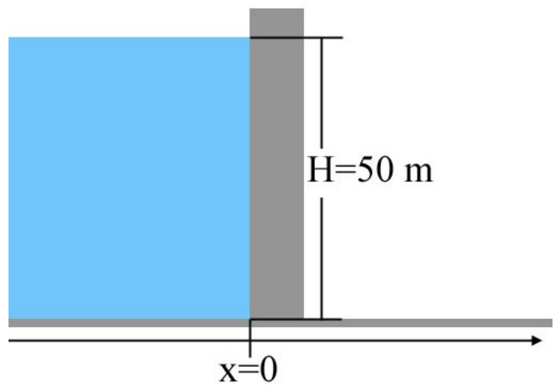
Άσκηση στην Θραύση Φράγματος

Το επίπεδο του νερού σε ένα φράγμα φτάνει σε ύψος $H = 50\,m$ όπως φαίνεται στο σχήμα. Την χρονική στιγμή $t = 0$ το φράγμα καταρρέει. Να υπολογιστεί η ταχύτητα και η μορφή του όγκου ύδατος που απελευθερώνεται με την χρήση της μεθόδου των χαρακτηριστικών γραμμών.



<u>Λύση</u>

Σύμφωνα με την θεωρία ρηχών υδάτων η λύση περιγράφεται από το σύστημα εξισώσεων

$$\frac{\partial h}{\partial t} + u\frac{\partial h}{\partial x} + h\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \text{ (εξίσωση συνέχειας)}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + g\frac{\partial h}{\partial x} = 0 \text{ (διατήρηση ορμής)}$$

όπου u είναι η μέση κατά ύψος οριζόντια ταχύτητα του ύδατος και h το ύψος της ελεύθερης επιφανείας. Με την υπόθεση ότι η ταχύτητα εξαρτάται αποκλειστικά από το ύψος της ελεύθερης επιφανείας στην συγκεκριμένη διατομή ($u = u(h)$) οι παραπάνω εξισώσεις γράφονται

$$\frac{\partial h}{\partial t} + u\frac{\partial h}{\partial x} + hu'\frac{\partial h}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + u\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{g}{u'}\frac{\partial h}{\partial x} = 0$$

και αφού πρέπει να ισχύουν και οι δύο

$$u' = \pm\sqrt{\frac{g}{h}} \Rightarrow u = \pm\left(2\sqrt{gh} + u_0\right)$$

Αφού πριν την θραύση του φράγματος για $h = H$ η ταχύτητα είναι μηδενική

$$u = \pm 2\sqrt{gh} \mp 2\sqrt{gH}$$

Αντικαθιστώντας στις αρχικές εξισώσεις

$$\frac{\partial h}{\partial t} + c(h)\frac{\partial h}{\partial x} = 0$$

όπου

$$c(h) = \pm\left(2\sqrt{gh} - 2\left(gH\right) + \sqrt{gh}\right) = \pm 3\sqrt{gh} \mp 2\sqrt{gH}$$

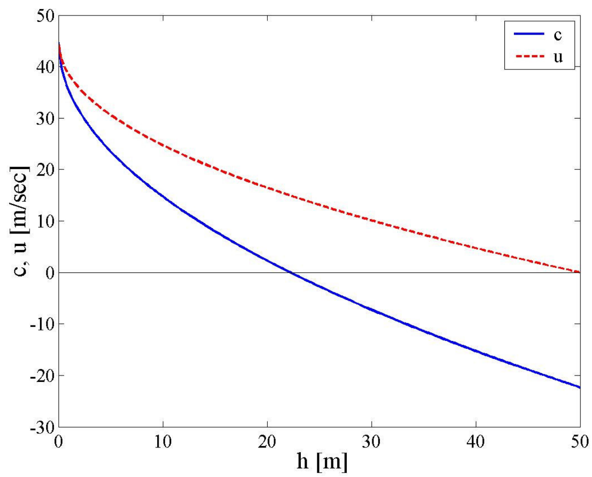
Άρα η υπερβολική εξίσωση

$$\frac{\partial h}{\partial t} + c(h)\frac{\partial h}{\partial x} = 0$$

εκφράζει τη διάδοση του κύματος με ταχύτητα $c(h)$. Μένει να επιλέξουμε το κατάλληλο πρόσημο. Για το αρχικό ύψος του ύδατος $h = H$ η ταχύτητα θα πρέπει να είναι αρνητική, μια και η διαταραχή θα πρέπει να κινείται προς τα αριστερά. Θα πρέπει επομένως το πρόσημο του πρώτου συντελεστή να είναι αρνητικό

