ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4$^{\text{Ο}}$ ΜΕΛΕΤΗ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑΣ ΚΑΙ ΣΥΓΚΛΙΣΗΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΟΥ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΥ ΤΟΥ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

1. ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΟΥ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΥ

1.1. Εισαγωγή

Έστω $\tilde{u}(x,t)=\tilde{u}(j\Delta x, n\Delta t)=\tilde{u}_j^n$ η ακριβής λύση ενός προβλήματος αρχικών και συνοριακών τιμών και u_j^n η λύση των εξισώσεων πεπερασμένων διαφορών. Το σφάλμα της προσέγγισης τότε είναι:

$$F(u)=\left|u_j^n-\tilde{u}_j^n\right| \tag{4.1}$$

Το σφάλμα της προσέγγισης μας ενδιαφέρει ως προς δύο σημεία:

α) Ποια είναι η συμπεριφορά του σφάλματος καθώς η αριθμητική παράμετρος n τείνει στο άπειρο για δεδομένα Δx, Δt ;
β) Ποια είναι η συμπεριφορά του σφάλματος καθώς ο αριθμητικός κάνναβος γίνεται λεπτότερος δηλαδή Δx, Δt τείνει στο 0 για δεδομένο n Δt ;

Η δεύτερη ερώτηση είναι πιο σημαντική για την προσέγγιση αφού σκοπός τέτοιων προσεγγίσεων είναι το σφάλμα στο όριο να πλησιάζει στο 0. Και για τις δύο ερωτήσεις ο αριθμός των χρονικών βημάτων τείνει στο άπειρο, το οποίο μπορεί να οδηγήσει σε απεριόριστη μεγέθυνση του σφάλματος.

Ερώτηση1: Για την απάντηση στα παραπάνω ερωτήματα για απλά προβλήματα, όπως η επίλυση της εξίσωσης θερμότητας σε ορθογωνικό χωρίο, στην αρχή υποθέτουμε την ύπαρξη ακριβούς λύσεως αλλά και τη δυνατότητα στην ακριβή λύση του διαχωρισμού των μεταβλητών. Υπό κατάλληλες προϋποθέσεις η ακριβής λύση μπορεί να γραφεί ως σειρά Fourier:

ΘΕΩΡΗΜΑ 1 [1]**:** Έστω η συνάρτηση u(x) και οι παράγωγοι της, οι οποίες είναι κατά τμήματα συνεχείς στο διάστημα [-π, π] και η u(x) περιοδική με περίοδο 2π. Τότε η u(x) μπορεί να γραφεί με μοναδικό τρόπο ως σειρά Fourier. Στη περίπτωση σημείου ασυνέχειας οι σχέσεις διαμορφώνονται ανάλογα. Σημείωση: Η προϋπόθεση της κατά τμήματα συνέχειας απαιτεί πεπερασμένο πλήθος σημείων ασυνέχειας και για την u(x) αλλά και για τις παραγώγους της.
Έστω το πρόβλημα αρχικών και συνοριακών τιμών:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=c\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{όπου } u=u(x,t), \tag{4.2α}$$

$$c>0, \qquad 0\le x\le \pi, \qquad t\ge 0 \tag{4.2β}$$

με

$$u(x,0)=\phi(x)=\begin{cases}\kappa x & 0\le x\le \dfrac{\pi}{2}\\ \kappa(\pi-x) & \dfrac{\pi}{2}\le x\le \pi\end{cases} \qquad (4.2\gamma)$$

$$u(0,t)=0 \quad \text{και} \quad u(\pi,t)=0$$

όπου κ σταθερά. Τότε αν θεωρήσουμε ότι η φ(x)= -φ(-x) για –π<x<0 η ακριβής λύση του προβλήματος μπορεί να γραφεί:

$$u(x,t)=\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{(m)} A_m \exp(imx-m^2ct) \qquad (4.3)$$

με

$$A_m=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\phi(x)\exp(-imx)dx=\begin{cases}0 & m=2\lambda,\quad \lambda\in N\\ \dfrac{2ic}{\pi m^2}(-1)^{(m+1)/2} & m=2\lambda+1,\quad \lambda\in N\end{cases} \qquad (4.4)$$

Η σχέση (4.3) είναι η γενικευμένη λύση του προβλήματος αρχικών και συνοριακών τιμών μόνο αν η σειρά Fourier για την φ(x) συγκλίνει απόλυτα. Δηλαδή προκειμένου να υπάρχει η ανάλυση της u(x) σε σειρές Fourier είναι απαραίτητο οι αρχικές συνθήκες να ικανοποιούν την ολοκλήρωση (4.4).
Στο σημείο αυτό παρουσιάζεται το σχήμα πεπερασμένων διαφορών που χρησιμοποιείται για τη αριθμητική λύση του προβλήματος αρχικών και συνοριακών τιμών:

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\Delta t}=c\frac{u_{j+1}^n-2u_j^n-u_{j-1}^n}{\Delta x} \qquad \begin{cases}j=1,2,...,J-1\\ n=0,1.....\end{cases} \qquad (4.5\alpha)$$

$$u_0^n=0,\ u_j^n=0, \qquad n=0,1 \qquad (4.5\beta)$$

$$u_j^0=\varphi(j\Delta x), \qquad j=0,1,....J \qquad (4.5\gamma)$$

Υποθέτουμε ότι μία μη πεπλεγμένη λύση των εξισώσεων πεπερασμένων διαφορών μπορεί να γραφεί ως σειρά Fourier. Έστω A, ρ και m σταθερές με m φυσικό:

$$u_j^n=A\rho^n e^{imj\Delta x} \qquad (4.6)$$

Αν η παραπάνω σχέση αντικατασταθεί στο σχήμα πεπερασμένων διαφορών (4.5α) τότε ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση (4.2α) αν:

$$\rho=\rho(m)=1-\frac{2c\Delta t}{(\Delta x)^2}\left(1-\cos(m\Delta x)\right) \qquad (4.7)$$

Αν η σταθερά Α πάρει κατάλληλες τιμές (4.4) τότε το άπειρο άθροισμα ή σειρά Fourier,

$$u_j^n=\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{(m)}A_m e^{imj\Delta x}\left[\rho(m)\right]^n \qquad (4.8)$$

είναι η ακριβής λύση του προβλήματος με τη μορφή των πεπερασμένων διαφορών (4.5(α-γ)), αφού:

(α) Η σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα γιατί συγκλίνει για τη φ(x) και η $\rho(m)$ είναι φραγμένη
(β) Κάθε όρος της σειράς ικανοποιεί την εξίσωση πεπερασμένων διαφορών, άρα και το άθροισμα
(γ) Για n=0 ανάγεται στη φ(jΔx) άρα ικανοποιούνται οι αρχικές συνθήκες του προβλήματος
(δ) Λόγω της ιδιότητας της u(x) να είναι περιττή ικανοποιούνται και οι συνοριακές συνθήκες.

Συγκρίνοντας την ακριβή λύση με αυτή που προκύπτει από το σχήμα πεπερασμένων διαφορών παρατηρούμε ότι διαφέρουν ως προς τον όρο που αφορά τη χρονική μεταβολή Δt. Στην ακριβή λύση ο συντελεστής απομείωσης με το χρόνο της u(x) είναι ίσος με exp($-m^2c$ Δt). Για την μη πεπλεγμένη του σχήματος πεπερασμένων διαφορών, μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι το ρ(m) αποτελεί το συντελεστή μεγέθυνσης ή απομείωσης της m αρμονικής για κάθε βήμα Δt.
Αν οι παραπάνω αναφερόμενοι συντελεστές αναλυθούν σε σειρές Taylor γύρω από το m^2c Δt=0 για την εκθετική σχέση και mΔx=0 για τη συνάρτηση του συνημίτονου, παρατηρούμε ότι συμφωνούν στους όρους πρώτης τάξεως:

$$\rho=\rho(m)=1-m^2c\Delta t+\tfrac{1}{12}m^4c\Delta t(\Delta x)^2 \qquad (4.9\alpha)$$

$$e^{-m^2c\Delta t}=1-m^2c\Delta t+\tfrac{1}{2}m^4c^2\Delta t^2 \qquad (4.9\beta)$$

Άρα για αρκετά μικρά Δx και Δt αλλά και m, η λύση του σχήματος πεπερασμένων διαφορών αποτελεί καλή προσέγγιση της λύσης της διαφορικής εξίσωσης.
Είναι όμως φανερό ότι για συγκεκριμένες απαιτήσεις ακρίβειας όλες οι αρμονικές πέρα από κάποια συγκεκριμένη τιμή, δηλαδή για αρκετά μεγάλες αρμονικές δηλαδή για $m>m_0$ είναι αποκλίνουσες από την ακριβή λύση αφού από τις σχέσεις (4.9α), (4.9β) η διαφορά στους όρους δευτέρας τάξεως γίνεται σημαντική για οποιαδήποτε Δx και Δt. Μπορούμε να τις αποκλείσουμε αυτές τις αρμονικές θέτοντας περιορισμό ως προς τη μεγέθυνση ρ σύμφωνα με βασική ιδιότητα των εκθετικών συναρτήσεων. Ορίζουμε λοιπόν ως συνθήκη ευστάθειας:

$$\mathrm{Max}_{(m)}\left|\rho(m)\right|\le 1 \qquad (4.10)$$

Αν η συνθήκη (4.10) ικανοποιείται καμία αρμονική του ρ δεν μεγεθύνεται. Η απάντηση λοιπόν στη πρώτη ερώτηση είναι ότι το σφάλμα προσέγγισης παραμένει φραγμένο αν ισχύει η συνθήκη ευστάθειας (4.10)[1].

