Ασκήσεις στην ελαστική γραμμή

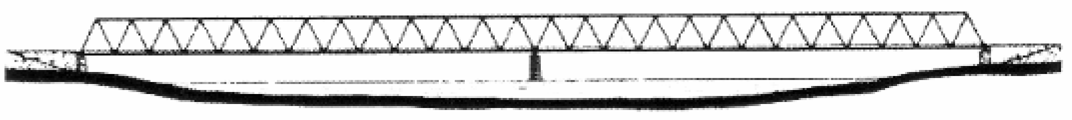
Γενικές Εξισώσεις

$$\left.\begin{aligned} M(x) &= -EIw''(x) \\ \frac{dM(x)}{dx} &= Q(x) \\ \frac{dQ(x)}{dx} &= -p(x) \end{aligned}\right\} \overset{EI=const(x)}{\Rightarrow} EIw^{(4)}(x) = p(x) \overset{p(x)=const(x)}{\Rightarrow} \begin{cases} w^{(3)}(x) = \dfrac{p}{EI}x + c_1 \\ w''(x) = \dfrac{p}{2EI}x^2 + c_1 x + c_2 \\ w'(x) = \dfrac{p}{6EI}x^3 + \dfrac{1}{2}c_1 x^2 + c_2 x + c_3 \\ w(x) = \dfrac{p}{24EI}x^4 + \dfrac{1}{6}c_1 x^3 + \dfrac{1}{2}c_2 x^2 + c_3 x + c_4 \end{cases}$$

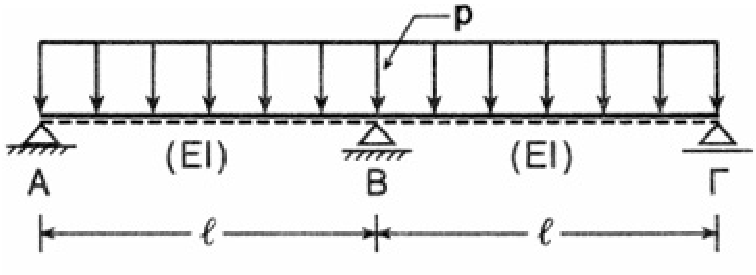
Εφαρμογές

1. Η γέφυρα

(άσκ.3 σελ.162 ΤΜ2)



Εικόνα 1. Μία αληθινή κατασκευή…



Εικόνα 2. Το στατικό μοντέλο της γέφυρας.

Στις πεζογέφυρες η τυπική τιμή του φορτίου σχεδιασμού ισούται με $0{,}5\text{t/m}^2$. Για πεζογέφυρα δε πλάτους ενός μέτρου το φορτίο αυτό ανάγεται σε 0,5t/m.

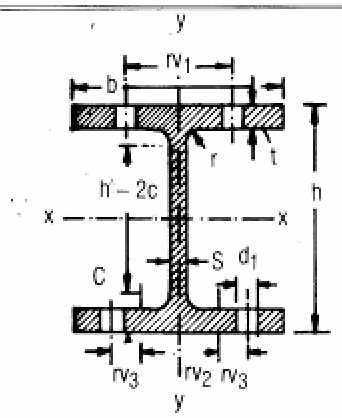
Στις σιδηροδρομικές γέφυρες η τυπική τιμή του φορτιού σχεδιασμού λαμβάνει πολύ μεγαλύτερες τιμές που αγγίζουν τους 100t/m^2. Για περισσότερες πληροφορίες ανατρέξτε σε μαθήματα μεγαλύτερου εξαμήνου (Σιδηρές Γέφυρες $9^{\text{ο}}$ εξάμηνο).

Το μέτρο ελαστικότητας (E) του χάλυβα ισούται με 220GPa.

Στο συγκεκριμένο παράδειγμα θα θεωρήσουμε ότι το φορτίο σχεδιασμού ισούται με $0{,}5\text{t/m}^2$, ότι η διατομή της δοκού εμφανίζει ροπή αδρανείας (I) ίση με $20000\ \text{cm}^4$ και ότι το άνοιγμα (l) είναι 10m.

Όπως θα δούμε το βέλος κάμψης γι' αυτές τις παραμέτρους είναι της τάξεως του χιλιοστού.

ΠΛΑΤΥΠΕΛΜΟΙ ΔΟΚΟΙ ΒΑΡΕΩΣ ΤΥΠΟΥ I PBv

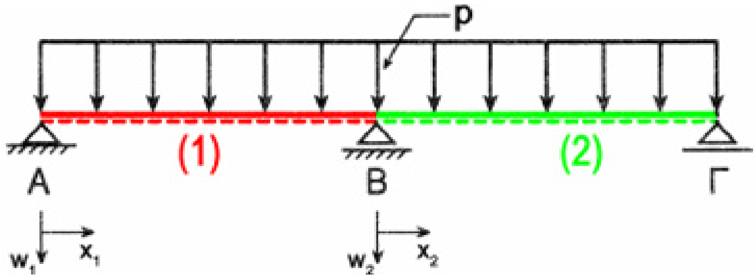


ΣΥΝΗΘΗ ΜΗΚΗ
ΔΙΑ ΥΨΗ ΔΙΑΤΟΜΩΝ ΚΑΤΩ ΑΠΟ 300 mm. ΑΠΟ 8 ΩΣ 16 m.
ΔΙΑ ΥΨΗ ΔΙΑΤΟΜΩΝ ΠΑΝΩ ΑΠΟ 300 mm. ΑΠΟ 8 ΩΣ 18 m.
ΚΑΙ ΕΙΔΙΚΕΣ ΔΙΑΤΟΜΕΣ ΜΕ ΠΛΑΤΥΤΕΡΑ ΠΕΛΜΑΤΑ

ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΙ ΚΑΤΑ DIN 1080
ΤΕΥΧΟΣ 1 (ΕΚΔ. ΙΟΥΝ. 1976)
ΤΕΥΧΟΣ 4 (ΕΚΔ. ΜΑΡΤ. 1980)

