου $v_0 = 120 km/hr$, $\rho_m = 40\ o\chi/km$ και $\rho_\sigma = 150\ o\chi/km$.

1) Να υπολογισθεί και να σχεδιασθεί η σχέση ροής-ταχύτητας, $q = Q(v)$, στο διάστημα $0 \leq v \leq v_0$.
2) Να υπολογισθεί η βέλτιστη ταχύτητα κυκλοφοριακής ροής.
3) Να προσδιορισθεί αναλυτικά και να σχεδιασθεί η σχέση, $c = C(\rho)$, στο διάστημα $0 \leq \rho \leq \rho_\sigma$.
4) Να σχεδιασθούν οι χαρακτηριστικές γραμμές στο επίπεδο (x,t) σε μία περιοχή κοντά στην αρχή των αξόνων για την αρχική κατανομή πυκνότητας (βλπ. Σχ.)

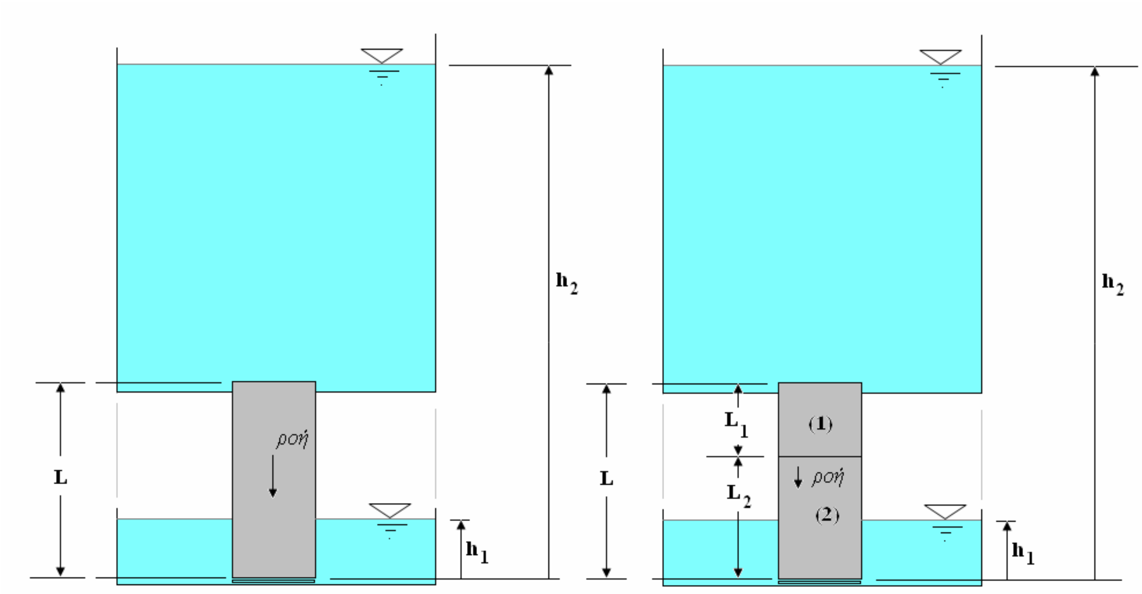
$$\rho(x,0) = \begin{cases} \rho_m & x < 0 \\ 0 & x > 0 \end{cases} \tag{2.2}$$



[1] Συμβολισμός: $\exp(x) \equiv e^x$

ΘΕΜΑ 3

Δύο εδαφικά δοκίμια, όπως στο σχήμα, τοποθετούνται κατακόρυφα σε μια κατάλληλη πειραματική συσκευή, η οποία επιβάλει ροή του ύδατος δια μέσου αυτών με κατεύθυνση από πάνω προς τα κάτω. Η στάθμη του ύδατος στο πάνω και στο κάτω δοχείο διατηρείται σταθερή στις θέσεις $h_1 = 0.50m$ και $h_2 = 1.5m$ αντιστοίχως από το επίπεδο αναφοράς.



