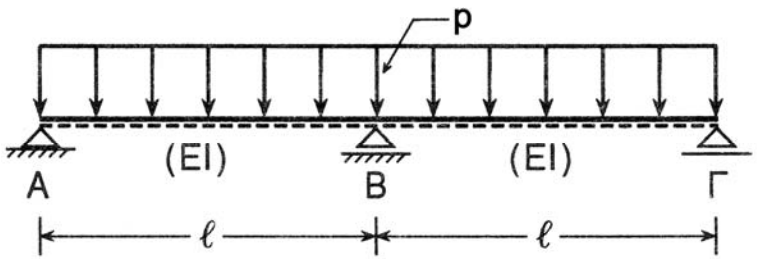
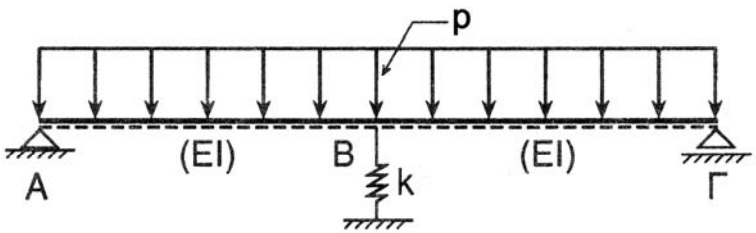
**Πρόβλημα**:

Να υπολογιστεί η **ελαστική γραμμή** και τα εντατικά μεγέθη των φορέων…




Οι φορείς αυτοί θα μπορούσαν να αποτελούν τα **στατικά μοντέλα** μίας γέφυρας.

Το ελατήριο προσομοιώνει τη βύθιση του μεσαίου βάθρού λόγω **καθίζησης** του εδάφους.



# Γενικές εξισώσεις

$$\left.\begin{aligned} M(x) &= -EIw''(x) \\ \frac{dM(x)}{dx} &= Q(x) \\ \frac{dQ(x)}{dx} &= -p(x) \end{aligned}\right\} \overset{EI=const(x)}{\Rightarrow} EIw^{(4)}(x) = p(x) \overset{p(x)=const(x)}{\Rightarrow} \begin{cases} w^{(3)}(x) = \dfrac{p}{EI}x + c_1 \\ w''(x) = \dfrac{p}{2EI}x^2 + c_1 x + c_2 \\ w'(x) = \dfrac{p}{6EI}x^3 + \dfrac{1}{2}c_1 x^2 + c_2 x + c_3 \\ w(x) = \dfrac{p}{24EI}x^4 + \dfrac{1}{6}c_1 x^3 + \dfrac{1}{2}c_2 x^2 + c_3 x + c_4 \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι η γενική έκφραση του προβλήματος της ελαστικής γραμμής περιλαμβάνει **4 άγνωστες σταθερές** τις οποίες πρέπει να προσδιορίσουμε χρησιμοποιώντας τις **συνοριακές συνθήκες** του προβλήματος.

# Συνοριακές συνθήκες (ακλόνητη μεσαία στήριξη)

Για να λύσουμε το πρόβλημα θα χωρίσουμε το φορέα σε **δύο τμήματα** και θα επιλύσουμε τις διαφορικές εξισώσεις για κάθε ένα τμήμα.

Συνεπώς θα πρέπει να προσδιορίσουμε 8 (=2x4) σταθερές και άρα χρειαζόμαστε **8 συνοριακές συνθήκες**.