Απόδειξη [1]:

Αρκεί να αποδείξουμε ότι τόσο η ακριβής λύση όσο και η λύση που προκύπτει από το σχήμα πεπερασμένων διαφορών είναι φραγμένες. Από τη σχέση (4.3), (4.4) και λόγω της απολύτου σύγκλισης της φ(x) η ακριβής λύση u(jΔx,nΔt) είναι φραγμένη καθώς t τείνει στο άπειρο. Όσον αφορά την αριθμητική λύση, αρκεί η u_j^n να είναι φραγμένη καθώς n τείνει στο άπειρο. Είναι:

$$\left|u_j^n\right| = \left|\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{(m)} A_m e^{imj\Delta x}\left[\rho(m)\right]^n\right| \le \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{(m)}\left|A_m\right|\,\left|\left[\rho(m)\right]\right|^n \qquad (4.11)$$

Αφού ισχύει η (4.10) είναι:

$$\left|u_j^n\right| \le \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{(m)}\left|A_m\right| \qquad (4.12)$$

Είναι όμως για την φ(x) η σειρά Fourier απολύτως συγκλίνουσα οπότε το άπειρο άθροισμα που εμφανίζεται στη παραπάνω σχέση συγκλίνει, οπότε είναι και φραγμένο. Άρα και η αριθμητική λύση είναι φραγμένη. Εφαρμόζοντας τη συνθήκη ευστάθειας στο πρόβλημα (4.5) παρατηρούμε ότι ο συντελεστής μεγέθυνσης (4.7) είναι πραγματικός αριθμός μικρότερος του 1. Για να ισχύει η συνθήκη αρκεί να μην γίνεται μικρότερος του –1. Για να συμβαίνει αυτό αρκεί να ισχύει:

$$\frac{2c\Delta t}{\Delta x^2} \le 1 \qquad (4.13)$$

Η παραπάνω μέθοδος ευστάθειας με τη χρήση σειρών Fourier είναι γνωστή και ως μέθοδος von Neumann και μπορεί να επεκταθεί και σε προβλήματα όπου μία συνιστώσα της ακριβούς λύσης να αυξάνεται εκθετικά στο χρόνο, χρησιμοποιώντας ανάλογη συνθήκη που να επιτρέπει όμως την αύξηση στο χρόνο, όπως θα δούμε παρακάτω.

Ερώτηση 2: Όπως προαναφέραμε πιο σημαντική από τις ερωτήσεις είναι αυτή που αφορά τη συμπεριφορά του σφάλματος όσο ο αριθμητικός κάνναβος γίνεται όλο και πιο λεπτός. Έστω το σημείο (x, t) είναι ένα σημείο σε ένα κάνναβο με βήματα $\Delta_1 x$ και $\Delta_1 t$ για τον οποίο έχει υπολογιστεί η λύση του προβλήματος αρχικών και συνοριακών τιμών με το σχήμα των πεπερασμένων διαφορών. Προκειμένου να βελτιώσουμε τους υπολογισμούς δημιουργούμε όλο και λεπτότερους κάνναβους και ξανακάνουμε τους υπολογισμούς. Η τιμή του n για το συγκεκριμένο χρόνο t τείνει στο άπειρο και είναι ξεκάθαρο ότι και σε αυτή τη περίπτωση πρέπει να αποφευχθούν συντελεστές μεγέθυνσης ρ με απόλυτη τιμή μεγαλύτερη του 1, όπως και στη προηγούμενη περίπτωση, αφού από τη σχέση (4.8) η ακριβής λύση του σχήματος πεπερασμένων διαφορών αποκλίνει για τιμές του ρ μεγαλύτερες από 1. Για το λόγο αυτό θεωρούμε

κάνναβο με βήματα $\Delta x = \Delta_1 x/K$ και $\Delta t = \Delta_1 t/K^2$ όπου K φυσικός με $\Delta_1 x$ και $\Delta_1 t$ τέτοια ώστε να ισχύει η συνθήκη (4.13) οπότε και η (4.10).
Έστω $u^n(x, t)$ η λύση του σχήματος πεπερασμένων διαφορών στο σημείο (x, t) και u(x, t) η ακριβής λύση στο σημείο αυτό, όπου $t = n\Delta t$. Τότε αν ισχύει η (4.10), η λύση $u^n(x, t)$ συγκλίνει στην u(x, t) για κάθε n καθώς το K τείνει στο άπειρο.

Απόδειξη [1]:

Έστω m_0 ένας θετικός ακέραιος. Για δοσμένο K είναι:

$$\left|u^n - u\right| = \left|\left(\sum_{|m|\le m_0}{}_{(m)} + \sum_{|m|\ge m_0}{}_{(m)} + \right) A_m e^{imx}\left[\rho^{t/\Delta t} - \left(e^{-m^2 c\Delta t}\right)^{t/\Delta t}\right]\right| = \left|\sum{}^1 + \sum{}^2\right| \tag{4.14}$$

Για το δεύτερο άθροισμα λόγω της (4.10) και του αρνητικού εκθέτη της εκθετικής συνάρτησης, ισχύει:

$$\left|\sum{}^2\right| \le 2\sum_{|m|>m_0}{}_{(m)}\left|A_m\right| \tag{4.15}$$

Το παραπάνω άθροισμα μπορεί να γίνει οσοδήποτε μικρό αρκεί να επιλέξουμε αρκετά μεγάλο m_0 αφού η σειρά Fourier για την φ(x) είναι απολύτως συγκλίνουσα.
Για να υπολογίσουμε το πρώτο άθροισμα παρατηρούμε ότι έχει τη μορφή αθροισμάτων $(\rho^n - \lambda^n)$ όπου ρ, λ οι συντελεστές μεγέθυνσης. Όμως ισχύει:

$$(\rho^n - \lambda^n) = (\rho - \lambda)\,(\rho^{n-1} + \rho^{n-2}\lambda + \ldots + \lambda^{n-1}) \tag{4.16}$$

Αφού τα ρ και λ είναι μικρότερα του 1, ο δεύτερος παράγοντας είναι μικρότερος του n. Για το πρώτο παράγοντα χρησιμοποιώντας τα αναπτύγματα σε σειρές Taylor (4.9α), (4.9β) έχουμε

$$\frac{\rho - e^{-m^2 c\Delta t}}{m^4(\Delta t)^2} = \frac{1}{12}\frac{c\Delta x^2}{\Delta t} - \frac{1}{2}c^2 + P_1(m^2(\Delta t)) \tag{4.17}$$

όπου P_1 κάποιο πολυώνυμο με μεταβλητή τη παράσταση στη παρένθεση. Η παραπάνω παράσταση είναι φραγμένη καθώς η μεταβλητή του πολυωνύμου βρίσκεται στη περιοχή ανάπτυξης των σειρών (4.9α), (4.9β) αφού ο τρίτος όρος τείνει στο 0, ο δεύτερος και ο πρώτος όρος είναι σταθεροί σύμφωνα με την υπόθεση που έχει γίνει για την υποδιαίρεση του καννάβου. Έστω το φράγμα να είναι B. Τότε:

$$\left|\sum{}^1\right| \le \sum_{|m|\le m_0}{}_{(m)} m^4(\Delta t)^2 B\frac{t}{\Delta t}\left|A_m\right| \le m_0^4 B\Delta t\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{(m)}\left|A_m\right| \tag{4.18}$$

Επιλέγοντας μεγάλο m_0 προκειμένου να κάνουμε αρκετά μικρό το άθροισμα Σ^2 επιλέγουμε μικρό Δt για να κάνουμε μικρό το άθροισμα Σ^1. Με αυτό το τρόπο

μπορούμε να έχουμε οσοδήποτε μικρό σφάλμα προσέγγισης θέλουμε επιλέγοντας το K να είναι ικανοποιητικά μεγάλο.
Συνοπτικά, δύο περιπτώσεις ευστάθειας έχουν μελετηθεί. Στη μία περίπτωση με σταθερό Δt αφήσαμε το t να τείνει στο άπειρο ή αντίστροφα, στη δεύτερη περίπτωση κρατώντας το t σταθερό αφήσαμε το Δt να τείνει στο άπειρο. Και στις δύο περιπτώσεις είναι αναγκαία η συνθήκη (4.13) προκειμένου να αποφύγουμε τα κάθε είδους λάθη, στον υπολογισμό της λύσης αριθμητικά με το σχήμα πεπερασμένων διαφορών, να γίνουν τόσο πολύ μεγάλα ώστε τα αποτελέσματα του υπολογισμού να γίνουν αναξιόπιστα. Στη πραγματικότητα η αναξιοπιστία των αποτελεσμάτων χρειάζεται μερικούς κύκλους υπολογισμού για να εμφανιστεί αν δεν ισχύει η παραπάνω αναφερόμενη συνθήκη. Οπότε κάθε φορά που χρησιμοποιούμε σχήματα πεπερασμένων διαφορών για τον υπολογισμό προσεγγιστικών λύσεων σε προβλήματα αρχικών και συνοριακών συνθηκών είναι απαραίτητο να γνωρίζουμε τις συνθήκες που πρέπει να ισχύουν ώστε να είναι ευσταθής.