$$c(h) = -3\sqrt{gh} + 2\sqrt{gH}$$

Στο παρακάτω διάγραμμα φαίνονται η ταχύτητα διάδοσης της διαταραχής και η ταχύτητα του ύδατος ως συναρτήσεις του ύψους.



Διακρίνουμε τρεις κύριες περιοχές της λύσης του προβλήματος.

1. Την περιοχή στην οποία ισχύει ακόμα $h = H = 50\,m$. Στην περιοχή αυτή η ταχύτητα ύδατος είναι μηδενική και η ταχύτητα διάδοσης της διαταραχής είναι

$$c_1 = -\sqrt{gH} = -22.36\,\frac{m}{sec}$$

2. Την περιοχή που ακόμα χαρακτηρίζεται από μηδενικό ύψος στήλης ύδατος, δηλαδή $h = 0\,m$. Και σε αυτή την περιοχή η ταχύτητα του ύδατος είναι μηδενική ενώ η ταχύτητα διάδοσης της διαταραχής είναι

$$c_2 = 2\sqrt{gH} = 44.72\,\frac{m}{sec}$$

3. Τέλος υπάρχει η ενδιάμεση περιοχή που χαρακτηρίζεται από μεταβλητό ύψος στήλης ύδατος. Το σημείο $(0,0)$ είναι σημείο Prandtl, δηλαδή από αυτό ξεκινάει μία δέσμη χαρακτηριστικών γραμμών με διαφορετικές κλίσεις. Γνωρίζουμε ήδη ότι

$$c(h) = -3\sqrt{gh} + 2\sqrt{gH}$$

Για $0 \le h \le 50\,m$ με ανάλυση 5 υπολογίζουμε τις κλίσεις των χαρακτηριστικών γραμμών.

$h\,[m]$	$c\left[\frac{m}{sec}\right]$
0	44.72
5	23.51
10	14.72
15	7.98

20	2.29
25	-2.71
30	-7.24
35	-11.40
40	-15.28
45	-18.92
50	-22.36

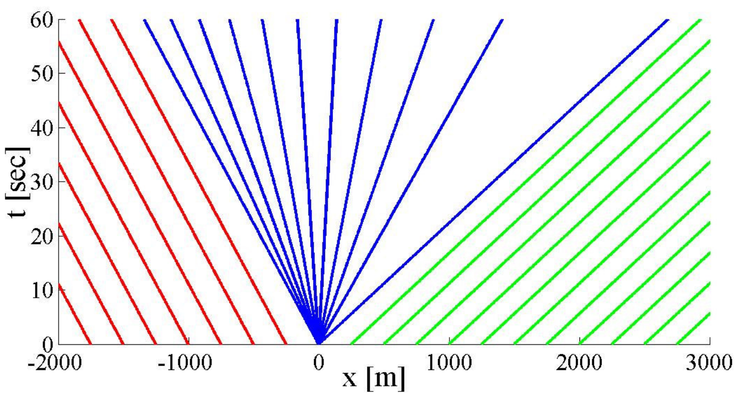
Παρατηρούμε ότι, όπως ήταν αναμενόμενο, η ταχύτητα διάδοσης της διαταραχής αλλάζει πρόσημο. Το ύψος της στήλης ύδατος για το οποίο είναι ίση με μηδέν θα είναι