1) Το πρώτο δοκίμιο έχει τα εξής χαρακτηριστικά:

$k_w = 2 \cdot 10^{-5}\ cm/\sec \quad , \quad L = 2.5\ cm$

2) Το δεύτερο δοκίμιο αποτελείται από δύο διαφορετικά εδαφικά υλικά με τα εξής χαρακτηριστικά:

$(1): \quad k_w^{(1)} = 1 \cdot 10^{-6}\ cm/\sec \quad , \quad L_1 = 0.5\,cm$

$(2): \quad k_w^{(2)} = 2 \cdot 10^{-5}\ cm/\sec \quad , \quad L_2 = 2.0\ cm$

Να υπολογισθεί η ειδική παροχή ύδατος διαμέσου των εδαφικών δοκιμίων σε $\frac{lt}{hr}\frac{1}{m^2}$ για κάθε μία από τις παραπάνω περιπτώσεις.

Λύσεις

ΘΕΜΑ 1

Δίδεται,

$$X(\xi,t) := \xi\,(1+f(t))$$

Οπότε,

$$\xi := \frac{x}{1+f(t)}$$

Επειδή,

$$v^L(\xi,t) = \frac{\partial X(\xi,t)}{\partial t} \Rightarrow \quad vL(\xi,t) := \xi\left(\frac{d}{dt}f(t)\right)$$

Άρα,

$$v^E(x,t) = v^L(\xi(x,t),t) \Rightarrow \quad vE(x,t) := \frac{x\left(\frac{d}{dt}f(t)\right)}{1+f(t)}$$

Δίδεται ότι,

$$v^E(x,t) = xt$$

οπότε παίρνουμε

$$\frac{x}{1+f(t)}\frac{df}{dt} = xt \Rightarrow \quad \frac{df}{1+f} = tdt$$

ή

$$\ln(1+f) = \frac{1}{2}t^2 + c$$

ή

$$1+f = Ce^{\frac{t^2}{2}} \Rightarrow \quad f(t) = -1+Ce^{\frac{t^2}{2}}$$

Επειδή,

$$f(0)=0 \Rightarrow \quad 0=-1+C \Rightarrow \quad C=1$$

Άρα

$$\boxed{f(t) = -1+e^{\frac{t^2}{2}}}$$

και

$$\boxed{X(\xi,t) = \xi e^{\frac{t^2}{2}}}$$

ΘΕΜΑ 2

1. Από τη σχέση,

$$v = V(\rho) = v_0 \exp\left(-\frac{\rho}{\rho_m}\right) \Rightarrow \quad \rho = -\rho_m \ln\left(\frac{v}{v_0}\right) = \rho_m \ln\left(\frac{v_0}{v}\right)$$

ή

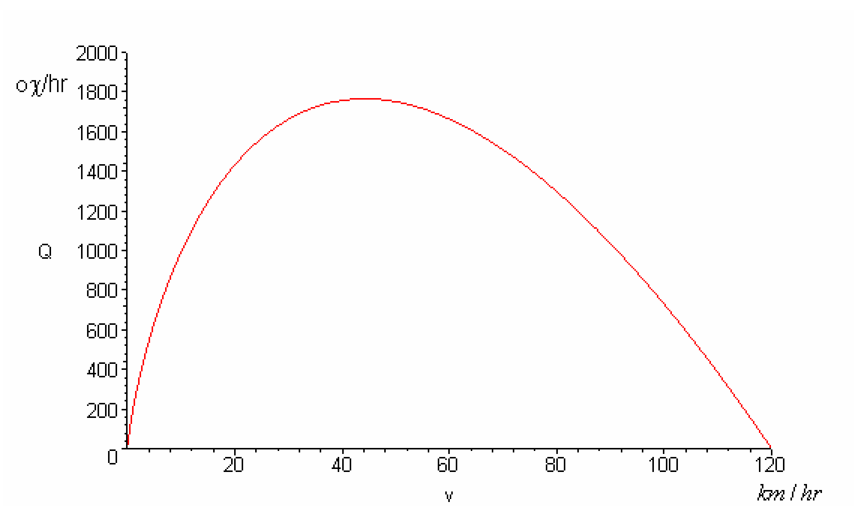
$$\rho = 40 \ln\left(\frac{120}{v}\right)$$

Άρα

$$\boxed{q = Q(v) = \rho v = \rho_m v \ln\left(\frac{v_0}{v}\right)}$$

ή

$$Q(v) = 40 v \ln\left(\frac{120}{v}\right)$$



2. Η βέλτιστη ταχύτητα κυκλοφοριακής ροής είναι εκείνη όπου έχουμε τη μέγιστη παροχή,

$$\frac{dq}{dv} = 0 \Rightarrow \quad \rho_m \ln\left(\frac{v_0}{v}\right) - \rho_m v \frac{1}{v} = 0$$