ΣΥΜΒΟΛΙΣΜ.	ΔΙΑΣΤΑΣΕΙΣ ΕΙΣ ΧΙΛΙΟΣΤΑ							F	G	ΚΑΤΑ ΤΟΝ ΑΞΟΝΑ ΚΑΜΨΕΩΣ						s_x	ΟΠΕΣ ΠΕΛΜΑΤΩΝ ΚΑΤΑ DIN 997 ΕΚΔ. ΟΚΤ. 1970*		
										x-x			y-y						
	h	b	s	t	r	c	h-2c	cm^2	kg/m	J_x cm^4	W_x cm^3	i_x cm	J_y cm^4	W_y cm^3	i_y cm	cm	d_1 mm	w_1 w_2 mm	w_3 mm
I PBv HE-M	ΠΛΑΤΥΠΕΛΜΕΣ ΔΟΚΟΙ ΒΑΡΕΩΣ ΤΥΠΟΥ I ΜΕ ΠΑΡΑΛΛΗΛΑ ΠΕΛΜΑΤΑ. ΣΕΙΡΑ I PBv, ΘΕΡΜΗΣ ΕΛΑΣΗΣ, ΚΑΤΑ DIN 1025. ΜΕΡΟΣ 4. ΕΚΔΟΣΙΣ ΟΚΤΩΒ. 1963. Η ΣΕΙΡΑ I PBv ΑΚΟΛΟΥΘΕΙ ΤΟΥΣ EURONORM ΚΑΝΟΝΙΣΜΟΥΣ 53-62 (HE-M).																		
100	120	106	12	20	12	32	56	53,2	41,8	1140	190	4,63	399	75,3	2,74	9,69	13	60	-
120	140	126	12,5	21	12	33	74	66,4	52,1	2020	288	5,51	703	112	3,25	11,5	17	68	-
140	160	146	13	22	12	34	92	80,6	63,2	3290	411	6,39	1140	157	3,77	13,3	21	76	-
160	180	166	14	23	15	38	104	97,1	76,2	5100	586	7,25	1760	212	4,26	15,1	23	86	-
180	200	186	14,5	24	15	39	122	113	88,9	7480	746	8,13	2580	277	4,77	16,9	25	100	-
200	220	206	15	25	18	43	134	131	103	10640	967	9,00	3650	354	5,27	18,7	25	110	-
220	240	226	15,5	26	18	44	152	149	117	14600	1220	9,89	5010	444	5,79	20,6	25	120	-
240	270	248	18	32	21	53	164	200	157	24290	1800	11,0	8150	657	6,39	22,9	25 23	100	35
260	290	268	18	32,5	24	56,5	177	220	172	31310	2160	11,9	10450	780	6,90	24,8	25	110	40
280	310	288	18,5	33	24	57	196	240	189	39550	2560	12,8	13160	914	7,40	26,7	25	116	45
300	34-	310	21	39	27	66	208	303	238	59200	3480	14,0	19400	1250	8,00	29,0	25	120	50

Εκδοχή 1: Ύπαρξη μεσαίας ακλόνητης στήριξης



Εικόνα 3. Η δοκός χωρισμένη σε δύο μέρη για την επίλυση του προβλήματος.

Παρατήρηση: Χρειαζόμαστε 8 εξισώσεις για τον προσδιορισμό των 8 άγνωστων σταθερών του προβλήματος (4 για κάθε τμήμα της δοκού, βλ. γενικές εξισώσεις). Αυτές οι εξισώσεις θα προκύψουν από τις συνοριακές συνθήκες (άκρα δοκού, απαίτηση συνέχειας στο Β).

Συνοριακές συνθήκες για το τμήμα της δοκού (1):

$$BC1: \quad w_1(0)=0$$
$$BC2: \quad w_1(l)=0$$
$$BC3: \quad M_1(0)=0$$

Συνοριακές συνθήκες για το τμήμα της δοκού (2):

$$BC4: \quad w_2(0)=0$$
$$BC5: \quad w_2(l)=0$$
$$BC6: \quad M_2(l)=0$$

Συνοριακές συνθήκες για την εξασφάλιση της συνέχειας της δοκού στο Β:

$$BC7: \quad w_1'(l)=w_2'(0)$$
$$BC8: \quad M_1(l)=M_2(0)$$

Από τις *BC1, BC3,* και *BC4* λαμβάνουμε αντίστοιχα[1]:

$$w_1(0)=0 \Rightarrow c_4^1=0$$
$$M_1(0)=0 \Rightarrow -EIw_1''(0)=0 \Rightarrow w_1''(0)=0 \Rightarrow c_2^1=0$$
$$w_2(0)=0 \Rightarrow c_4^2=0$$

Ενώ από τις *BC2, BC6* και *BC5* :

[1] Οι άνω δείκτες των σταθερών υποδηλώνουν το τμήμα της δοκού.

$$w_1(l)=0 \Rightarrow \frac{p}{24EI}l^4+\frac{1}{6}c_1^1 l^3+c_3^1 l=0 \Rightarrow c_3^1=-\frac{p}{24EI}l^3-\frac{1}{6}c_1^1 l^2$$

$$M_2(l)=0 \Rightarrow w_2''(l)=0 \Rightarrow \frac{p}{2EI}l^2+c_1^2 l+c_2^2=0 \Rightarrow c_2^2=-\frac{p}{2EI}l^2-c_1^2 l$$

$$w_2(l)=0 \Rightarrow \frac{p}{24EI}l^4+\frac{1}{6}c_1^2 l^3+\frac{1}{2}c_2^2 l^2+c_3^2 l=0 \Rightarrow c_3^2=-\frac{p}{24EI}l^3-\frac{1}{6}c_1^2 l^2-\frac{1}{2}c_2^2 l$$