$$3\sqrt{gh_c} = 2\sqrt{gH} \Rightarrow h_c = \frac{4}{9}H = 22.22\,m$$

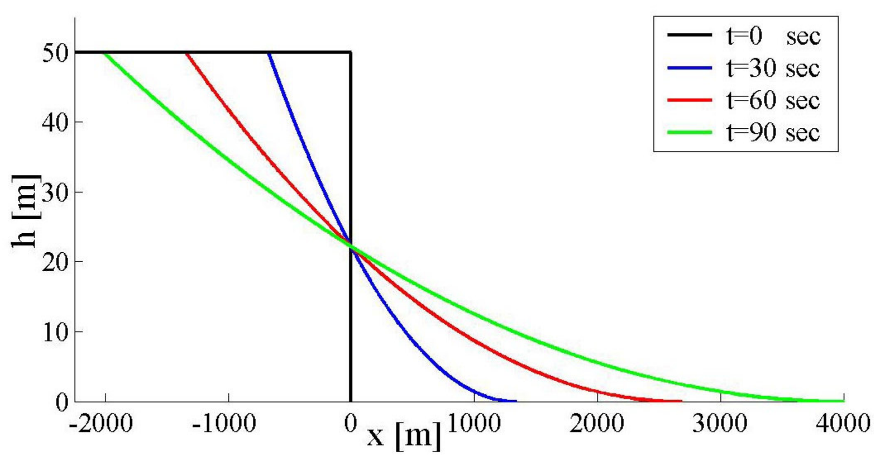
Άρα από το $(0,0)$ θα ξεκινάει και μία κατακόρυφη χαρακτηριστική γραμμή που αντιστοιχεί στο ύψος h_c. Δηλαδή στο $x=0$ το ύψος θα παραμένει σταθερά ίσο με h_c και η ταχύτητα του ύδατος σταθερά ίση με

$$u_c = \sqrt{gh_c} = 14.91\,\frac{m}{sec}$$

Στο επόμενο σχήμα φαίνεται το διάγραμμα των χαρακτηριστικών γραμμών,



ενώ στο τελευταίο φαίνεται η μορφή του πλημμυρικού κύματος για διαφορετικούς χρόνους