1.2. Συντελεστής μεγέθυνσης

Στο παράδειγμα επίλυσης προβλήματος αρχικών και συνοριακών συνθηκών με χρήση σχήματος πεπερασμένων διαφορών που χρησιμοποιήσαμε (4.5α) ο συντελεστής μεγέθυνσης προέκυψε να είναι μοναδικός. Δηλαδή, το ρ στο συγκεκριμένο πρόβλημα προκύπτει ως η μοναδική λύση από την εξίσωση που προκύπτει αν αντικαταστήσουμε τη σχέση (4.6) στην (4.5α). Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι το πρόβλημα είναι μονοδιάστατο στο χώρο αφενός και αφετέρου ότι το χρησιμοποιούμενο σχήμα πεπερασμένων διαφορών είναι δύο βημάτων ως προς το χρόνο δηλαδή μπορεί να γραφεί ως:

$$B_1 u^{n+1} = B_0 u^n \tag{4.19}$$

όπου $B_0=B_0(\Delta t, \Delta x)$ και $B_1=B_1(\Delta t, \Delta x)$, τελεστές πάνω στη συνάρτηση u. Αν γενικά υπάρχει B_1^{-1} τότε υποθέτοντας ότι $\Delta x=f(\Delta t)$ είναι $B_0=B_0(\Delta t, \Delta x)= B_0(\Delta t)$, $B_1=B_1(\Delta t, \Delta x)= B_1(\Delta t)$ και $C= B_1^{-1} B_0$ η παραπάνω σχέση γίνεται:

$$u^{n+1} = C(\Delta t) u^n \tag{4.20}$$

Η παραπάνω σχέση όπως αναφέραμε ονομάζεται σχέση δύο βημάτων γιατί μόνο δύο χρονικά βήματα περιλαμβάνονται σε αυτή, το $(n+1)\Delta t$ και το $n\Delta t$. Στη περίπτωση που το πρόβλημα αρχικών και συνοριακών τιμών αφορά d χωρικές μεταβλητές, $\overline{x} = (x_1 + j_1\Delta x_1),(x_2 + j_2\Delta x_2),..,(x_d + j_d\Delta x_d)$ τότε η ακριβής λύση του προβλήματος με χρήση των σειρών Fourier παίρνει τη παρακάτω μορφή, όσον αφορά τη λύση ως προς τη χωρική παράμετρο:

$$u(\overline{x}) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{(\overline{k})} A_{\overline{k}} \exp(i\overline{k}\overline{x}) \tag{4.21}$$

Όπου $\bar{k}$ ένα διάνυσμα-παράμετρος των σειρών Fourier, διάστασης d που στη απλή περίπτωση που d=1 είναι φυσικός αριθμός. Στην αριθμητική λύση οι παραπάνω σειρές παίρνουν τη μορφή:

$$u^n(\bar{x},t) = A_{(\bar{k})}\rho_{\bar{k}}{}^n e^{i(\bar{k}\,\bar{x})} \qquad (4.22)$$

όπου $A_{(\bar{k})}$ οι συντελεστές των σειρών Fourier αντίστοιχοι με την (4.3) και

$$\exp[i(\bar{k}\,\bar{x})] = \exp\{i[k_1(x_1 + j_1\Delta x_1) + k_2(x_2 + j_2\Delta x_2) + .. + k_d(x_d + j_d\Delta x_d]\} \qquad (4.23)$$

Τότε στη σχέση (4.20) λόγω χωρικής πολυδιάστασης αντιστοιχεί και ο όρος k:

$$u^{n+1}(\bar{x}) = C(\Delta t, k)\,u^n(\bar{x}) \qquad (4.24)$$

όπου C πίνακας – τελεστής. Ο παραπάνω πίνακας καλείται τελεστής μεγέθυνσης. Στην περίπτωση του προβλήματος –παραδείγματος (4.5) επειδή αποτελείται από ένα στοιχείο εκφυλίζεται σε συντελεστή μεγέθυνσης.

Στην περίπτωση που το πρόβλημα αρχικών και συνοριακών τιμών που μελετάμε στη μορφή πεπερασμένων διαφορών που έχουμε επιλέξει περιλαμβάνει πλέον των δύο χρονικών βημάτων, τότε είναι της μορφής

$$B_q u^{n+q} + B_{q-1}u^{n+q-1} + .. + B_0 u^n = 0 \qquad (4.25)$$

όπου $B_q,\ldots,B_0$ αναφέρονται στους τελεστές πεπερασμένων διαφορών. Με ανάλογες συνοριακές συνθήκες η παραπάνω σχέση μπορεί να λυθεί μοναδικά ως προς την u^{n+q}. Θεωρώντας

$$C_j = C_j(\Delta t) = -B_q^{-1}B_j \quad j = 0,\ldots,q-1 \qquad (4.26)$$

και

$$\tilde{v}^n = \begin{bmatrix} u^{n+q-1} \\ u^{n+q-2} \\ : \\ u^n \end{bmatrix} \qquad (4.27)$$

Τότε είναι

$$\tilde{C} = \begin{bmatrix} C_{q-1} & C_{q-2} & \ldots & & C_0 \\ I & 0 & \ldots & & 0 \\ 0 & I & \ldots & & 0 \\ : & : & : & : & : \\ 0 & 0 & \ldots & I & 0 \end{bmatrix} \qquad (4.28)$$

και τελικά

$$\tilde{v}^{n+1} = \tilde{C}(\Delta t, k)\,\tilde{v}^{n} \qquad (4.29)$$

Σε κάθε περίπτωση λοιπόν η σχέση (4.24) μας δίνει τον πίνακα – τελεστή μεγέθυνσης. Η κανονικότητα ή μη του πίνακα αυτού καθορίζει και τη συνθήκη ευστάθειας η οποία στη γενική περίπτωση έχει τη μορφή

$$C(\Delta t, k)^n \ \text{για} \ \begin{cases} 0 < \Delta t < \tau \\ 0 \le n\Delta t \le T \end{cases} \qquad (4.30)$$

όπου τ είναι η μέγιστη τιμή που μπορεί να πάρει το Δt. Με τη παραπάνω σχέση αναφέρεται ότι ο τελεστής – πίνακας αυτής της μορφής πρέπει να είναι ομοιόμορφα φραγμένος.
Στη Θεωρία Τελεστών [1] αν L_F είναι ένας τελεστής στο χώρο τελεστών B, ο οποίος έχει τη μορφή πίνακα F(k) μέσω μιας εξίσωσης της μορφής:

$$w(k) = F(k)v(k) \qquad (4.31)$$

τότε ο τελεστής φράσσεται με το παρακάτω τρόπο:

$$\|L_F\| = \underset{L_F \ \ (k)}{\mathrm{Max}} \|F(k)\| \qquad (4.32)$$

όπου για δοσμένο k το φράγμα του πίνακα F(k) δίνεται από:

$$\|F(k)\| = \underset{|v|=1}{\mathrm{Max}} |F(k)v| = \underset{|v|\neq 0}{\mathrm{Max}} \frac{|F(k)v|}{|v|} \qquad (4.33)$$

Οπότε $\|F(k)\|$ είναι το μέτρο ή νόρμα του πίνακα F(k) που υπολογίζεται μέσω μετασχηματισμού του πίνακα. Άρα η συνθήκη ευστάθειας αφορά και την παράμετρο – διάνυσμα k. Οπότε η συνθήκη ευστάθειας απαιτεί για κάποιο θετικό αριθμό τ οι πίνακες :

$$C(\Delta t, k)^n \ \text{για} \ \begin{cases} 0 < \Delta t < \tau \\ 0 \le n\Delta t \le T \\ k \in L \end{cases} \qquad (4.34)$$

να είναι ομοιόμορφα φραγμένοι. Όπου $L \equiv N$ στην περίπτωση που d=1.
Αν F είναι ένας τετραγωνικός πίνακας διάστασης *ν* και λ_i, i=1, .. *ν*, οι ιδιοτιμές του πίνακα, η μέγιστη των ιδιοτιμών κατά απόλυτη τιμή ονομάζεται φασματική ακτίνα[1].
Αν R(Δt, k) είναι η φασματική ακτίνα του F, τότε ισχύει:

[1] Αγγλ. *Spectral radius*

$$\|F\| \geq R \tag{4.35}$$

αφού ο λόγος $|Fv|/|v|$ δεν είναι μικρότερος από τη τιμή που προκύπτει αν στη θέση του v αντικαταστήσουμε το ιδιοδιάνυσμα που προκύπτει από τη φασματική ακτίνα. Είναι γνωστό από τη Γραμμική Άλγεβρα ότι η φασματική ακτίνα του F^n είναι R^n. Επίσης ισχύει:

$$\|F^2\| = \underset{|v|\neq 0}{\mathrm{Max}} \frac{|F(Fv)|}{|Fv|}\frac{|Fv)|}{|v|} \leq \underset{\substack{|v|\neq 0\\|w|\neq 0}}{\mathrm{Max}} \frac{|Fw|}{|w|}\frac{|Fv)|}{|v|} = \|F\|^2 \Rightarrow \|F^2\| \leq \|F\|^2 \tag{4.36}$$

Οπότε τελικά η συνθήκη ευστάθειας απαιτεί για κάποιο χρόνο ο συντελεστής μεγέθυνσης:

$$R(\Delta t, k)^n \leq \left\|C(\Delta t, k)^n\right\| \leq \left\|C(\Delta t, k)\right\|^n \text{ για } \begin{cases} 0 < \Delta t < \tau \\ 0 \leq n\Delta t < T \\ k \in L \end{cases} \tag{4.37}$$

να είναι ομοιόμορφα φραγμένος.