Αντικαθιστώντας τη σταθερά c_2^2 στην έκφραση της c_3^2 προκύπτει:

$$c_3^2=-\frac{p}{24EI}l^3-\frac{1}{6}c_1^2 l^2+\frac{p}{4EI}l^3+\frac{1}{2}c_1^2 l^2 \Rightarrow c_3^2=\frac{5}{24}\frac{p}{EI}l^3+\frac{1}{3}c_1^2 l^2$$

Τέλος, από τις εξισώσεις των *BC7* και *BC8* έχουμε:

$$w_1'(l)=w_2'(0) \Rightarrow \frac{p}{6EI}l^3+\frac{1}{2}c_1^1 l^2+c_3^1=c_3^2 \Rightarrow c_3^2=\frac{p}{8EI}l^3+\frac{1}{3}c_1^1 l^2$$

$$M_1(l)=M_2(0) \Rightarrow -EIw_1''(l)=-EIw_2''(0) \Rightarrow w_1''(l)=w_2''(0) \Rightarrow \frac{p}{2EI}l^2+c_1^1 l=c_2^2$$

Συνοψίζοντας:

$$c_4^1=c_2^1=c_4^2=0$$

$$(1):\quad c_3^1=-\frac{p}{24EI}l^3-\frac{1}{6}c_1^1 l^2$$

$$(2):\quad c_2^2=-\frac{p}{2EI}l^2-c_1^2 l$$

$$(3):\quad c_3^2=\frac{5}{24}\frac{p}{EI}l^3+\frac{1}{3}c_1^2 l^2$$

$$(4):\quad c_3^2=\frac{p}{8EI}l^3+\frac{1}{3}c_1^1 l^2$$

$$(5):\quad c_2^2=\frac{p}{2EI}l^2+c_1^1 l$$

Παρατήρηση: Εν γένει για τη λύση τέτοιων συστημάτων εξισώσεων είναι σκόπιμο να εκφράζονται όλες οι σταθερές συναρτήσει μίας επιλεγμένης.

Συνδυάζοντας τις εξ. (2) και (5) λαμβάνουμε:

$$\frac{p}{2EI}l^2+c_1^1 l=-\frac{p}{2EI}l^2-c_1^2 l \Rightarrow$$

$$(6):\quad c_1^2=-\frac{p}{EI}l-c_1^1$$

ενώ οι (3) και (4) δίνουν:

$$(7):\quad c_1^2 = c_1^1 - \frac{2}{8}\frac{p}{EI}l$$

Προσθέτοντας την (6) με την (7) υπολογίζουμε:

$$\boxed{c_1^2 = -\frac{5}{8}\frac{p}{EI}l}$$

και:

$$\boxed{c_1^1 = -\frac{3}{8}\frac{p}{EI}l}$$

Συνεπώς:

$$\boxed{c_3^1 = \frac{1}{48}\frac{p}{EI}l^3}$$

$$\boxed{c_2^2 = \frac{1}{8}\frac{p}{EI}l^2}$$

$$\boxed{c_4^1 = c_2^1 = c_3^2 = c_4^2 = 0}$$

Με βάση τις ανωτέρω σταθερές μπορούμε να υπολογίσουμε την ελαστική γραμμλη της δοκού:

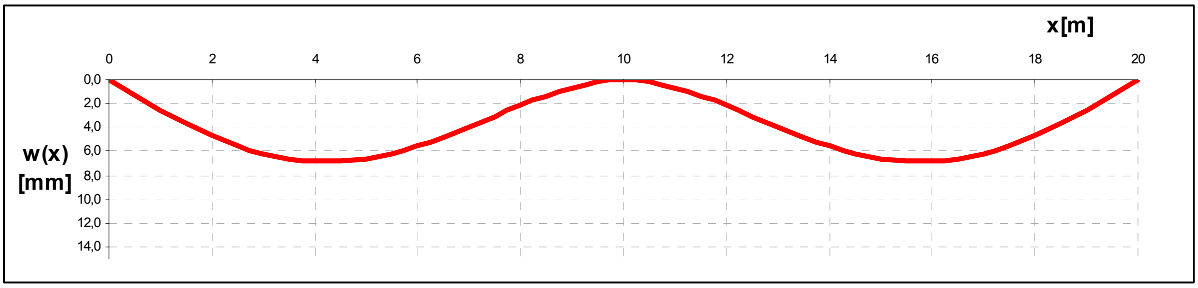
Για τα $x \in [0,l]$: $w(x) = w_1(x) = \frac{p}{EI}\left(\frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{16}lx^3 + \frac{1}{48}l^3x\right)$

Για τα $x \in [l,2l]$: $w(x) = w_2(x-l) = \frac{p}{EI}\left(\frac{1}{24}(x-l)^4 - \frac{5}{48}l(x-l)^3 + \frac{1}{16}l^2(x-l)^2\right)$

Εισάγοντας την αδιάστατη ποσότητα: $\xi = \frac{x}{l}$ οι παραπάνω εξισώσεις μετασχηματίζονται στις:

Για $\xi \in [0,1]$: $w(\xi) = \frac{pl^4}{EI}\left(\frac{1}{24}\xi^4 - \frac{1}{16}\xi^3 + \frac{1}{48}\xi\right)$

Για $\xi \in [1,2]$: $w(\xi) = \frac{pl^4}{EI}\left(\frac{1}{24}(\xi-1)^4 - \frac{5}{48}(\xi-1)^3 + \frac{1}{16}(\xi-1)^2\right)$



Παρατήρηση: Η συμμετρία του προβλήματος (συμμετρική γεωμετρία, φόρτιση και μηχανικά χαρακτηριστικά) οδηγεί σε συμμετρική λύση w(x). Αυτού του είδους η συμμετρία θα μπορούσε να βοηθήσει δραστικά στη μείωση των απαιτούμενων υπολογισμών, και αυτό γιατί θα μπορούσαμε να λύσουμε τη διαφορική εξίσωση ενός μόνο από τα δύο τμήματα της δοκού επιβάλλοντας παράλληλα μηδενική στροφή στο μέσον Β (w'(l)=0).