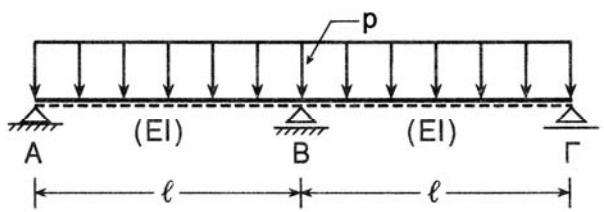
Αυτές θα προκύψουν από τις **στηρίξεις** της δοκού:

$$BC1: \quad w_1(0) = 0$$
$$BC2: \quad w_1(l) = 0$$
$$BC3: \quad M_1(0) = 0$$

$$BC4: \quad w_2(0) = 0$$
$$BC5: \quad w_2(l) = 0$$
$$BC6: \quad M_2(l) = 0$$

και απαιτώντας τη **συνέχεια** στο μέσον αυτής:

$$BC7: \quad w_1'(l) = w_2'(0)$$
$$BC8: \quad M_1(l) = M_2(0)$$



Μετά από πράξεις καταλήγουμε:

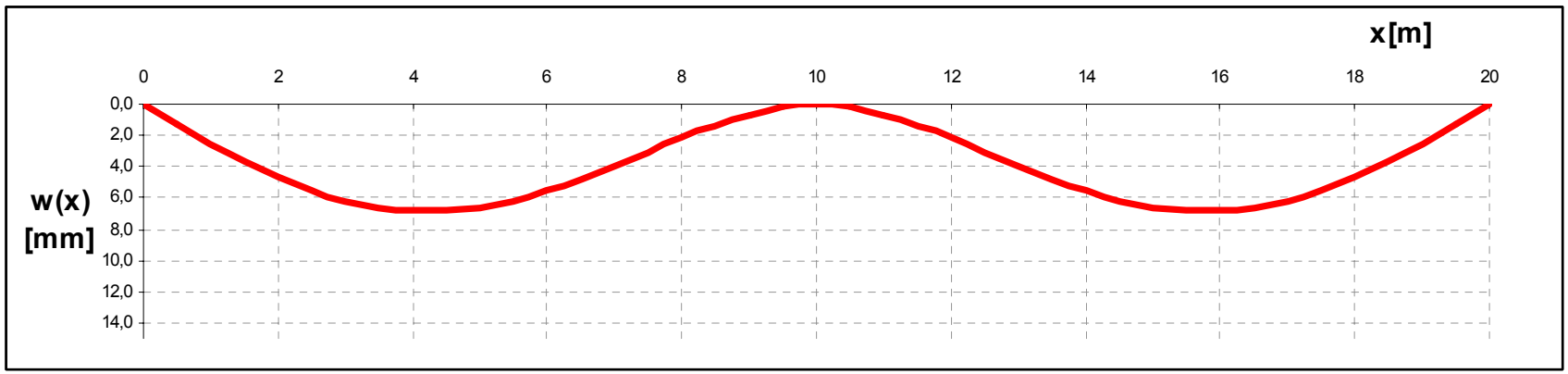
για $x \in [0, l]$

$$w(x) = w_1(x) = \frac{p}{EI}\left(\frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{16}lx^3 + \frac{1}{48}l^3 x\right)$$

και για $x \in [l, 2l]$

$$w(x) = w_2(x-l) = \frac{p}{EI}\left(\frac{1}{24}(x-l)^4 - \frac{5}{48}l(x-l)^3 + \frac{1}{16}l^2(x-l)^2\right)$$

Εάν p = 5kN/m (0,5tn/m), E=220GPa, I=0,0002m$^4$ τότε η ελαστική γραμμή είναι:

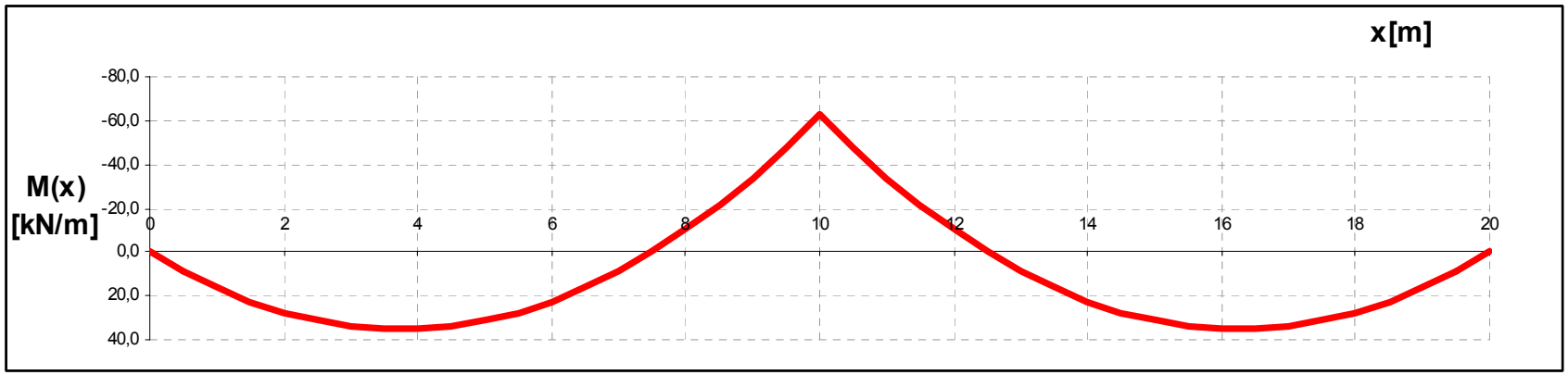



Παρατηρούμε ότι:

- Η **συμμετρία** του προβλήματος επιβάλει μηδενική στροφή στο μέσον της δοκού *w'=0*

- Το βέλος κάμψης είναι της τάξεως μόνο μερικών χιλιοστών (**mm**) για άνοιγμα 10m!

Έχοντας υπολογίσει την ελαστική γραμμή μπορούμε να υπολογίσουμε κάθε μέγεθος της δοκού.

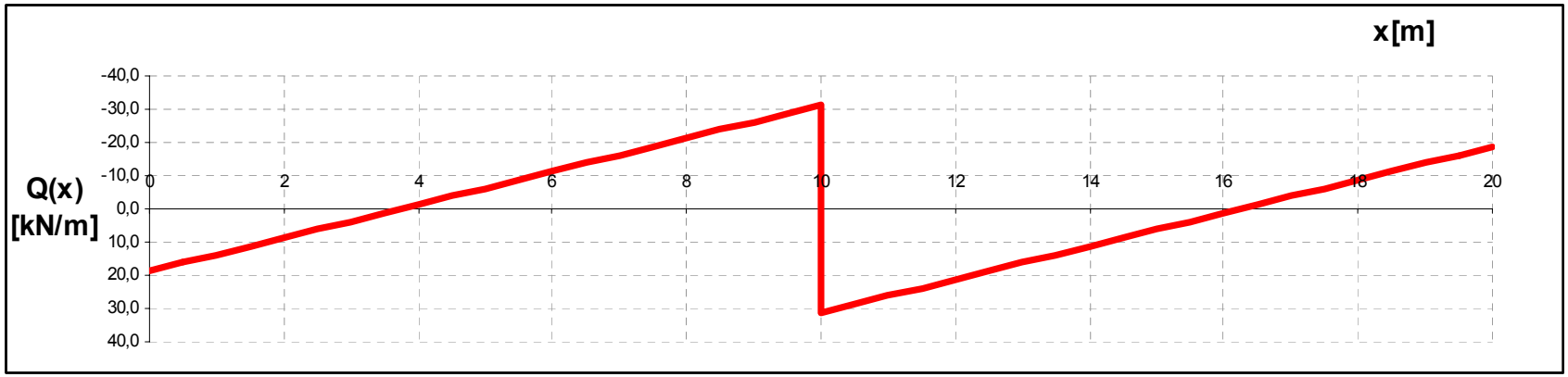



Σημειώνουμε ότι η ροπή M είναι αποτέλεσμα της εξωτερικής φόρτισης p και **δεν εξαρτάται** από το **EI** όταν αυτό παραμένει **σταθερό** συναρτήσει του x.