Το απλούστερο παράδειγμα αριθμητικής επίλυσης προβλήματος με τη μέθοδο πεπερασμένων διαφορών, του οποίου η μελέτη του συντελεστή μεγέθυνσης να καταλήγει σε πίνακα-τελεστή, είναι η κυματική εξίσωση:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad\qquad c=\text{const.}>0 \tag{4.38}$$

Χρησιμοποιώντας το παρακάτω σχήμα πεπερασμένων διαφορών

$$u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1} = \left(\frac{c\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \left(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n\right) \tag{4.39}$$

παρατηρούμε ότι δεν έχουμε τη περίπτωση προβλήματος δύο βημάτων, δηλαδή δεν έχουμε μόνο u^{n+1} και u^n, αλλά και u^{n-1}. Θέτοντας

$$y_j^n = u_j^{n-1} \tag{4.40}$$

η εξίσωση 4.39 διαμορφώνεται σε πρόβλημα δύο βημάτων, αφού διαμορφώνεται στο παρακάτω σύστημα εξισώσεων:

$$\left.\begin{aligned} &u_j^{n+1} - 2u_j^n + y_j^n = \left(\frac{c\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \left(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n\right) \\ &y_j^{n+1} = u_j^n \end{aligned}\right\} \tag{4.41}$$

Το παραπάνω σύστημα με τη χρήση των σχέσεων

$$\left.\begin{aligned} u_j^n &= A\rho^n e^{imj\Delta x} \\ y_j^n &= A\xi^n e^{imj\Delta x} \end{aligned}\right\} \tag{4.42}$$

καταλήγει στο παρακάτω τελεστή-πίνακα μεγέθυνσης

$$G(\Delta t, m) = \begin{bmatrix} 2 - 2a_1^2 b_1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.43}$$

όπου a_1=cΔt/Δx και b_1=1-cos(mΔx). Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του παραπάνω πίνακα είναι

$$\lambda^2 - 2d\lambda + 1 = 0 \tag{4.44}$$

όπου $d = 1 - a_1^2 b_1$. Οι ρίζες που προκύπτουν είναι:

$$\lambda_{1,2} = d \pm \sqrt{d^2 - 1} \tag{4.45}$$

Αν $|d| \geq 1$ τότε max(λ_i) είναι μεγαλύτερο του 1 οπότε δεν ισχύει η συνθήκη (4.10). Αν $|d| < 1$ οι λύσεις είναι συζυγείς μιγαδικές με μέτρο 1. Άρα η σχέση που προκύπτει από την εφαρμογή της συνθήκης (4.10) είναι

$$\left| 1 - \left(\frac{c\Delta t}{\Delta x} \right)^2 (1 - \cos(m\Delta x)) \right| < 1 \tag{4.46}$$

Από την οποία προκύπτει η τελική συνθήκη ευστάθειας για τη κυματική εξίσωση:

$$\frac{c\Delta t}{\Delta x} < 1 \tag{4.47}$$

Εναλλακτικά η αντικατάσταση των σειρών Fourier στο σχήμα πεπερασμένων διαφορών, στη περίπτωση πολυβηματικού αλγορίθμου (4.25) μας δίνει μια πολυωνυμική εξίσωση τάξεως q ως προς ρ η οποία αντιστοιχεί στη χαρακτηριστική εξίσωση του τελεστή μεγέθυνσης.

1.3. Συνθήκη Von Neumann

Στη προηγούμενη παράγραφο καταλήξαμε στο συμπέρασμα ότι η λύση ενός προβλήματος αρχικών και συνοριακών τιμών με την αριθμητική μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών, προκειμένου να είναι ευσταθής με την έννοια που δώσαμε στην ευστάθεια στην αντίστοιχη παράγραφο αυτής της εργασίας, απαραίτητη συνθήκη είναι η ύπαρξη μιας σταθεράς C_1 έτσι ώστε

$$R\left(\Delta t,k\right)^{n} \le C_1 \quad \text{για} \begin{cases} 0<\Delta t<\tau \\ 0 \le n\Delta t < T \\ k \in L \end{cases} \tag{4.48}$$

Τότε θα ισχύει:

$$R\left(\Delta t,k\right) \le C_1^{1/n}, \quad 0 \le n \le \frac{T}{\Delta t} \tag{4.49}$$

οπότε

$$R\left(\Delta t,k\right) \le C_1^{\Delta t/T} \tag{4.50}$$

Γενικά μπορεί να ισχύει $C_1 \ge 1$ και τελικά $\left|\lambda_1\right| \ge 1$. Η συνθήκη ευστάθειας (4.10) προέκυψε από τις ιδιότητες της εκθετικής συνάρτησης (4.9) για τον συντελεστή μεγέθυνσης της ακριβούς λύσης του προβλήματος (4.2). Ανάλογα για κάποιο άλλο πρόβλημα μπορεί ο συντελεστής μεγέθυνσης να έχει εκθέτη θετικό αριθμό οπότε η συνθήκη (4.10) δεν θα ανταποκρίνεται στις ανάγκες του προβλήματος. Παρακάτω περιγράφεται αναλυτικά μία τέτοια εφαρμογή.

Για Δt στο διάστημα $0<\Delta t<\tau$, η έκφραση $C_1^{\Delta t/T}$ στη περίπτωση αυτή είναι φραγμένη από τη γραμμική έκφραση της μορφής $1+C_2\Delta t$, όπου C_2 σταθερός αριθμός εξαρτώμενος αποκλειστικά από το τ και το C_1. Από τον ορισμό της φασματικής ακτίνας προκύπτει τότε

$$R(\Delta t,k)=\left|\lambda_1\right| \le 1+O\left(\Delta t\right) \quad \text{για} \begin{cases} 0<\Delta t<\tau \\ \\ i=1,....,p \end{cases} \tag{4.51}$$

όπου $\lambda_1,.......,\lambda_v$ είναι οι ιδιοτιμές του τελεστή μεγέθυνσης $G\left(\Delta t,k\right)$ σε φθίνουσα σειρά. Η παραπάνω σχέση αποτελεί τη συνθήκη ευστάθειας von Neumann.

Στην εισαγωγή της ευστάθειας χρησιμοποιήθηκε ως συνθήκη η σχέση (4.10) η οποία κατέληξε με τη θεωρία που αναπτύξαμε να έχει αντίστοιχα τη παρακάτω μορφή:

$$\left|\lambda_1\right| \le 1 \tag{4.52}$$

Πολλές κατηγορίες προβλημάτων συνοριακών και αρχικών τιμών, όπως ήδη αναφέραμε αφορούν εκθετική αύξηση για κάποια από τις συνιστώσες της ακριβούς λύσης ως προς το χρόνο. Συνθήκες ευστάθειας όπως η (4.10) δεν επιτρέπουν σε αυτού του είδους τα προβλήματα τέτοια αύξηση. Για αυτό το λόγο χρησιμοποιείται η γενικευμένη συνθήκη ευστάθειας (4.51) η οποία επιτρέπει ικανή αύξηση.

Εφαρμογή:

Εφαρμογή της παραπάνω συνθήκης (4.51) αποτελεί το τροποποιημένο πρόβλημα διάχυσης

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + bu\,,\ c > 0, b > 0 \qquad (4.53)$$

Αν γράψουμε την εξίσωση πεπερασμένων διαφορών της παραπάνω διαφορικής εξίσωσης, τότε προκύπτει:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = c\frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{(\Delta x)^2} + bu_j^n \qquad (4.54)$$

Τότε ο συντελεστής μεγέθυνσης προκύπτει από την αντικατάσταση της (4.6) στην (4.54). Η λύση της εξίσωσης που προκύπτει ως προς ρ είναι:

$$G(\Delta t, m) = 1 - 4\frac{c\Delta t}{(\Delta x)^2}\sin^2\frac{m\Delta x}{2} + b\Delta t \qquad (4.55)$$

και είναι φανερό ότι η συνθήκη ευστάθειας von Neumann ικανοποιείται αν ισχύει:

$$\frac{c\Delta t}{(\Delta x)^2} = \text{const.} \le 1/2 \qquad (4.56)$$

όπως είχε υπολογιστεί για την μη τροποποιημένη εξίσωση διάχυσης.

2. ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΜΕΘΟΔΟΥ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑΣ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΥ VON NEUMANN ΣΤΗΝ ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΟΥ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

2.1. Εισαγωγή

Η συνθήκη ευστάθειας von Neumann αναφέρεται στην αριθμητική ευστάθεια της μεθόδου των πεπερασμένων διαφορών. Ανάλογα με τη μορφή του προβλήματος η αριθμητική ευστάθεια επιτυγχάνεται υπό προϋποθέσεις. Οι προϋποθέσεις αυτές προκύπτουν από τους περιορισμούς που θέτουμε στη «βοηθητική» αναλυτική λύση που προκύπτει από σειρές Fourier και συγκεκριμένα στο μέρος της λύσης που αφορά τη χρονική μεταβολή. Ανάλογα με τη μορφή του διαχυτικού χαρακτήρα του προβλήματος προκύπτουν και οι περιορισμοί για το συντελεστή μεγέθυνσης ρ που προκύπτει από την αντικατάσταση της σχέσης (4.6) στο χρησιμοποιούμενο σχήμα πεπερασμένων διαφορών. Ειδικά όμως η αναφερόμενη συνθήκη μπορεί να εφαρμοστεί σε πολλά προβλήματα χωρίς να επηρεάζεται από το διαχυτικό χαρακτήρα του προβλήματος.
Θα εφαρμόσουμε τη συνθήκη ευστάθειας von Neumann στην αριθμητική λύση με τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών του αντιστρόφου προβλήματος βαθιάς καθίζησης με τη μέθοδο κανονικοποίησης u_{xxxx}. Το πρόβλημα αρχικών και συνοριακών τιμών είναι το ακόλουθο

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial z} = -\frac{c}{(1-b+z)^2}\frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x^2} + \frac{x}{1-b+z}\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x} - \varepsilon\frac{\partial^4 u_\varepsilon}{\partial x^4} \tag{4.57α}$$

για

$$0 \le x \le 1 \quad ; \quad 0 < z \le b \tag{4.57β}$$

και

$$u_\varepsilon(x,0) = u(x,b) \qquad (\text{α.σ.}) \tag{4.57γ}$$

$$u_\varepsilon(1,z) = 0 \qquad (\text{σ.σ.}) \tag{4.57δ}$$

$$(u_\varepsilon)_x(0,z) = 0 \qquad (\text{σ.σ.}) \tag{4.57ε}$$

$$(u_\varepsilon)_{xx}(1,z) = 0 \qquad (\text{σ.σ.}) \tag{4.57στ}$$

όπου u η λύση στο ευθύ πρόβλημα βαθιάς καθίζησης και u_ε η λύση του αντιστρόφου προβλήματος. Το παραπάνω πρόβλημα σύμφωνα με τη διαχυτική μορφή που εμφανίστηκε στο ευθύ πρόβλημα αναμένεται αν όχι επιβάλλεται να εμφανίζει αύξηση των υπολογιστικών τιμών ως προς το χρόνο. Συνθήκες ευστάθειας όπως η (4.10) αποτρέπουν την ύπαρξη όπως έχουμε δείξει αυτής της διαχυτικής συμπεριφοράς του προβλήματος.
Στο συγκεκριμένο πρόβλημα οι απαιτήσεις για περιορισμένα αυξανόμενο ρ καταλήγουν στη συνθήκη που μαθηματικά εκφράζεται από τη σχέση (4.51). Σύμφωνα με τη συνθήκη von Neumann η ευστάθεια της αριθμητικής λύσης του αντιστρόφου προβλήματος διαχύσεως εξασφαλίζεται αν υπό προϋποθέσεις, οι οποίες εξαρτώνται από τις αριθμητικές παραμέτρους του προβλήματος, ισχύει

$$\|\rho_{1,2}\| \le 1 + \kappa(\Delta x, \Delta z)\Delta z \tag{4.58}$$

με

$$0 \le \kappa(\Delta x, \Delta z) \le M \tag{4.59}$$

για μικρά Δx ,Δz.
Η παραπάνω αναφερόμενη συνθήκη διαμορφώνεται ανάλογα με τη μορφή κάθε προβλήματος και αντίστοιχα κάθε εξίσωσης.