ή

$$\ln\left(\frac{v_0}{v}\right) = 1 \Rightarrow \quad \frac{v_0}{v} = e \Rightarrow$$

$$\boxed{v = \frac{v_0}{e} \approx 0.37 v_0 = 44.1 km/hr}$$

Παρατηρούμε ότι,

$$q_m = q_{\max} = Q(v_m) = \rho_m v_m \ln\left(\frac{v_0}{v_m}\right) = \rho_m v_m \ln e = \rho_m v_m$$

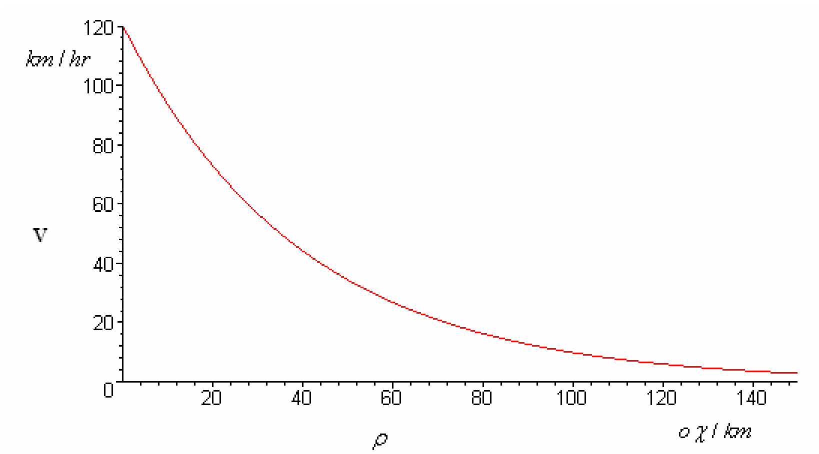
$$\Rightarrow \quad v_m = \frac{q_m}{\rho_m}$$

3. Δίδεται,

$$v = V(\rho) = v_0 \exp\left(-\frac{\rho}{\rho_m}\right)$$

όπου $v_0 = 120 km/hr$, $\rho_m = 40\ o\chi/km$ και $\rho_\sigma = 150\ o\chi/km$. Άρα