Τα σημεία που παρουσιάζουν τη μέγιστη (θετική) ροπή είναι τα: $x_m \simeq 0,42l$ και $x_m \simeq 1,58l$

ενώ $M\left(x_{M_{\max}}\right) = \frac{9}{128} pl^2$

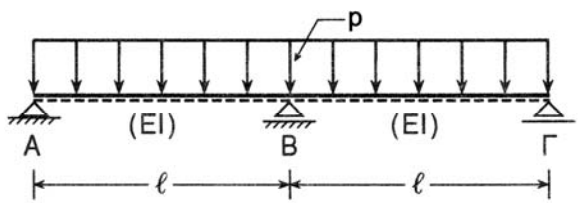
Η ελάχιστη (αρνητική) ροπή υπολογίζεται στο μέσον της δοκού και είναι ίση με: $M\left(x_{M_{\min}}\right) = -\frac{1}{8} pl^2$




Από την εξίσωση των διατμητικών δυνάμεων μπορούμε να υπολογίσουμε τις αντιδράσεις στις στηρίξεις της δοκού:

$$(\downarrow)\Sigma F_y = 0 \Rightarrow -V_B + Q(l^+) - Q(l^-) = 0 \Rightarrow \boxed{V_B = \frac{5}{4}pl}$$

$$(\downarrow)\Sigma F_y = 0 \Rightarrow -V_C - Q(2l) = 0 \Rightarrow \boxed{V_C = +\frac{3}{8}pl}$$




$$V_A + V_B + V_C = 2pl$$

# Συνοριακές συνθήκες (ελατήριο)

Αυτή τη φορά θα κάνουμε χρήση της συμμετρίας του προβλήματος για να ελαττώσουμε τις απαιτούμενες πράξεις!

Συνεπώς θα προσδιορίσουμε μόνο τις μισές σταθερές και άρα θα χρειαστούμε μόνο **4 συνοριακές συνθήκες**.

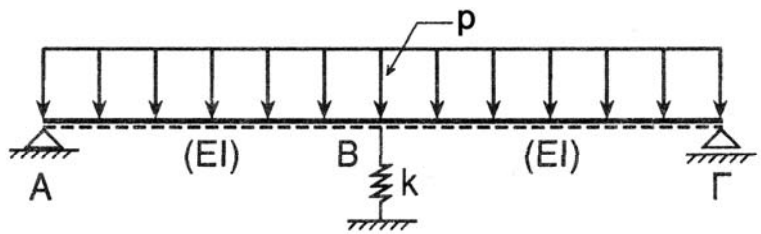
Επιλέγοντας το δεξί τμήμα ΒΓ της δοκού, οι ζητούμενες σταθερές θα προκύψουν από τις **στηρίξεις** της δοκού και τη **συμμετρία**:

$$BC1: \quad w'(0) = 0$$

$$BC2: \quad Q(0) = 0{,}5kw(0)$$

$$BC3: \quad w(l) = 0$$

$$BC4: \quad M(l) = 0$$

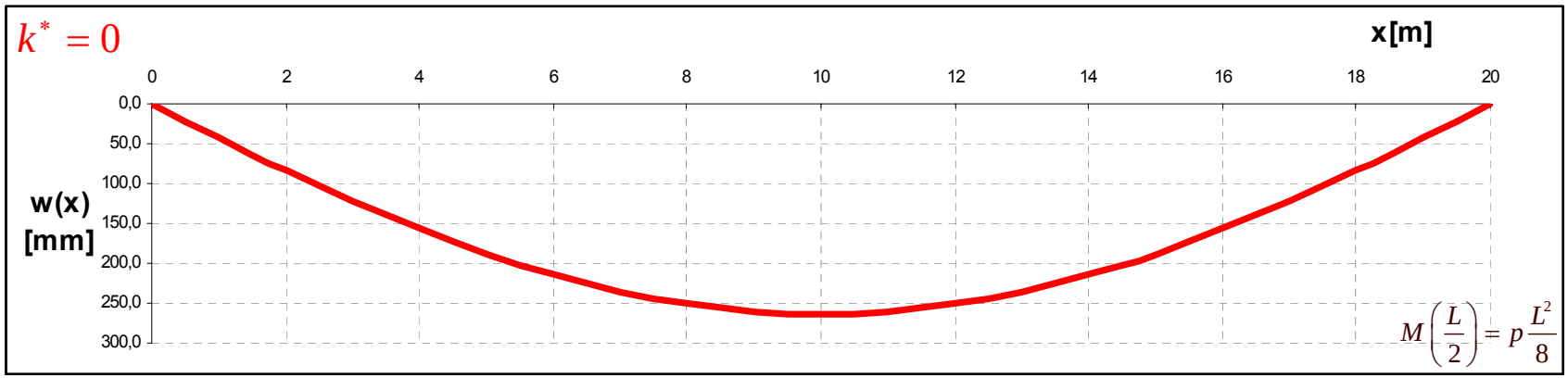


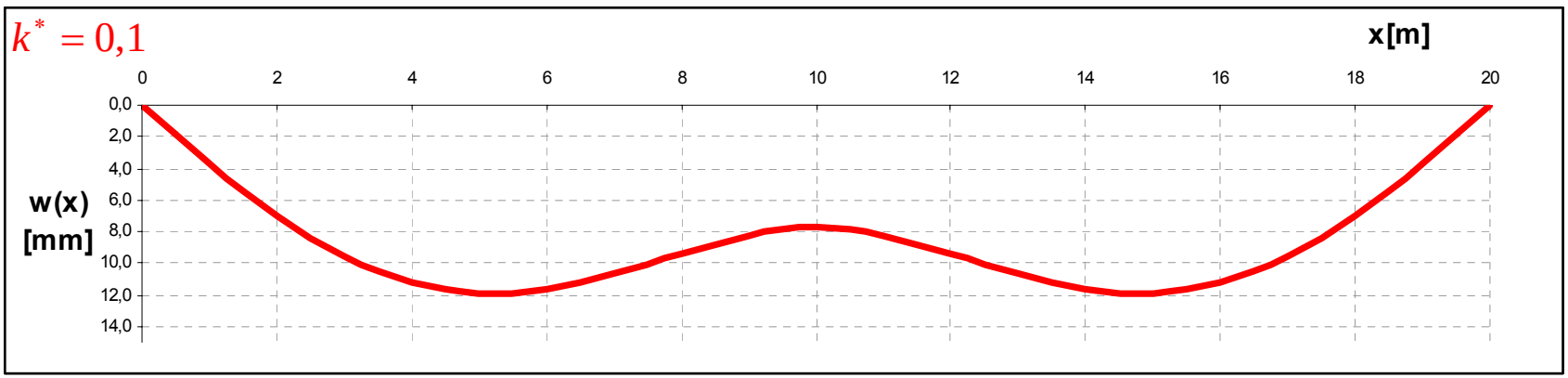
Μετά από πράξεις καταλήγουμε:

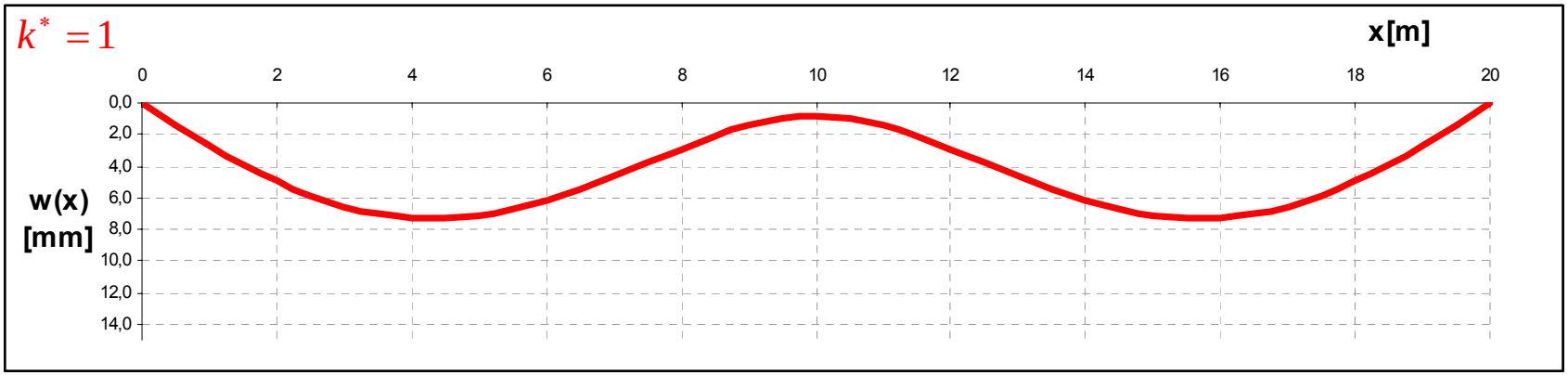
για $x \in [l, 2l]$

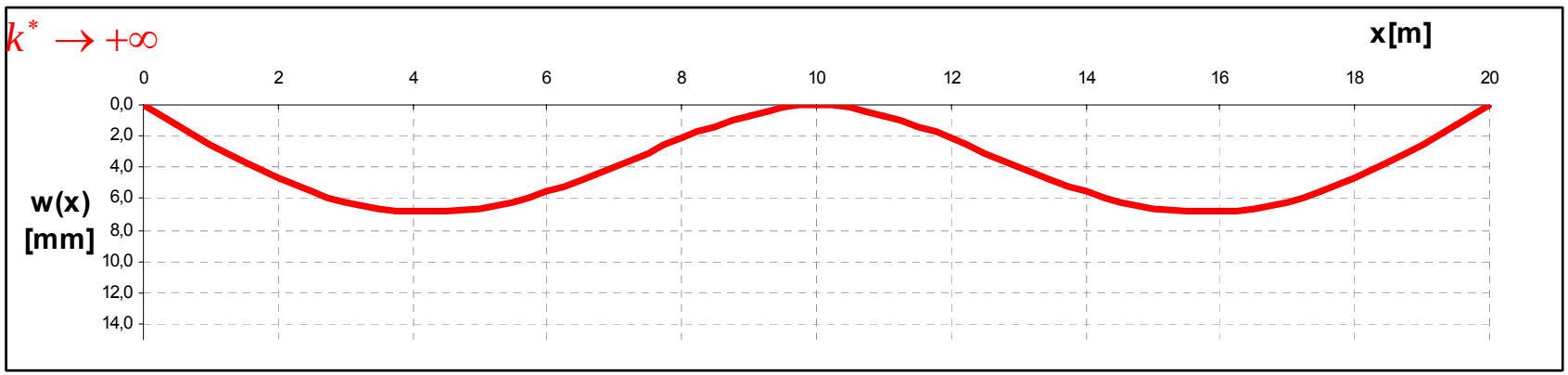
$$w(x) = \frac{p}{48EI}\left[2x^4 - 12l^2x^2 + 5l^4 \frac{k^*}{\left(3 + l^3k^*\right)}\left(-x^3 + 3lx^2 + \frac{6}{k^*}\right)\right]$$

όπου $k^* \equiv \dfrac{0,5k}{EI}$


$k^* = 0$
x[m]
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20
0,0
50,0
100,0
150,0
200,0
250,0
300,0
w(x)
[mm]
$M\left(\frac{L}{2}\right) = p\frac{L^2}{8}$


$k^* = 0,1$
x[m]
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20
0,0
2,0
4,0
6,0
8,0
10,0
12,0
14,0
w(x)
[mm]


$k^* = 1$
x[m]
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20
0,0
2,0
4,0
6,0
8,0
10,0
12,0
14,0
w(x)
[mm]


$k^* \to +\infty$
x[m]
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20
0,0
2,0
4,0
6,0
8,0
10,0
12,0
14,0
w(x)
[mm]