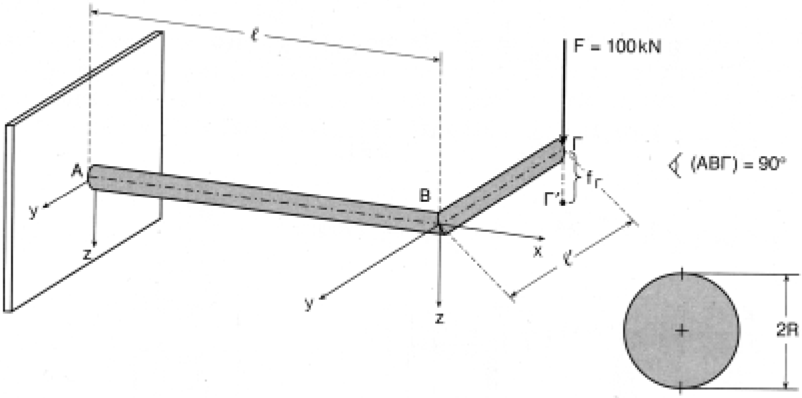
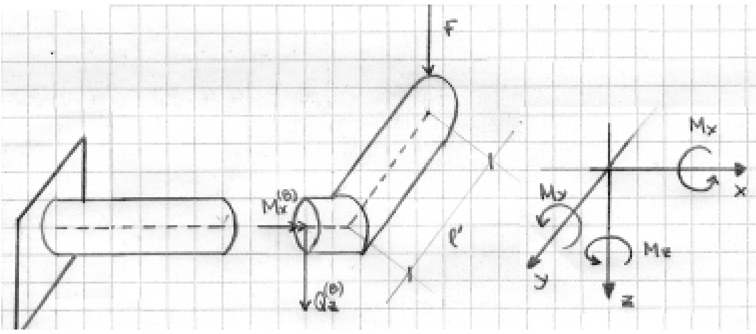
Πρόβολος υπό στρεπτοκαμπτική καταπόνηση
(εφαρμογή σελ. 185)



Θα προσπαθήσουμε να υπολογίσουμε τη βύθιση στο άκρο Γ του βραχίονα.

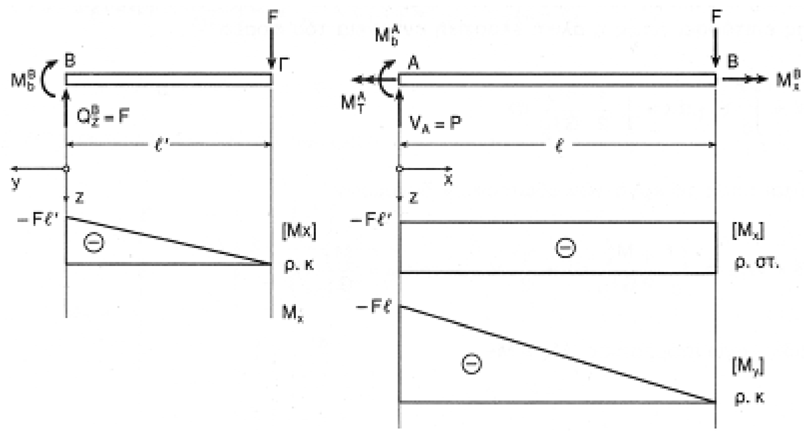


Απαιτώντας την ισορροπία του βραχίονα λαμβάνουμε τις εξής σχέσεις για τις εσωτερικά αναπτυσσόμενες δυνάμεις και ροπές στον κόμβο Β (βλ. σχήμα):

$$\Sigma\vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \quad Q_z^{B^-} = F$$

$$\Sigma\vec{M} = \vec{0} \Rightarrow \quad M_x^{B^-} = -F\ell'$$

Αρχικά θα ασχοληθούμε με τη δοκό ΑΒ η οποία υπόκειται συγχρόνως σε στρέψη και κάμψη. Σημειώνουμε ότι στα πλαίσια της Τεχνικής Θεωρίας η στρέψη διατυπώνεται ανεξάρτητα της κάμψης.



Λόγω της $Q_z^{B^-} = F$ στο άκρο Β της μονόπακτης δοκού ΑΒ και σύμφωνα με τον πίνακα της σελίδας 64 του βιβλίου η κατακόρυφη βύθιση στο Β ισούται με:

$$f^B = \frac{F\ell^3}{3EI}$$

Στο άκρο Β της δοκού ΑΒ ασκείται στρεπτικό φορτίο $M_T = M_x^{B^-} = -F\ell'$ ενώ από την ισορροπία ροπών κατά τον άξονα των x προκύπτει ότι σε κάθε διατομή της δοκού η στρεπτική ροπή παραμένει σταθερή (βλ. διαγράμματα).