Επιπλέον λαμβάνουμε:

Για $\xi \in [0,1]$: $w'(\xi) = w_1'(\xi) = \frac{pl^3}{EI}\left(\frac{1}{6}\xi^3 - \frac{3}{16}\xi^2 + \frac{1}{48}\right)$

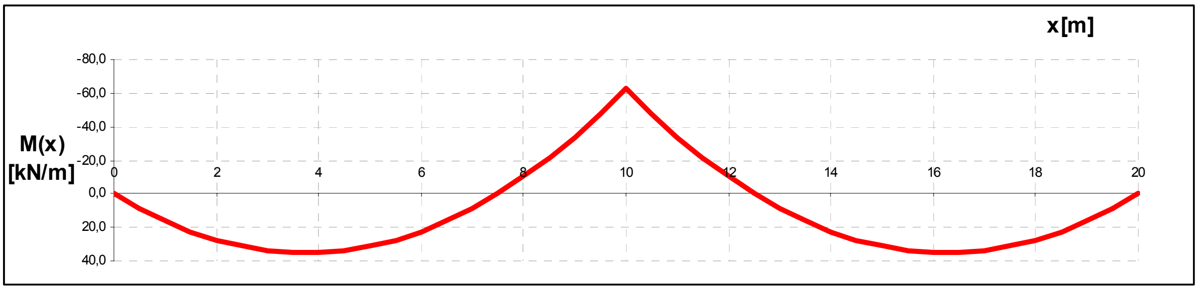
$$M(\xi) = -EIw''(\xi) = -EIw_1''(\xi) = -pl^2\left(\frac{1}{2}\xi^2 - \frac{3}{8}\xi\right)$$

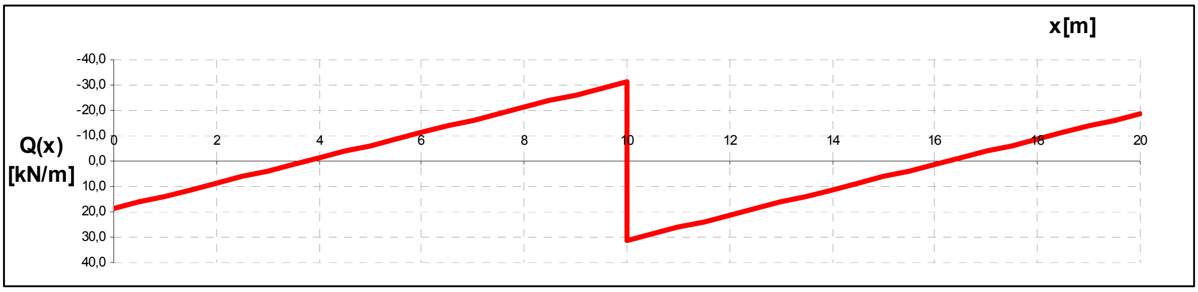
$$Q(\xi) = -EIw^{(3)}(\xi) = -EIw_1^{(3)}(\xi) = -pl\left(\xi - \frac{3}{8}\right)$$

Για $\xi \in [1,2]$: $w'(\xi) = w_2'(\xi-1) = \frac{pl^3}{EI}\left(\frac{1}{6}(\xi-1)^3 - \frac{5}{16}(\xi-1)^2 + \frac{1}{8}(\xi-1)\right)$

$$M(\xi) = -EIw''(\xi) = -EIw_2''(\xi-1) = -pl^2\left(\frac{1}{2}(\xi-1)^2 - \frac{5}{8}(\xi-1) + \frac{1}{8}\right)$$

$$Q(\xi) = -EIw^{(3)}(\xi) = -EIw_2^{(3)}(\xi-1) = -pl\left(\xi - \frac{13}{8}\right)$$





Η μέγιστη βύθιση υπολογίζεται ως εξής:

$$w'\left(x_{\max}\right)=0\overset{sym}{\Rightarrow}w_1'\left(x_{\max}\right)=0\Rightarrow\frac{p}{EI}\left(\frac{1}{6}x_{\max}{}^3-\frac{3}{16}lx_{\max}{}^2+\frac{1}{48}l^3\right)=0\Rightarrow 8x_{\max}{}^3-9lx_{\max}{}^2+l^3=0$$

$$8x_{\max}{}^3-8lx_{\max}{}^2-lx_{\max}{}^2+l^3=0\Rightarrow 8x_{\max}{}^2\left(x_{\max}-l\right)-l\left(x_{\max}{}^2-l^2\right)=0\Rightarrow$$

$$8x_{\max}{}^2\left(x_{\max}-l\right)-l\left(x_{\max}-l\right)\left(x_{\max}+l\right)=0\Rightarrow\left(8x_{\max}{}^2-lx_{\max}-l^2\right)\left(x_{\max}-l\right)=0$$

$$\Rightarrow\left(x_{\max}-\frac{1+\sqrt{33}}{16}l\right)\left(x_{\max}-\frac{1-\sqrt{33}}{16}l\right)\left(x_{\max}-l\right)=0$$

Δεδομένου ότι $x_{\max}\in[0,l]$:

$$x_{\max}=\frac{1+\sqrt{33}}{16}l\simeq 0,42l$$

Προφανώς το $x_{\max}$ αντιστοιχεί σε τοπικό μέγιστο[2].

Συνεπώς η δοκός εμφανίζει σε δύο σημεία μέγιστο βέλος κάμψης (συμμετρία). Αυτά είναι τα: $x_{\max}\simeq 0,42l$ και $x_{\max}\simeq 2l-0,42l=1,58l$

Σχετικά με τη μέγιστη και ελάχιστη τιμή της ροπής *M* έχουμε:

Για $x_{M_{\max}}\in[0,l]$

$$\left.\frac{dM}{dx}\right|_{x_{M_{\max}}}\simeq 0\Rightarrow Q\left(x_{M_{\max}}\right)=0\Rightarrow p\left(x_{M_{\max}}-\frac{3}{8}l\right)\Rightarrow x_{M_{\max}}=\frac{3}{8}l\simeq 0,38l$$

Είναι επίσης προφανές ότι η θέση $x_{M_{\max}}$ αντιστοιχεί σε τοπικό μέγιστο[3].