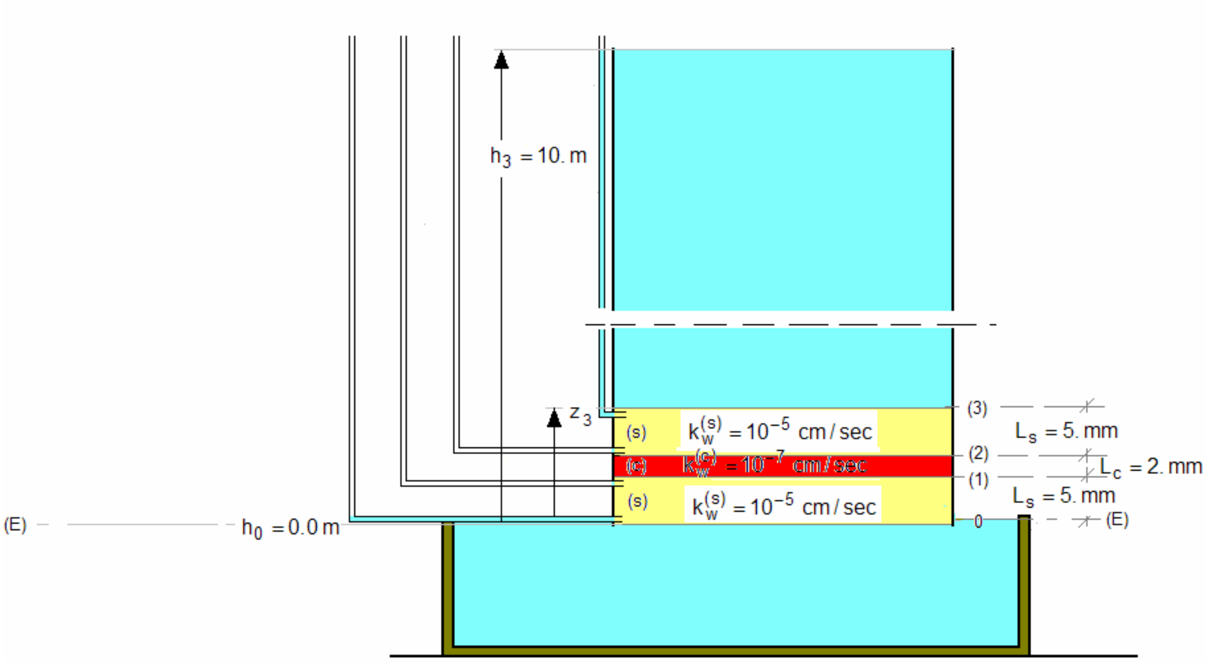
Άσκηση στον νόμο του Darcy

Ένα εδαφικό δείγμα τοποθετείται κατακόρυφα σε μια κατάλληλη πειραματική συσκευή, η οποία επιβάλει ροή ύδατος δια μέσου αυτού με κατεύθυνση από πάνω προς τα κάτω. Η στάθμη του ύδατος στο πάνω και στο κάτω άκρο του δείγματος διατηρείται σταθερή στις θέσεις $H_0 = 0.5\,m$ και $H_3 = 10.\,m$ από το επίπεδο αναφοράς $(E): z = 0$. Το δοκίμιο αποτελείται από τρεις ισοπαχείς στρώσεις από δύο διαφορετικά εδαφικά υλικά με τα εξής χαρακτηριστικά:

Ιλύς (s): $k_w^{(s)} = 10^{-5}\, cm/sec, \quad L_s = 5.0\, mm$

Άργιλος (c): $k_w^{(c)} = 10^{-7}\, cm/sec, \quad L_c = 2.0\, mm$

Να υπολογισθεί η ειδική παροχή ύδατος q διαμέσου του εδαφικού δοκιμίου σε lt/hr ανά $1.0\, m^2$ επιφανείας κάθετης στη ροή, $[q] = \frac{lt/hr}{m^2}$.



<u>Λύση:</u>

Ο νόμος του Darcy στην περίπτωση που εξετάζουμε παίρνει την εξής μορφή

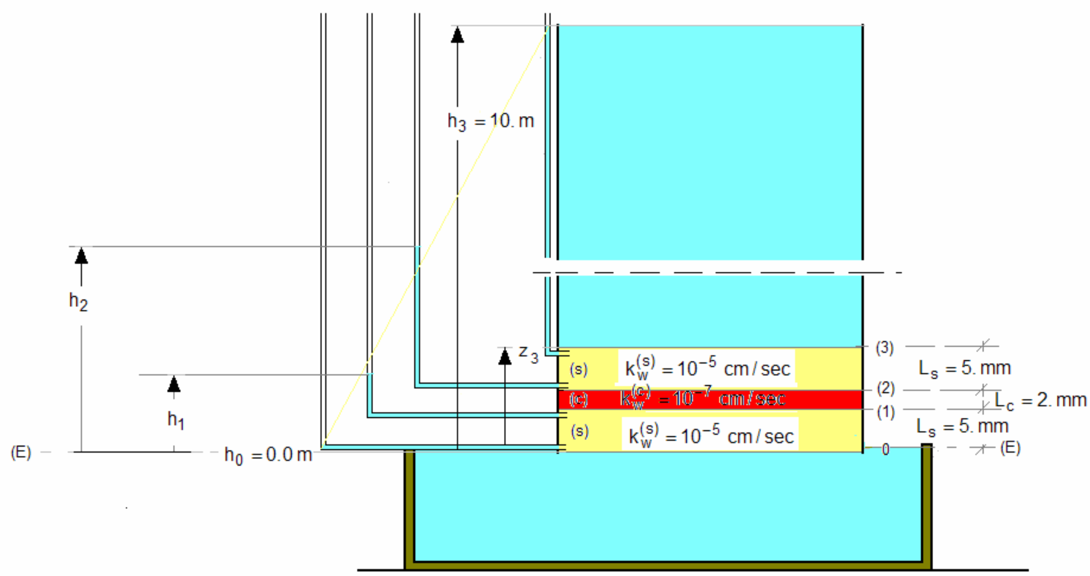
$$q_z = -k_w \frac{dh}{dz}$$

όπου έχουμε εισάγει το λεγόμενο υδραυλικό ύψος ως το άθροισμα του γεωδαιτικού ύψους και του πιεζομετρικού ύψους:

$$h = z + \frac{p_w}{\gamma_w}$$

<u>Σημείωση:</u>

Το αρνητικό πρόσημο στον παραπάνω τύπο για την παροχή σημαίνει ότι η ροή είναι προς τα κάτω, αντίθετα στον άξονα z.