Συνεπώς λαμβάνουμε:

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{M_x}{GI_p} \Rightarrow = \varphi(\mathrm{x}) = \varphi(0) + \int_0^x \frac{M_T}{GI_p} dx$$

Επειδή το άκρο Α είναι πακτωμένο έπεται ότι $\varphi(0) = 0$ και άρα:

$$\varphi(\mathrm{x}) = \frac{M_T}{GI_p} x = -\frac{F\ell'}{GI_p} x$$

Οπότε για $\mathrm{x} = \ell$:

$$\varphi(\ell) = -\frac{F\ell\ell'}{GI_p}$$

Η δοκός ΒΓ εντείνεται μόνο καμπτικά και το αναπτυσσόμενο διάγραμμα καμπτικών ροπών απεικονίζεται στο σχήμα.

Οι συνοριακές συνθήκες για τη δοκό αυτή είναι:

BC1: $w_2'(B) = w_2'(-y=0) = -\varphi(\ell) = \frac{F\ell\ell'}{GI_p}$

BC2: $w_2'(B) = f^B = \frac{F\ell^3}{3EI}$

Θέτοντας $\tilde{y} = -y$ και $I_{xx} = I_{yy} = I$ λαμβάνουμε:

$$-EIw_2''(\tilde{y}) = M_x(\tilde{y}) = -F(\ell' - \tilde{y}) \Rightarrow w_2''(\tilde{y}) = \frac{F}{EI}(\ell' - \tilde{y}) \Rightarrow$$

$$w_2'(\tilde{y}) = \frac{F}{EI}\tilde{y}\left(\ell' - \frac{1}{2}\tilde{y}\right) + c_1 \Rightarrow$$

$$w_2(\tilde{y}) = \frac{F}{2EI}\tilde{y}^2\left(\ell' - \frac{1}{3}\tilde{y}\right) + c_1\tilde{y} + c_2$$

Από τις συνοριακές συνθήκες προκύπτει:

$$w_2'(0) = \frac{F\ell\ell'}{GI_p} \Rightarrow c_1 = \frac{F\ell\ell'}{GI_p}$$

και

$$w_2(0) = \frac{F\ell^3}{3EI} \Rightarrow c_2 = \frac{F\ell^3}{3EI}$$

Οπότε η ελαστική γραμμή της δοκού ΒΓ δίνεται από τη σχέση:

$$w_2(\tilde{y}) = \frac{F}{2EI}\tilde{y}^2\left(\ell' - \frac{1}{3}\tilde{y}\right) + \frac{F\ell\ell'}{GI_p}\tilde{y} + \frac{F\ell^3}{3EI}$$

η οποία για $\tilde{y} = \ell'$ μας δίνει:

$$f_\Gamma = w_2(\ell') = \frac{F}{2EI}\ell'^2\left(\ell' - \frac{1}{3}\ell'\right) + \frac{F\ell\ell'}{GI_p}\ell' + \frac{F\ell^3}{3EI} = \frac{F}{3EI}\ell'^3 + \frac{F\ell}{GI_p}\ell'^2 + \frac{F\ell^3}{3EI} \Rightarrow$$

$$f_\Gamma = \frac{F}{3EI}\ell'^3 + \frac{F\ell}{\dfrac{E}{2(1+\nu)}I_p}\ell'^2 + \frac{F\ell^3}{3EI} = \frac{F\ell^3}{EI}\left[\frac{1}{3}\left(\frac{\ell'}{\ell}\right)^3 + 2\frac{I}{I_p}(1+\nu)\left(\frac{\ell'}{\ell}\right)^2 + \frac{1}{3}\right] \Rightarrow$$

Όμως $I = \frac{1}{2}I_P = \frac{\pi}{4}R^4$ και άρα:

$$f_\Gamma = \frac{F\ell^3}{EI}\left[\frac{1}{3}\left(\frac{\ell'}{\ell}\right)^3 + (1+\nu)\left(\frac{\ell'}{\ell}\right)^2 + \frac{1}{3}\right]$$

Για $\nu = 0,25$ και $\frac{\ell'}{\ell} = 0,2$ προκύπτει:

$$f_\Gamma = 0,386\frac{F\ell^3}{EI} = 0,386\frac{F\ell^3}{E\frac{\pi}{4}R^4} = 0,492\left(\frac{\ell}{R}\right)^4\frac{F}{E\ell} =$$

$$= 0,492\times10^4\times\frac{100kN}{210\frac{kN}{mm^2}10^3mm} = 0,492\times4,762 \quad [mm] \Rightarrow$$

$$f_\Gamma = 2,343\ mm$$