---

[2] $w''\left(x_m\right)=\frac{p}{EI}\left(\frac{1}{2}x_m{}^2-\frac{3}{8}lx_m\right)=\frac{p}{EI}\left(\frac{1}{2}0,18l^2-\frac{3}{8}0,42l^2\right)=\frac{p}{EI}\left(0,09l^2-0,16l^2\right)=-0,07\frac{pl^2}{EI}<0$

Οπότε:

$$M\left(x_{M_{\max}}\right) = -p\left(\frac{1}{2}\left(\frac{3}{8}l\right)^2 - \left(\frac{3}{8}l\right)^2\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{8}l\right)^2 p = \frac{9}{128}pl^2$$

και:

$$M\left(x_{M_{\min}}\right) = M\left(l\right) = -p\left(\frac{1}{2}l^2 - \frac{3}{8}l^2\right) = \underline{-\frac{1}{8}pl^2}\Big|$$

Ισορροπία στο σημείο A δίνει:

$$\left(\downarrow\right)\Sigma F_y = 0 \Rightarrow -V_A + Q\left(0\right) = 0 \Rightarrow V_A = Q\left(0\right) = +\frac{3}{8}pl$$

ενώ στο σημείο C:

$$\left(\downarrow\right)\Sigma F_y = 0 \Rightarrow -V_C - Q\left(2l\right) = 0 \Rightarrow V_C = -Q\left(2l\right) = -\left(-p\left(2l - \frac{13}{8}l\right)\right) = +\frac{3}{8}pl$$

Ισορροπία στο B δίνει:

$$\left(\downarrow\right)\Sigma F_y = 0 \Rightarrow -V_B + Q\left(l^+\right) - Q\left(l^-\right) = 0 \Rightarrow$$
$$V_B = \left(-p\left(l - \frac{13}{8}l\right)\right) - \left(-p\left(l - \frac{3}{8}l\right)\right) = p\frac{5}{8}l + p\frac{5}{8}l = \frac{5}{4}pl$$

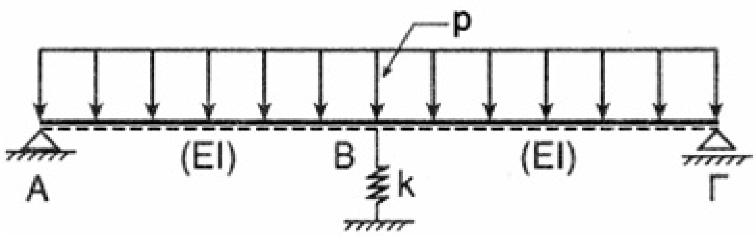
Ελέγχουμε ότι: $V_A = V_C$ και $V_A + V_B + V_C = 2pl$.

Παρατήρηση: Τα αποτελέσματα των υπολογισμών μας πρέπει πάντα να επαληθεύονται είτε ακολουθώντας διαφορετικούς τρόπους επίλυσης, είτε εκτελώντας πειράματα. Συγχρόνως πρέπει πάντοτε να συμφωνεί και η «διαίσθησή» μας με τα εξαγόμενα αποτελέσματα και για αυτό το λόγο απαιτείται η καλλιέργεια της. Δυστυχώς οι συνέπειες ενός υπολογιστικού λάθους δύναται να είναι ολέθριο. Τα παραδείγματα είναι πολυάριθμα…

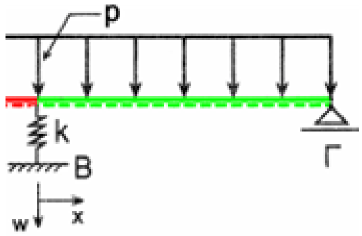
---

[3] $\frac{d^2M}{dx^2} \simeq -p < 0$

Εκδοχή 2: Ύπαρξη μεσαίας ενδόσιμης στήριξης



Εικόνα 4. Το προκύπτον στατικό μοντέλο από την αντικατάσταση της μεσαίας ακλόνητης στήριξης με ελατήριο (ενδόσιμη στήριξη). Με αυτό τον τρόπο είθισται να λαμβάνεται υπόψη στις κατασκευές η συμπεριφορά του εδάφους.



Εικόνα 5. Το υπό μελέτη τμήμα της δοκού εκμεταλλευόμενοι τη συμμετρία του προβλήματος.

Εν προκειμένω θα εκμεταλλευτούμε τη συμμετρία του προβλήματος:

Συνοριακές συνθήκες:

$$\begin{aligned} BC1 &: \quad w'(0)=0 \\ BC2 &: \quad Q(0)=0,5kw(0) \\ BC3 &: \quad w(l)=0 \\ BC4 &: \quad M(l)=0 \end{aligned}$$

Από την *BC1* λαμβάνουμε ότι: $c_3 = 0$
Ενώ από τη *BC2*:

$$Q(0) = -EIw^{(3)}(0) = -EIc_1 = kw(0) \Rightarrow c_1 = -\frac{0,5k}{EI}c_4$$

Θέτοντας $k^* \equiv \dfrac{0,5k}{EI}$ προκύπτει ότι: $c_1 = -k^* c_4$

Η *BC4* δίνει:

$$-EIw''(l) = 0 \Rightarrow c_2 = -\frac{p}{2EI}l^2 + k^* c_4 l$$

και τελικά η *BC3*:

$$w(l)=0 \Rightarrow \frac{p}{24EI}l^4-\frac{1}{6}k^*c_4l^3+\frac{1}{2}c_2l^2+c_4=0 \Rightarrow$$

$$\frac{p}{EI}l^4+c_4\left(24-4k^*l^3\right)+12c_2l^2=0$$

Αντικαθιστώντας τη σταθερά c_2 στην παραπάνω εξίσωση λαμβάνουμε:

$$\frac{p}{EI}l^4+c_4\left(24-4k^*l^3\right)+12l^2\left(-\frac{p}{2EI}l^2+k^*c_4l\right)=0 \Rightarrow$$

$$-5\frac{p}{EI}l^4+8c_4\left(3+l^3k^*\right)=0 \Rightarrow c_4=\frac{5}{8}\frac{p}{EI}l^4\frac{1}{\left(3+l^3k^*\right)}$$