- Ροή διαμέσου του κάτω στρώματος ιλύος:

$$q_z = -q_1$$

$$q_1 = k_w^{(s)} \frac{h_1 - h_0}{L_s} = 10^{-5} \frac{cm}{sec} \frac{h_1 - 0\,m}{5\,mm}$$
$$= 10^{-7} \frac{m}{sec} \frac{h_1}{5 \cdot 10^{-3}\,m} = 2 \cdot 10^{-5} \frac{1}{sec} h_1$$

- Ροή διαμέσου του στρώματος αργίλου:

$$q_z = -q_2$$

$$q_2 = k_w^{(c)} \frac{h_2 - h_1}{L_c} = 10^{-7} \frac{cm}{sec} \frac{h_2 - h_1}{2\,mm}$$
$$= 10^{-9} \frac{m}{sec} \frac{1}{2 \cdot 10^{-3}\,m} \left(h_2 - h_1\right) = 5 \cdot 10^{-7} \frac{1}{sec} \left(h_2 - h_1\right)$$

- Ροή διαμέσου του πάνω στρώματος ιλύος:

$$q_z = -q_3$$

$$q_3 = k_w^{(s)} \frac{h_3 - h_2}{L_s} = 10^{-5} \frac{cm}{sec} \frac{10\,m - h_2}{5\,mm}$$
$$= 10^{-7} \frac{m}{sec} \frac{1}{5 \cdot 10^{-3}\,m} \left(10\,m - h_2\right) = 2 \cdot 10^{-5} \frac{1}{sec} \left(10\,m - h_2\right)$$

Συνέχεια της ροής: Προσδιορισμός του υδραυλικού ύψους στις διεπιφάνειες

$$q_1 = q_2 \Rightarrow 2 \cdot 10^{-5} \frac{1}{sec} h_1 = 5 \cdot 10^{-7} \frac{1}{sec} \left(h_2 - h_1\right) \Rightarrow$$

$$h_1 = 0.025\left(h_2 - h_1\right) \Rightarrow$$

$$1.025 h_1 = 0.025 h_2$$

$$h_1 = \frac{0.025}{1.025} h_2 = 0.0244 h_2$$

$$q_2 = q_3 \Rightarrow 5\cdot 10^{-7}\,\frac{1}{sec}\left(h_2 - h_1\right) = 2\cdot 10^{-5}\,\frac{1}{sec}\left(10\,m - h_2\right)$$

$$0.05\left(h_2 - h_1\right) = 20\,m - 2h_2$$

$$2h_2 + 0.05\left(h_2 - 0.0244h_2\right) = 20\,m$$

$$h_2 = \frac{20\,m}{2.0487} = 9.762\,m$$

και

$$h_1 = 0.024h_2 = 0.238\,m$$

Παροχή:

$$q_1 = 2\cdot 10^{-5}\,\frac{1}{sec}h_1 = 2\cdot 10^{-5}\,\frac{1}{sec}0.238\,m = 0.4762\cdot 10^{-5}\,\frac{m}{sec}$$

$$q_2 = 5\cdot 10^{-7}\,\frac{1}{sec}\left(h_2 - h_1\right) = 5\cdot 10^{-7}\,\frac{1}{sec}\left(9.762\,m - 0.238\,m\right) = 0.4762\cdot 10^{-5}\,\frac{m}{sec} \quad (!)$$

$$q_3 = 2\cdot 10^{-5}\,\frac{1}{sec}\left(10\,m - h_2\right) = 2\cdot 10^{-5}\,\frac{1}{sec}\left(10\,m - 9.762\,m\right) = 0.4762\cdot 10^{-5}\,\frac{m}{sec} \quad (!)$$

$$q = q_1 = q_2 = q_3 = 0.4762\cdot 10^{-5}\,\frac{m}{sec}$$

$$= 0.4762\cdot 10^{-5}\,\frac{m^3/sec}{m^2} = 0.4762\cdot 10^{-5}\,\frac{10^3\,lt/\left(60\cdot 60\,hr\right)}{m^2}$$

$$= 17.14\,\frac{lt/hr}{m^2}$$