2.2. Εφαρμογή στο αντίστροφο πρόβλημα – Μέθοδος κανονικοποίησης u_{xxxx}

Η διακριτοποιημένη μορφή της μερικής διαφορικής εξίσωσης μετά από αντικατάσταση της (4.6) μετατρέπεται στην εξίσωση της ευστάθειας για τον συντελεστή μεγέθυνσης. Οπότε από τη σχέση

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} &= u_j^n + \frac{\Delta z}{\Delta x(1-b+z_n)} x_j \left(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n\right) - \\ &- \frac{c\Delta z}{\Delta x^2 (1-b+z_n)^2}\left(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n\right) \\ &- \frac{\varepsilon \Delta z}{\Delta x^4}\left(u_{j+2}^n - 4u_{j+1}^n + 6u_j^n - 4u_{j-1}^n + u_{j+2}^n\right) \end{aligned} \tag{4.60}$$

με την αντικατάσταση της (4.6) έχει τη μορφή

$$\begin{aligned} &\frac{\rho^{n+1}e^{ijm\Delta x} - \rho^n e^{ijm\Delta x}}{\Delta z} = \frac{x_j}{L_n}\frac{\rho^n e^{im(j+1)\Delta x} - \rho^n e^{im(j-1)\Delta x}}{2\Delta x} - \\ &- \frac{c}{L_n^2}\frac{\rho^n e^{im(j+1)\Delta x} - 2\rho^n e^{imj\Delta x} + \rho^n e^{im(j-1)\Delta x}}{\Delta x^2} - \\ &- \varepsilon\frac{\rho^n e^{im(j+2)\Delta x} - 4\rho^n e^{im(j+1)\Delta x} + 2\rho^n e^{imj\Delta x} - 4\rho^n e^{im(j-1)\Delta x} + \rho^n e^{im(j-2)\Delta x}}{\Delta x^4} \end{aligned} \tag{4.61}$$

η οποία καταλήγει στη παρακάτω εξίσωση:

$$\begin{aligned} \rho = 1 + \frac{x_j \Delta z}{L_n}\frac{e^{i\Delta x} - e^{-i\Delta x}}{2\Delta x} - \frac{c\Delta z}{L_n^2}\frac{e^{i\Delta x} - 2 + e^{-i\Delta x}}{\Delta x^2} + \\ - \varepsilon\Delta z\frac{e^{i2\Delta x} - 4e^{i\Delta x} + 2 - 4e^{-i\Delta x} + e^{-2i\Delta x}}{\Delta x^4} \end{aligned} \tag{4.62}$$

όπου

$L_n = [0.18\ ,\ 1.0] = 1\text{-}b+z_n$ (4.63)

$c = 0.1$ (4.64)

$\varepsilon = [-\infty, +\infty]$ (4.65)

$x_j \in [0\ ,\ 1.0] = x$ (4.66)

Στις παραπάνω αναφερόμενες παραμέτρους παρατηρούμε ότι συμπεριλαμβάνονται οι όροι L_n και x_j οι οποίοι αντιστοιχούν στις μεταβλητές του προβλήματος αρχικών και συνοριακών τιμών 1-b+z και x. Η ευστάθεια όμως επιβάλει ως μεταβλητές να είναι τα αριθμητικά στοιχεία του προβλήματος. Για αυτό το λόγο θεωρούμε τις παραπάνω μεταβλητές ως παραμέτρους με τιμές, αυτές που παίρνουν σε όλες τις χρονικές και χωρικές φάσεις του προβλήματος.
Σύμφωνα με την ευστάθεια που μελετήσαμε σε προηγούμενη παράγραφο μας ενδιαφέρει η συμπεριφορά της/των ρίζας/ριζών της εξίσωσης καθώς τα Δx, Δz κινούνται προς το 0.
Είναι

$$\|\rho\| = \left\| 1 + \Delta z\left(i\frac{x_j}{L_n \Delta x}\sin\Delta x + \frac{4c}{L_n^2 \Delta x^2}\sin^2\frac{\Delta x}{2} - \frac{16\varepsilon}{\Delta x^4}\sin^4\frac{\Delta x}{2}\right)\right\| = \tag{4.67}$$
$$= \left\|1 + \Delta z\, f_{\Delta x}\right\| \le 1 + \Delta z\left\|f_{\Delta x}\right\|$$

Για το οποίο πρέπει να ισχύει:

$$\frac{\|\rho\| - 1}{\Delta z} \ge 0 \tag{4.68}$$

το οποίο εξασφαλίζεται αν $\mathrm{Re}(f_{\Delta x}) \ge 0$. Η παραπάνω συνθήκη εξασφαλίζεται αν ισχύει:

$$\frac{c}{L_n^2} - \varepsilon \ge 0 \tag{4.69}$$

όπως εύκολα προκύπτει από την (4.67) αφού η σχέση ($\sin^n(\lambda\Delta x)/(\lambda\Delta x)^n$) είναι πολύ κοντά στο 1 για τις χρησιμοποιούμενες τιμές Δx. Η σχέση (4.69) εξασφαλίζει την ισχύ τόσο της (4.57), όσο και την ισχύ του αριστερού μέλους της ανισότητας (4.59) αφού είναι ισοδύναμες.
Στη περίπτωση όμως που δεν ισχύει η παραπάνω συνθήκη, όπως στη περίπτωση που μελετάμε θα πρέπει να διερευνήσουμε περισσότερο και να καταλήξουμε σε πιο περίπλοκη αλλά επίσης μη πεπλεγμένη σχέση για το ε. Πρέπει να ισχύει:

$$\mathrm{Re}(f_{\Delta x})^2 + 2\,\mathrm{Re}(f_{\Delta x}) + \mathrm{Im}(f_{\Delta x}) \ge 0 \tag{4.70}$$

Αν $\mathrm{Im}(f_{\Delta x}) \ge 1$ τότε η παραπάνω σχέση ισχύει πάντα. Εναλλακτικά πρέπει να ισχύει:

$$\varepsilon < \frac{c}{L_n^2 c_{\Delta x}} + \frac{1}{c_{\Delta x}^2} - \frac{\sqrt{1 - \mathrm{Im}^2(f_{\Delta x})}}{c_{\Delta x}^2} \quad \text{για} \quad c_{\Delta x} = 4\frac{\sin^2(\Delta x/2)}{\Delta x^2} \tag{4.71}$$

Στη περίπτωση την οποία μελετάμε ισχύει η δεύτερη περίπτωση της παραπάνω σχέσης.
Το μέτρο της $f_{\Delta x}$ είναι φθίνουσα συνάρτηση του Δx στο διάστημα (0, 1) οπότε το μικρότερο άνω φράγμα του μέτρου της $f_{\Delta x}$ είναι το (Παράρτημα Η):

$$\lim_{\Delta x \to 0}\left(\left\|f_{\Delta x}\right\|\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4{x_j}^2 L_n^2 + c^2 - 4c\varepsilon L_n^2 + 4\varepsilon^2 L_n^4}{L_n^4}} \tag{4.72}$$

Στο Παράρτημα Η εμφανίζονται επίσης οι πιθανές τιμές που μπορεί να πάρει η παραπάνω παράσταση. Η παραπάνω ποσότητα αποτελεί ενδεικτικό συντελεστή μεγέθυνσης για τη χρονική μεταβολή της u(x,t). Όσο πιο μεγάλος είναι ο παραπάνω συντελεστής τόσο πιο πολύ αποκλίνει η αριθμητική λύση από τη πραγματική.