Έτσι:

$$c_1=-\frac{5}{8}\frac{p}{EI}l^4\frac{k^*}{\left(3+l^3k^*\right)}$$

και

$$c_2=\frac{1}{2}\frac{p}{EI}l^2\left(\frac{5}{4}\frac{l^3k^*}{\left(3+l^3k^*\right)}-1\right)$$

Έχοντας πλέον προσδιορίσει όλες τις άγνωστες σταθερές του προβλήματος μπορούμε να εκφράσουμε αναλυτικά την εξίσωση της ελαστικής γραμμής της δοκού:

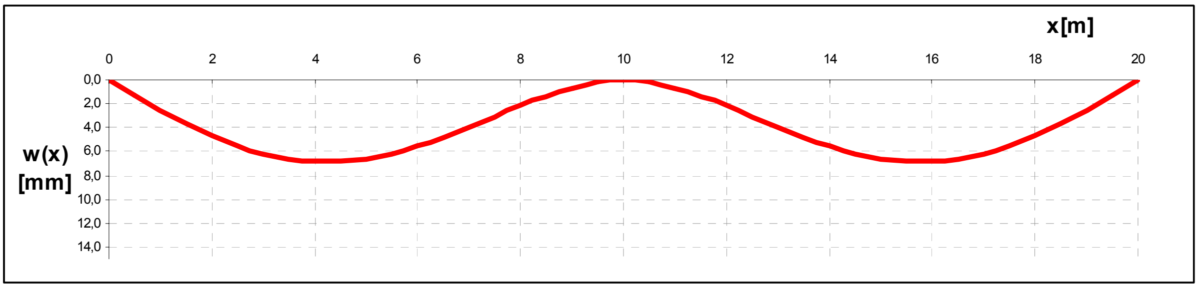
$$\begin{aligned}w(x)&=\frac{p}{24EI}x^4-\frac{5}{48}\frac{p}{EI}l^4\frac{k^*}{\left(3+l^3k^*\right)}x^3-\frac{1}{4}\frac{p}{EI}l^2x^2+\frac{5}{16}\frac{p}{EI}\frac{l^5k^*}{\left(3+l^3k^*\right)}x^2+\frac{5}{8}\frac{p}{EI}l^4\frac{1}{\left(3+l^3k^*\right)}=\\&=\frac{p}{24EI}x^4-\frac{1}{4}\frac{p}{EI}l^2x^2+\frac{5}{48}\frac{k^*}{\left(3+l^3k^*\right)}\frac{pl^4}{EI}\left(-x^3+3lx^2+\frac{6}{k^*}\right)=\\&=\frac{p}{48EI}\left[2x^4-12l^2x^2+5l^4\frac{k^*}{\left(3+l^3k^*\right)}\left(-x^3+3lx^2+\frac{6}{k^*}\right)\right]\end{aligned}$$

Εισάγοντας την αδιάστατη ποσότητα: $\xi=\dfrac{x}{l}$ η ανωτέρω εξισώσεις λαμβάνουν τη μορφή:

$$w(\xi)=\frac{pl^4}{48EI}\left[2\xi^4-12\xi^2+\frac{5k^*l^3}{\left(3+l^3k^*\right)}\left(-\xi^3+3\xi^2\right)+\frac{30}{\left(3+l^3k^*\right)}\right]$$

- Εάν $k^* \to +\infty$ τότε:

$$\lim_{k\to\infty} w(\xi) = \frac{pl^4}{48EI}\left[2\xi^4 - 12\xi^2 + 5\left(-\xi^3 + 3\xi^2\right)\right] = \frac{pl^4}{EI}\left(\frac{1}{24}\xi^4 - \frac{5}{48}\xi^3 + \frac{1}{16}\xi^2\right)$$



($k^* \to +\infty$)

Επαληθεύουμε ότι αυτή η εξίσωση ταυτίζεται με εκείνη στην οποία είχαμε καταλήξει στην περίπτωση ακλόνητης στήριξης.

- Εάν $k^* = 0$ τότε:

$$w(\xi) = \frac{pl^4}{48EI}\left(2\xi^4 - 12\xi^2 + 10\right) = \frac{pl^4}{EI}\left(\frac{1}{24}\xi^4 - \frac{1}{4}\xi^2 + \frac{5}{24}\right)$$

και,

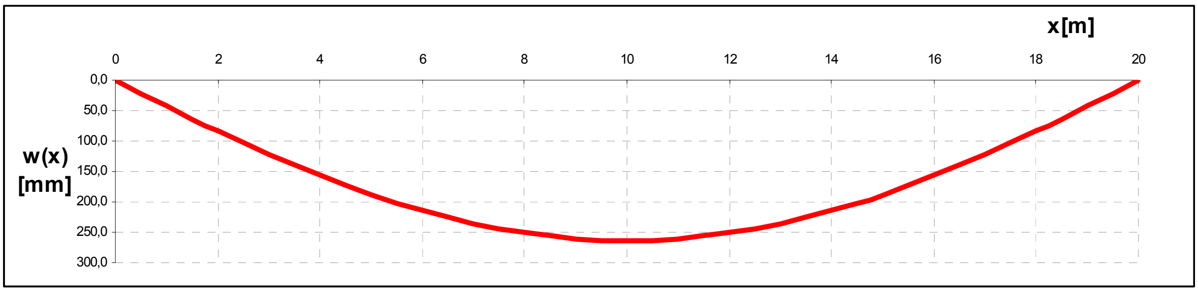
$$M(x) = -EIw''(x) = -\frac{1}{2}px^2 + \frac{1}{2}pl^2 = \frac{1}{2}p\left(l^2 - x^2\right)$$