$$V(\rho) := 120 e^{\left(-\frac{\rho}{40}\right)}$$

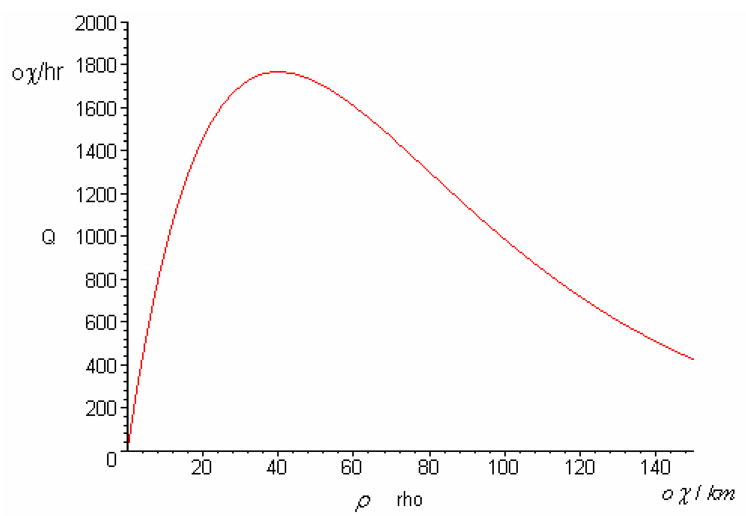


Με δεδομένο ότι,

$$q = \rho V(\rho) = v_0 \rho \exp\left(-\frac{\rho}{\rho_m}\right)$$

ή

$$q(\rho) := 120 \rho\, e^{\left(-\frac{\rho}{40}\right)}$$

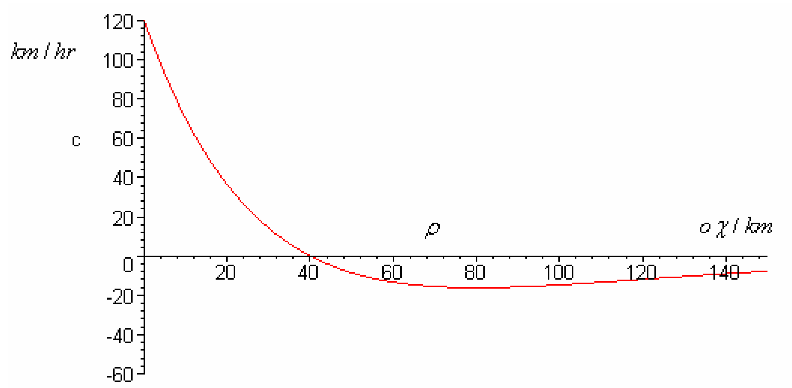


από τη σχέση

$$c = C(\rho) = \frac{dq}{d\rho} \Rightarrow \quad c = v_0\left(1 - \frac{\rho}{\rho_m}\right)\exp\left(-\frac{\rho}{\rho_m}\right)$$

ή

$$c(\rho) := 120 e^{\left(-\frac{\rho}{40}\right)} - 3\rho e^{\left(-\frac{\rho}{40}\right)}$$



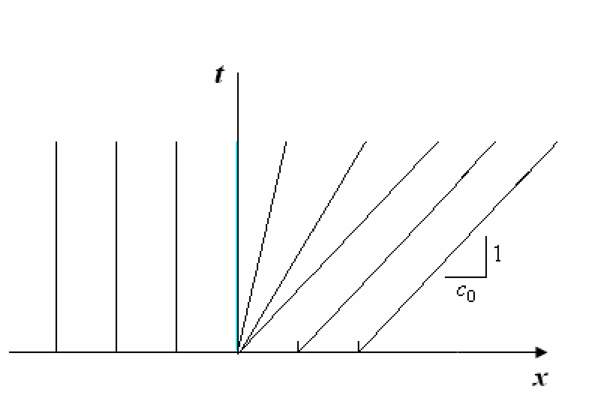
4. Για,

$$\rho = \rho_m = 40\ o\chi / km \Rightarrow \quad c = 0$$

και για,

$$\rho = 0\ o\chi / km \Rightarrow \quad c = c_0 = 120\ km / hr$$

Στο σχήμα φαίνεται το ζητούμενο σκαρίφημα των ΧΓ στην περιοχή της ασυνέχειας (κύμα εκτόνωσης).



ΘΕΜΑ 3

1) Βάσει του νόμου του Darcy έχουμε

$$q = k_w \frac{\Delta h}{L} \Rightarrow$$

$$q = 2.0 \cdot 10^{-5} \frac{cm}{s} \frac{150cm - 50cm}{2.5cm} = 0.0008 \frac{cm}{s}$$

ή

$$q = 0.0008 \cdot 36000 = 28.8 \frac{lt}{hr} \frac{1}{m^2}$$

2) Έστω $h_{1/2}$ το υδραυλικό ύψος στη διεπιφάνεια μεταξύ των δύο εδαφικών υλικών. Οπότε:

$$q^{(1)} = k_w^{(1)} \frac{h_2 - h_{1/2}}{L_1}$$

και

$$q^{(2)} = k_w^{(2)} \frac{h_{1/2} - h_1}{L_2}$$

Συνέχεια της ροής επιβάλλει,

$$q^{(1)} = q^{(2)} \Rightarrow \quad k_w^{(1)} \frac{h_2 - h_{1/2}}{L_1} = k_w^{(2)} \frac{h_{1/2} - h_1}{L_2}$$

ή

$$h_{1/2} = \frac{k_w^{(1)} h_2 L_2 + k_w^{(2)} h_1 L_1}{k_w^{(1)} L_2 + k_w^{(2)} L_1} = 66.7cm$$

και

$$q^{(2)} = q^{(1)} = k_w^{(1)} \frac{h_2 - h_{1/2}}{L_1} = 10^{-6} \frac{150 - 66.7}{0.5} = 0.00017 \frac{cm}{s}$$

ή

$$q = 0.00017 \cdot 36000 = 6 \frac{lt}{hr} \frac{1}{m^2}$$