2.3. Μετεπεξεργασία επίλυσης – Εισαγωγή στη σύγκλιση

Για ικανοποιητική ευστάθεια στο πρόβλημα που αντιμετωπίζουμε δεν μας ενδιαφέρει μόνο η συνθήκη (4.58) όπως εμφανίζεται αλλά ακόμη περισσότερο θα μελετήσουμε το αποτέλεσμα της επίλυσης.
Αφού έχουμε εξασφαλίσει τη συνθήκη ευστάθειας του προβλήματος όπως και στη περίπτωση της σύνθετης παραγώγου θα μελετήσουμε τη ταχύτητα σύγκλισης του αλγορίθμου. Είναι φανερό ότι ο παράγοντας με τον οποίο γίνεται μετρήσιμη η ταχύτητα σύγκλισης είναι το μέτρο της $f_{\Delta x}$ το οποίο εξαρτάται από το sin(Δx). Στο Παράρτημα Η εμφανίζεται η μορφή των συναρτήσεων Δx, sin(Δx), sin(Δx/2). Είναι φανερό ότι πολύ κοντά στο 0 και περίπου για τιμές $\Delta x < 0.2$ είναι:

$$\left\| f_{\Delta x} \right\| = O(\Delta x) \tag{4.73}$$

2.4. Εφαρμογή στο αντίστροφο πρόβλημα – Μέθοδος κανονικοποίησης u_{xxzz}

Η εφαρμογή της συνθήκης ευστάθειας von Neumann στην αριθμητική λύση με τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών του αντιστρόφου προβλήματος βαθιάς καθίζησης με τη μέθοδο κανονικοποίησης u_{xxzz} αντιμετωπίζεται σε αυτή τη παράγραφο. Το πρόβλημα αρχικών και συνοριακών τιμών είναι το ακόλουθο

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial z} = -\frac{c}{(1-b+z)^2}\frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x^2} + \frac{x}{1-b+z}\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x} + \nu\frac{\partial^4 u_\varepsilon}{\partial x^2 \partial z^2} \tag{4.74α}$$

για

$$0 \le x \le 1 \quad ; \quad 0 < z \le b \tag{4.74β}$$

και

$$u_\varepsilon(x,0) = u(x,b) \qquad (\text{α.σ}) \tag{4.74γ}$$

$$(u_\varepsilon)_x(0,z) = 0 \qquad (\text{σ.σ.}) \tag{4.74ζ}$$

$$u_\varepsilon(1,z) = 0 \qquad (\text{σ.σ.}) \tag{4.74στ}$$

$$(u_\varepsilon)_z(x,0) = -u_z(x,b)(\text{α.σ}) \tag{4.74δ}$$

Οι απαιτήσεις ευστάθειας είναι κοινές με αυτές της κανονικοποιήσεως της μεθόδου u_{xxxx}

$$\left\| \rho_{1,2} \right\| \le 1 + \kappa(\Delta x, \Delta z)\Delta z \tag{4.75}$$

με

$$0 \leq \kappa(\Delta x, \Delta t) \leq M \tag{4.76}$$

για μικρά Δx, Δz. Εφαρμόζουμε τη μέθοδο ευστάθειας στο νέο σχήμα πεπερασμένων διαφορών:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta z} = -\frac{c}{(1-b+z_n)^2}\frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} + \frac{x_j}{(1-b+z_n)}\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x}$$
$$+\nu\left(\frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_{j+1}^n + u_{j+1}^{n-1}}{\Delta x^2 \Delta z^2} - 2\frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{\Delta x^2 \Delta z^2} + \frac{u_{j-1}^{n+1} - 2u_{j-1}^n + u_{j-1}^{n-1}}{\Delta x^2 \Delta z^2}\right) \tag{4.77}$$

δηλαδή αντικαθιστούμε την (4.6) στο σχήμα που προκύπτει από το οποίο έχει απαλειφθεί ο συντελεστής Α:

$$\left(-\frac{\nu}{\Delta x^2 \Delta z^2}\right)\rho^{n+1}e^{i(j+1)m\Delta x} + \left(\frac{1}{\Delta z} + \frac{2\nu}{\Delta x^2 \Delta z^2}\right)\rho^{n+1}e^{ijm\Delta x} +$$
$$+\left(-\frac{\nu}{\Delta x^2 \Delta z^2}\right)\rho^{n+1}e^{i(j-1)m\Delta x} =$$
$$+\left(-\frac{2\nu}{\Delta x^2 \Delta z^2} - \frac{c}{L_n{}^2 \Delta x^2} + \frac{x(j)}{2L_n \Delta x}\right)\rho^n e^{i(j+1)m\Delta x}$$
$$+\left(\frac{1}{\Delta z} + \frac{4\nu}{\Delta x^2 \Delta z^2} + \frac{2c}{L_n{}^2 \Delta x^2}\right)\rho^n e^{ijm\Delta x}$$
$$+\left(-\frac{2\nu}{\Delta x^2 \Delta z^2} - \frac{c}{L_n{}^2 \Delta x^2} - \frac{x_j}{2L_n \Delta x}\right)\rho^n e^{i(j+1)m\Delta x}$$
$$+\left(+\frac{\nu}{\Delta x^2 \Delta z^2}\right)\rho^{n-1}e^{i(j+1)m\Delta x} + \left(-\frac{2\nu}{\Delta x^2 \Delta z^2}\right)\rho^{n-1}e^{ijm\Delta x} +$$
$$\left(+\frac{\nu}{\Delta x^2 \Delta z^2}\right)\rho^{n-1}e^{i(j-1)m\Delta x} \tag{4.78}$$

καταλήγουμε σε μια δευτεροβάθμια εξίσωση (Παράρτημα Θ) ως προς το συντελεστή μεγέθυνσης ρ με τη παρακάτω μορφή:

$$(c_1 + b_1)\rho^2 - (2c_1 + b_1 + d_1)\rho + c_1 = 0 \tag{4.79}$$

όπου

$$c_1 = 2\,\nu\,\Delta x^2\, L_n^2\, c_x > 0 \tag{4.80}$$

$$b_1 = \Delta z\ \Delta x^4\, L_n^2 > 0 \tag{4.81}$$

$$d_1 = \left(2\ c\,\Delta z^2\ \Delta x^2 c_x\right) + i\left(\sin(\Delta x) x_j\ \Delta z^2\ \Delta x^3 L_n\right) \tag{4.82}$$

με

$$c_x = (1 - \cos(\Delta x)) \tag{4.83}$$

$L_n = [0.18\ ,\ 1.0] = 1 - b + z_n$ (4.84)

$c = 0.1$ (4.85)

$x_j \in [0\ ,\ 1.0] = x$ (4.86)

$$\nu \in [-\infty, +\infty] \tag{4.87}$$

Όμως

$$\frac{2c_x}{\Delta x^2} \to 1 \ \text{και}\ \frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x} \to 1 \tag{4.88}$$

για μικρές τιμές του Δx.

Οπότε

$$c_1 = \nu\, \Delta x^4\, L_n^2 > 0 \tag{4.89}$$

$$b_1 = \Delta z\ \Delta x^4\, L_n^2 > 0 \tag{4.90}$$

$$d_1 = \left(c\, \Delta z^2\, \Delta x^4\right) + i\left(x_j\, \Delta z^2\, \Delta x^4 L_n\right) \tag{4.91}$$

και με απαλοιφή του Δx^4 είναι

$$c_1 = \nu\ L_n^2 > 0 \tag{4.92}$$

$$b_1 = \Delta z\ \ L_n^2 > 0 \tag{4.93}$$

$$d_1 = \left(c\, \Delta z^2\ \right) + i\left(x_j\, \Delta z^2\, L_n\right) \tag{4.94}$$

Η λύση της παραπάνω εξίσωσης είναι

$$\begin{aligned} \rho_{1,2} &= \frac{(2c_1 + b_1 + d_1) \pm \sqrt{(b_1 + d_1)^2 + 4(c_1 d_1)}}{2(c_1 + b_1)} = \\ &= 1 + \frac{-b_1 + d_1 \pm \sqrt{(b_1 + d_1)^2 + 4(c_1 d_1)}}{2(c_1 + b_1)} \end{aligned} \tag{4.95}$$

Είναι φανερό πως όταν Δz τείνει στο 0 τότε οι ρίζες τείνουν στο 1. Παρατηρούμε ότι

$c_1>0,\ b_1>0,\ \mathrm{Re}(d_1)>0,\ \mathrm{Im}(d_1)>0$ (4.96)

Οπότε

$$\left|1+\frac{-b_1+d_1+\sqrt{(b_1+d_1+2c_1)^2}}{2(c_1+b_1)}\right| \ge \max|\rho_1| \ge \left|1+\frac{-b_1+d_1+\sqrt{(b_1+d_1)^2}}{2(c_1+b_1)}\right|$$

$$\left|1+\frac{2d_1+2c_1}{2(c_1+b_1)}\right| \ge \max|\rho_1| \ge \left|1+\frac{2d_1}{2(c_1+b_1)}\right|$$

$$\left|1+\frac{d_1+c_1}{(c_1+b_1)}\right| \ge \max|\rho_1| \ge \left|1+\frac{d_1}{(c_1+b_1)}\right|$$

$$\left|1+\frac{d_c\Delta z^2+1}{(1+b_c\Delta z)}\right| \ge \max|\rho_1| \ge \left|1+\frac{d_c\Delta z^2}{(1+b_c\Delta z)}\right| \tag{4.97}$$

όπου

$$b_c=\frac{1}{\nu}>0 \tag{4.98}$$

$$d_c=\left(+\frac{c}{\nu L_n^2}\right)+i\left(\frac{x_j}{\nu L_n}\right) \text{ με } \mathrm{Re}(d_c)>0,\ \mathrm{Im}(d_c)>0 \tag{4.99}$$

Η ανάπτυξη σε σειρές γύρω από το Δz των παραπάνω παραστάσεων μας δίνει (Παράρτημα Θ):

$$\left|2-b_c\Delta z+\left(b_c^2+d_c\right)\Delta z^2+O\left(\Delta z^3\right)\right| \ge |\rho_1| \ge \left|1+d_c\Delta z^2+O\left(\Delta z^3\right)\right| \tag{4.100}$$