Μετασχηματίζοντας της συντεταγμένες με $\overline{x} = x + l$ λαμβάνουμε:

$$M(\overline{x}) \equiv M(\overline{x} - l) = -EIw''(\overline{x} - l) = \frac{1}{2}p\left(l^2 - (\overline{x} - l)^2\right) = \frac{1}{2}p\overline{x}(2l - \overline{x}) = \frac{1}{2}p\overline{x}(L - \overline{x})$$

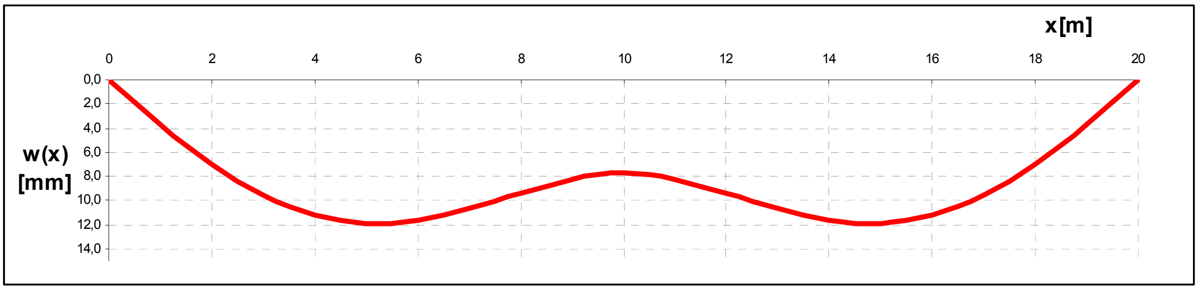
Και υπολογίζουμε τη ροπή στο μέσον της δοκού ίση με:

$$M\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{1}{2}p\frac{L}{2}\left(L - \frac{L}{2}\right) = p\frac{L^2}{8}$$,που είναι και η αναμενόμενη τιμή.



($k^* = 0$)

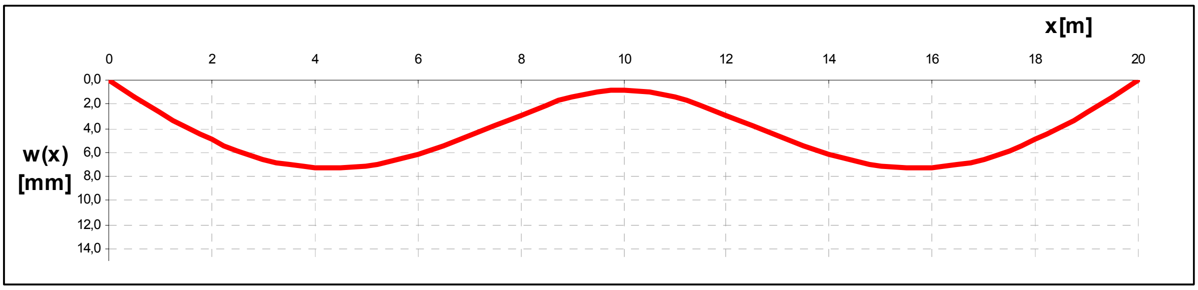
- Εάν $k^* = 0{,}1$ τότε:



($k^* = 0{,}1$)

- Εάν $k^* = 1$ τότε:

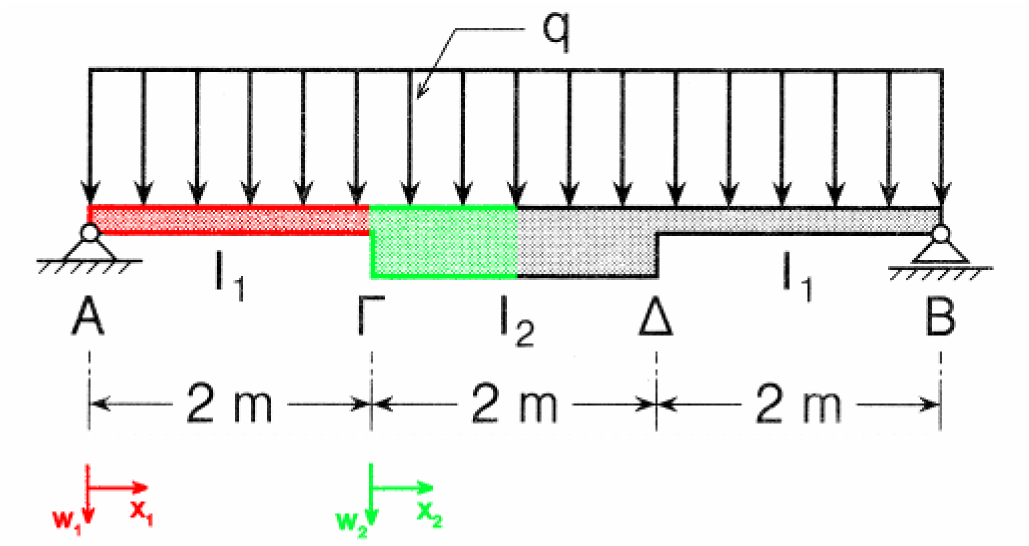
$$w(\xi) = \frac{pl^4}{48EI}\left[2\xi^4 - 12\xi^2 + \frac{5l^3}{\left(3+l^3\right)}\left(-\xi^3 + 3\xi^2\right) + \frac{30}{\left(3+l^3\right)}\right]$$



($k^* = 1$)

Η ενισχυμένη δοκός

(άσκ.4 σελ.162 ΤΜ2)



Εικόνα 6. Το στατικό μοντέλο της ενισχυμένης στο μέσον δοκού. Για υπολογιστικούς λόγους, θα εκμεταλλευτούμε τη συμμετρία του προβλήματος.