2.5. Μετεπεξεργασία επίλυσης – Εισαγωγή στη σύγκλιση

Για ικανοποιητική ευστάθεια στο πρόβλημα που αντιμετωπίζουμε δεν μας ενδιαφέρει μόνο η συνθήκη (4.58) όπως εμφανίζεται αλλά ακόμη περισσότερο θα μελετήσουμε το αποτέλεσμα της επίλυσης.
Αφού έχουμε εξασφαλίσει τη συνθήκη ευστάθειας του προβλήματος όπως και στη περίπτωση της σύνθετης παραγώγου θα μελετήσουμε τη ταχύτητα σύγκλισης του αλγορίθμου. Είναι φανερό ότι η μεταβλητή ως προς την οποία γίνεται μετρήσιμη η ταχύτητα σύγκλισης είναι η Δz. Από τη σχέση (4.99) είναι καθώς το Δz τείνει στο 0

$$|2-O(\Delta z)| \ge |\rho_1| \ge \left|1+O\left(\Delta z^2\right)\right| \tag{4.101}$$

3. ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΣΦΑΛΜΑΤΟΣ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗΣ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΣΕΙΡΩΝ TAYLOR[1] – ΣΥΓΚΛΙΣΗ

3.1. Εισαγωγή

Σύμφωνα με τις υποθέσεις που έγιναν για την ευστάθεια, η λύση του ενός προβλήματος με τη χρήση πεπερασμένων διαφορών συγκλίνει στην ακριβής λύση, εάν για Δx, Δt (αντίστοιχα Δz) τείνουν στο 0, ικανοποιείται η συνθήκη ευστάθειας του αριθμητικού αλγορίθμου. Δεν μας ενδιαφέρει όμως μόνο η σύγκλιση αριθμητικής και ακριβούς λύσης αλλά για πρακτικούς λόγους και η ταχύτητα σύγκλισης των δύο λύσεων. Στη παράγραφο αυτή μελετάται το θεωρητικό υπόβαθρο της μελέτης της ταχύτητας σύγκλισης στη βάση του σφάλματος προσέγγισης με χρήση σειρών Taylor. Έστω

$$\tilde{u}(x,t) = \tilde{u}(j\Delta x, n\Delta t) = \tilde{u}_j^n \qquad (4.102)$$

η ακριβής λύση του προβλήματος με συνεχής μερικές παραγώγους. Από τη χρήση των σειρών Taylor με υπόλοιπο έχουμε:

$$\tilde{u}_j^{n+1} = \tilde{u}_j^n + \Delta t\left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}\right)_j^n + \frac{\Delta t^2}{2!}\left(\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2}\right)_j^{n+\theta_1} \qquad (4.103)$$

$$\tilde{u}_{j+1}^n = \tilde{u}_j^n + \Delta x\left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}\right)_j^n + \frac{\Delta x^2}{2!}\left(\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2}\right)_j^n + \frac{\Delta x^3}{3!}\left(\frac{\partial^3 \tilde{u}}{\partial x^3}\right)_j^n + \frac{\Delta x^4}{4!}\left(\frac{\partial^4 \tilde{u}}{\partial x^4}\right)_{j+\theta_2}^n \qquad (4.104)$$

$$\begin{aligned}
\tilde{u}_{j+1}^{n+1} = {} & \tilde{u}_j^n + \Delta x\left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}\right)_j^n + \Delta t\left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}\right)_j^n + \\
& + \frac{\Delta x^2}{2!}\left(\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2}\right)_j^n + 2\frac{\Delta x \Delta t}{2!}\left(\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x\,\partial t}\right)_j^n + \frac{\Delta t^2}{2!}\left(\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2}\right)_j^n \\
& + \frac{\Delta x^3}{3!}\left(\frac{\partial^3 \tilde{u}}{\partial x^3}\right)_j^n + 3\frac{\Delta x^2 \Delta t}{3!}\left(\frac{\partial^3 \tilde{u}}{\partial x^2 \partial t}\right)_j^n + 3\frac{\Delta x\ \Delta t^2}{3!}\left(\frac{\partial^3 \tilde{u}}{\partial x\ \partial t^2}\right)_j^n + \frac{\Delta t^3}{3!}\left(\frac{\partial^3 \tilde{u}}{\partial t^3}\right)_j^n \qquad (4.105) \\
& + \frac{\Delta x^4}{4!}\left(\frac{\partial^4 \tilde{u}}{\partial x^4}\right)_{j+\theta_3}^{n+\theta_4} + 4\frac{\Delta x^3 \Delta t}{4!}\left(\frac{\partial^4 \tilde{u}}{\partial x^3 \partial t}\right)_{j+\theta_4}^{n+\theta_3} + 6\frac{\Delta x^2 \Delta t^2}{4!}\left(\frac{\partial^4 \tilde{u}}{\partial x^2 \partial t^2}\right)_{j+\theta_3}^{n+\theta_4} + \\
& + 4\frac{\Delta x\ \Delta t^3}{4!}\left(\frac{\partial^4 \tilde{u}}{\partial x\ \partial t^3}\right)_{j+\theta_3}^{n+\theta_4} + \frac{\Delta t^4}{4!}\left(\frac{\partial^4 \tilde{u}}{\partial t^4}\right)_{j+\theta_3}^{n+\theta_4}
\end{aligned}$$

και παρόμοιες εκφράσεις για τα $\tilde{u}_{j-1}^n$, $\tilde{u}_j^{n-1}$ και τις υπόλοιπες μορφές των προς τα πίσω πεπερασμένων διαφορών και θ_κ, κ=1..4 αριθμοί μεταξύ 0 και 1.
Θεωρούμε ως παράδειγμα την εξίσωση Einstein – Kolmogorov:

---

[1] Αγγλ. truncation error

$u_t = c u_{xx}$, $c>0$ (4.106)

με «εμπρός» σχήμα πεπερασμένων διαφορών για μερική παράγωγο ως προς το χρόνο. Αφού η ακριβής λύση ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση θεωρούμε το τελεστή:

$$\Phi(\tilde{u}) = \frac{\tilde{u}_j^{n+1} - \tilde{u}_j^n}{\Delta t} - c\frac{\tilde{u}_{j+1}^n - 2\tilde{u}_j^n + \tilde{u}_{j-1}^n}{\Delta x} \quad (4.107)$$

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω σχέσεις στο τελεστή καταλήγουμε:

$$\begin{aligned}\Phi(\tilde{u}) &= \tfrac{1}{2}\Delta t\left(\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial t^2}\right)_j^{n+\theta_1} - \frac{c}{24}(\Delta x)^2\left[\left(\frac{\partial^4\tilde{u}}{\partial x^4}\right)_{j+\theta_2}^n + \left(\frac{\partial^4\tilde{u}}{\partial x^4}\right)_{j+\theta_3}^n\right] = \\ &= O(\Delta t) + O\left[(\Delta x)^2\right]\end{aligned} \quad (4.108)$$

Το παραπάνω αποτέλεσμα μπορεί να ερμηνευθεί ως ακολούθως: Υπάρχουν δύο σταθερές K_1 και K_2 εξαρτώμενες από την $\tilde{u}$, έτσι ώστε η απόλυτη τιμή του τελεστή Φ να είναι μικρότερη η ίση από $K_1(\Delta t) + K_2(\Delta x^2)$ για οσοδήποτε μικρά Δt, Δx. Καλούμε το αποτέλεσμα του τελεστή Φ σφάλμα προσέγγισης.
Το αποτέλεσμα του τελεστή μας δίνει τη πληροφορία της ταχύτητας σύγκλισης της αριθμητικής λύσης στην ακριβή καθώς ο αριθμητικός κάνναβος γίνεται όλο και πιο λεπτός [1]. Οπότε με τη χρήση της ευστάθειας και του τελεστή Φ αποδεικνύεται η σύγκλιση, ενός από τα τρία στοιχεία που χρειάζονται για τον προσδιορισμό ενός προβλήματος, που από την αρχική του μορφή θεωρείται μη καλώς ορισμένο, ως καλώς ορισμένου.

3.2. Εφαρμογή στη μέθοδο κανονικοποίησης u_{xxxx}

Αντικαθιστώντας στο παρακάτω σχήμα

$$\begin{aligned}u_j^{n+1} &= u_j^n + \frac{\Delta z}{\Delta x(1-b+z_n)}x_j\left(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n\right) - \\ &- \frac{c\Delta z}{\Delta x^2(1-b+z_n)^2}\left(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n\right) \\ &- \frac{\varepsilon\Delta z}{\Delta x^4}\left(u_{j+2}^n - 4u_{j+1}^n + 6u_j^n - 4u_{j-1}^n + u_{j+2}^n\right)\end{aligned} \quad (4.109)$$

το αριθμητικό λάθος είναι (Παράρτημα Ι):

$$\Phi_1(\tilde{u}) = \frac{\Delta z}{2}\left(\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial z^2}\right)_j^n - \frac{x_j\Delta x^2}{6L_n}\left(\frac{\partial^3\tilde{u}}{\partial x^3}\right)_j^n + \frac{c\Delta x^2}{12L_n^2}\left(\frac{\partial^4\tilde{u}}{\partial x^4}\right)_j^n = O(\Delta z) + O(\Delta x^2) \quad (4.110)$$

Άρα υπάρχουν δύο σταθερές K_1 και K_2 εξαρτώμενες από τις παραμέτρους του προβλήματος, έτσι ώστε η απόλυτη τιμή του τελεστή Φ να είναι μικρότερη η ίση από $K_1(\Delta z) + K_2(\Delta x)^2$ για οσοδήποτε μικρά Δz, Δx. Όσο μικρότερες τιμές του Δz και Δx θεωρήσουμε για τη λύση του προβλήματος με τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών τόσο καλύτερη σύγκλιση πραγματικής και αριθμητικής λύσης θα έχουμε. Κατά συνθήκη η επιλογή αριθμητικών παραμέτρων επιβάλλει $\Delta z <<< \Delta x$. Παρατηρώντας την σχέση (4.110) μπορούμε να συμπεράνουμε ότι ο κύριος παράγοντας που επηρεάζει το σφάλμα προσέγγισης είναι αυτός που αφορά το Δx. Ο συντελεστής K_2 εξαρτάται από τις παραγώγους της u ως προς x, τη χωρική μεταβλητή x και τη χρονική μεταβλητή $L_n=1-b+z_n$. Το χωρικό σημείο των αριθμητικών υπολογισμών το οποίο επηρεάζεται σημαντικά από το αριθμητικό λάθος είναι κοντά στο δεξιό σύνορο όπου οι παράγωγοι της u ως προς x είναι σημαντικές και στην αρχή της εφαρμογής του αλγορίθμου όπου επίσης η χρονική μεταβλητή παίρνει σημαντικά χαμηλές τιμές. Αυτό φαίνεται στα αποτελέσματα όπου κοντά στο δεξιό σύνορο υπάρχει σημαντική ασυμβατότητα στα αποτελέσματα από το ευθύ με το αντίστροφο πρόβλημα (Εικ.3-2α – 3-2γ). Ως προς τη κεντρική καθίζηση είναι φανερό ότι δεν επηρεάζεται από το σφάλμα προσέγγισης, όπως και στη προηγούμενη μέθοδο.