Εκτός του ότι το πρόβλημα είναι συμμετρικό, παρατηρούμε ότι ο φορέας είναι ισοστατικός, πράγμα που σημαίνει ότι το διάγραμμα των εντατικών μεγεθών είναι εκ των προτέρων γνωστό. Αυτές οι δύο παρατηρήσεις, δηλαδή η **συμμετρία** και η **ισοστατικότητα** του φορέα θα μας βοηθήσουν ιδιαίτερα στους υπολογισμούς.

Αναλυτικότερα:

$$M(x)=\frac{1}{2}qx(L-x)=-\frac{1}{2}qx^2+\frac{1}{2}qxL=-\frac{1}{2}qx^2+\frac{3}{2}qxl$$

,όπου $L=3l$=6m

Όμως,

- Για $x\in[0,l]$

$$M(x)=-EI_1w_1''(x)\Rightarrow w_1''(x)=-\frac{1}{EI_1}M(x)\Rightarrow$$

$$w_1'(x)=-\frac{1}{EI_1}\int M(x)\,dx=\frac{q}{12EI_1}\left(2x^3-9x^2l\right)+c_1\Rightarrow$$

$$w_1(x)=\int w_1'(x)\,dx=\frac{q}{12EI_1}\left(\frac{1}{2}x^4-3x^3l\right)+c_1x+c_2$$

Από τη στήριξη στο άκρο της δοκού ισχύει $w_1(0)=0$ και συνεπώς λαμβάνουμε:

$$c_2=0$$

$$w_1'(l) = -\frac{7ql^3}{12EI_1} + c_1 \Rightarrow$$
$$w_1(l) = -\frac{5ql^4}{24EI_1} + c_1 l$$

- Για $x \in [l, 2l]$

$$w_2'(x) = \frac{q}{12EI_2}\left(2x^3 - 9x^2 l\right) + c_3 \Rightarrow$$
$$w_2(x) = \frac{q}{12EI_2}\left(\frac{1}{2}x^4 - 3x^3 l\right) + c_3 x + c_4$$

$$w_2'(l) = -\frac{7ql^3}{12EI_2} + c_3 \Rightarrow$$
$$w_2(l) = -\frac{5ql^4}{24EI_2} + c_3 l + c_4$$

Η συμμετρία του προβλήματος επιβάλει[4]:

$$w_2'\left(\frac{3l}{2}\right) = 0 \Rightarrow$$
$$-\frac{27}{24}\frac{ql^3}{EI_2} + c_3 = 0 \Rightarrow c_3 = \frac{1}{a}\frac{27}{24}\frac{ql^3}{EI_1}$$

Απαιτώντας τη συνέχεια της δοκού στο $x = l$ λαμβάνουμε:

$$w_1'(l) = w_2'(l) \Rightarrow$$
$$-\frac{7ql^3}{12EI_1} + c_1 = -\frac{1}{a}\frac{7ql^3}{12EI_1} + \frac{1}{a}\frac{27}{24}\frac{ql^3}{EI_1} \Rightarrow$$
$$c_1 = \frac{ql^3}{24EI_1}\left(14 + \frac{13}{a}\right)$$

[4] Στο ίδιο αποτέλεσμα θα καταλήγαμε εάν: $w_2'(2l) = -w_1'(l) \Rightarrow c_1 + c_3 = \frac{7ql^3}{12EI_1} + \frac{1}{a}\frac{20ql^3}{12EI_1}$

Επίσης:

$$w_1(l) = w_2(l) \Rightarrow$$
$$-\frac{5ql^4}{24EI_1} + c_1 l = -\frac{1}{a}\frac{5ql^4}{24EI_1} + c_3 l + c_4 \Rightarrow$$
$$c_4 = (c_1 - c_3)l - \left(1 - \frac{1}{a}\right)\frac{5ql^4}{24EI_1} \Rightarrow$$
$$c_4 = \left(1 - \frac{1}{a}\right)\frac{14ql^4}{24EI_1} - \left(1 - \frac{1}{a}\right)\frac{5ql^4}{24EI_1} \Rightarrow$$

$$c_4 = \left(1 - \frac{1}{a}\right)\frac{9ql^4}{24EI_1}$$

Επομένως,

Για $x \in [0, l]$

$$w_1'(x) = \frac{qx^2}{12EI_1}(2x - 9l) + \frac{ql^3}{24EI_1}\left(14 + \frac{13}{a}\right)$$
$$w_1(x) = \frac{q}{12EI_1}\left(\frac{1}{2}x^4 - 3x^3 l\right) + \frac{ql^3}{24EI_1}\left(14 + \frac{13}{a}\right)x$$

και για $x \in [l, 2l]$

$$w_2'(x) = \frac{q}{12EI_2}\left(2x^3 - 9x^2 l\right) + \frac{1}{a}\frac{27ql^3}{24EI_1} \Rightarrow$$
$$w_2(x) = \frac{q}{12EI_2}\left(\frac{1}{2}x^4 - 3x^3 l\right) + \frac{1}{a}\frac{27ql^3}{24EI_1}x + \left(1 - \frac{1}{a}\right)\frac{9ql^4}{24EI_1}$$

Εισάγοντας την αδιάστατη ποσότητα: $\xi = \dfrac{x}{l}$ οι ανωτέρω εξισώσεις γίνονται:

Για $\xi \in [0,1]$

$$w_1(\xi) = \frac{ql^4}{12E\,I_1}\left(\frac{1}{2}\xi^4 - 3\xi^3\right) + \frac{ql^4}{24E\,I_1}\left(14 + \frac{13}{a}\right)\xi$$

και για $\xi \in [1,2]$

$$w_2(\xi) = \frac{ql^4}{12E\,I_2}\left(\frac{1}{2}\xi^4 - 3\xi^3\right) + \frac{1}{a}\frac{27ql^4}{24E\,I_1}\xi + \left(1 - \frac{1}{a}\right)\frac{9ql^4}{24E\,I_1}$$