3.3. Εφαρμογή στη μέθοδο κανονικοποίησης u_{xxzz}

Σύμφωνα με τα παραπάνω αντικαθιστώντας στο τελεστή Φ_2, όπου:

$$\left(-\frac{\nu}{\Delta x^2\Delta z^2}\right)u_{j+1}^{n+1}+\left(\frac{1}{\Delta z}+\frac{2\nu}{\Delta x^2\Delta z^2}\right)u_j^{n+1}+\left(-\frac{\nu}{\Delta x^2\Delta z^2}\right)u_{j-1}^{n+1}=$$
$$+\left(-\frac{2\nu}{\Delta x^2\Delta z^2}-\frac{c}{L_n^2\Delta x^2}+\frac{x_j}{2L_n\Delta x}\right)u_{j+1}^{n}$$
$$+\left(\frac{1}{\Delta z}+\frac{4\nu}{\Delta x^2\Delta z^2}+\frac{2c}{L_n^2\Delta x^2}\right)u_j^{n} \tag{4.111}$$
$$+\left(-\frac{2\nu}{\Delta x^2\Delta z^2}-\frac{c}{L_n^2\Delta x^2}-\frac{x_j}{2L_n\Delta x}\right)u_{j+1}^{n}$$
$$+\left(+\frac{\nu}{\Delta x^2\Delta z^2}\right)u_{j+1}^{n-1}+\left(-\frac{2\nu}{\Delta x^2\Delta z^2}\right)u_j^{n-1}+\left(+\frac{\nu}{\Delta x^2\Delta z^2}\right)u_{j-1}^{n-1}$$

Έχουμε ως αποτέλεσμα (Παράρτημα ΙΑ):

$$\Phi_2(\tilde{u}_\varepsilon)=\frac{\Delta z}{2}\left(\frac{\partial^2\tilde{u}_\varepsilon}{\partial z^2}\right)_j^n+\frac{1}{6}\frac{x_j\Delta x^2}{L_n}\left(\frac{\partial^3\tilde{u}_\varepsilon}{\partial x^3}\right)_j^n=O(\Delta z)+O(\Delta x^2) \tag{4.112}$$

Άρα υπάρχουν δύο σταθερές K_3 και K_4 εξαρτώμενες από τις παραμέτρους του προβλήματος, έτσι ώστε η απόλυτη τιμή του τελεστή Φ να είναι μικρότερη η ίση από $K_3(\Delta z)+K_4(\Delta x^2)$ για οσοδήποτε μικρά Δz, Δx. Όσο μικρότερες τιμές του Δz και Δx θεωρήσουμε για τη λύση του προβλήματος με τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών τόσο καλύτερη σύγκλιση πραγματικής και αριθμητικής λύσης θα έχουμε. Κατά συνθήκη η επιλογή αριθμητικών παραμέτρων επιβάλλει $\Delta z <<< \Delta x$. Παρατηρώντας την σχέση (4.112) μπορούμε να συμπεράνουμε ότι ο κύριος παράγοντας που επηρεάζει το σφάλμα προσέγγισης είναι αυτός που αφορά το Δx. Ο συντελεστής K_4 εξαρτάται από την δεύτερης τάξης παράγωγο της u ως προς x, τη χωρική μεταβλητή x και τη χρονική μεταβλητή L_n=1-b+z_n. Το χωρικό σημείο των αριθμητικών υπολογισμών το οποίο επηρεάζεται σημαντικά από το αριθμητικό σφάλμα είναι και σε αυτή τη περίπτωση κοντά στο δεξιό σύνορο, λιγότερο από τη προηγούμενη μέθοδο αφού η παράμετρος L_n, είναι στη δύναμη –1. Στο σημείο αυτό οι παράγωγοι της u ως προς x είναι σημαντικές ενώ στην αρχή της εφαρμογής του αλγορίθμου η «χρονική» μεταβλητή παίρνει σημαντικά χαμηλές τιμές. Αυτό φαίνεται στα αποτελέσματα (Εικ. 3-3α – 3-3γ), όπου κοντά στο δεξιό σύνορο υπάρχει σημαντική ασυμβατότητα στα αποτελέσματα από το ευθύ με το αντίστροφο πρόβλημα. Ως προς τη κεντρική καθίζηση είναι φανερό ότι δεν επηρεάζεται από το σφάλμα προσέγγισης, όπως και στη προηγούμενη μέθοδο κανονικοποίησης.

4. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 4

Στο Κεφάλαιο 4 μελετάται η ευστάθεια και η σύγκλιση του αριθμητικού αλγορίθμου για το αντίστροφο πρόβλημα βαθιάς καθίζησης το οποίο στο προηγούμενο Κεφάλαιο επιλύθηκε αριθμητικά με χρήση κανονικοποιήσεων. Η ευστάθεια μελετάται στη βάση των σειρών Fourier με χρήση της γενικευμένης συνθήκης ευστάθειας von Neumman. Παρουσιάζεται το θεωρητικό υπόβαθρο για τη μελέτη ευστάθειας και εφαρμόζεται για τις δύο κανονικοποίησεις που εφαρμόστηκαν στο προηγούμενο Κεφάλαιο.

Η ευστάθεια, κατά von Neumann, του αριθμητικού αλγορίθμου της κανονικοποίησης με τη μέθοδο u_{xxxx} επιτυγχάνεται με κατάλληλες επιλογές της παραμέτρου κανονικοποίησης ε και κατάλληλη επιλογή του βάθους nΔz για το οποίο επιλύεται αριθμητικά το αντίστροφο πρόβλημα, το οποίο επηρεάζει τη παράμετρο L_n.

Η εξασφάλιση της αριστερής ανισότητας της σχέσης (4.59) δεν αφορά μόνο στην ευστάθεια του αλγορίθμου όσο αφορά στη σύγκλιση αριθμητικής και ακριβούς λύσης αφού η μορφή της χρονικής μεταβολής του προβλήματος είναι αυξητική. Όσο πιο μικρό είναι το φράγμα του συντελεστή $f_{\Delta x}$ το οποίο επίσης επηρεάζεται από τις παραπάνω αναφερόμενες παραμέτρους ε και L_n, τόσο περισσότερο επιτυγχάνεται η ευστάθεια αλλά και ρυθμίζεται ο συντελεστής μεγέθυνσης της αριθμητικής προσέγγισης του προβλήματος ώστε να συγκλίνει στα αποτελέσματα της ακριβούς λύσης.

Κατά όμοιο τρόπο προκύπτει και η συνθήκη ευστάθειας για τον αριθμητικό αλγόριθμο επίλυσης του αντιστρόφου προβλήματος με τη μέθοδο κανονικοποίησης u_{xxzz}. Οι παράμετροι από τις οποίες εξαρτάται η ευστάθεια είναι η παράμετρος κανονικοποίησης ν και η χρονική μεταβλητή L_n.

Σύμφωνα με τις υποθέσεις που έγιναν για την ευστάθεια, η λύση του προβλήματος με τη χρήση των πεπερασμένων διαφορών συγκλίνει στην ακριβής λύση εάν για Δx, Δt τείνουν στο 0, η συνθήκη ευστάθειας ικανοποιείται. Στο Κεφάλαιο 4 η ταχύτητα σύγκλισης στη βάση του σφάλματος προσέγγισης με χρήση σειρών Taylor, για τις δύο μεθόδους κανονικοποίησης του αντιστρόφου προβλήματος βαθιάς καθίζησης.

Για τη μέθοδο κανονικοποίησης u_{xxxx} προκύπτει ότι υπάρχουν οι παράμετροι K_1 και K_2 εξαρτώμενες από τις παραμέτρους του προβλήματος, έτσι ώστε η απόλυτη τιμή του τελεστή Φ να είναι μικρότερη η ίση από $K_1(\Delta z) + K_2(\Delta x)^2$ για οσοδήποτε μικρά Δz, Δx. Όσο μικρότερες τιμές του Δz και Δx θεωρήσουμε για τη λύση του προβλήματος με τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών τόσο καλύτερη σύγκλιση πραγματικής και αριθμητικής λύσης θα έχουμε.

Ο συντελεστής K_2 εξαρτάται από τις παραγώγους της u ως προς x, τη χωρική μεταβλητή x και τη χρονική μεταβλητή L_n=1-b+z_n. Το χωρικό σημείο των αριθμητικών υπολογισμών το οποίο επηρεάζεται σημαντικά από το αριθμητικό λάθος είναι κοντά στο δεξιό σύνορο όπου οι παράγωγοι της u ως προς x είναι σημαντικές και στην αρχή της εφαρμογής του αλγορίθμου όπου επίσης η χρονική μεταβλητή παίρνει σημαντικά χαμηλές τιμές. Αυτό φαίνεται στα αποτελέσματα όπου κοντά στο δεξιό σύνορο υπάρχει σημαντική ασυμβατότητα στα αποτελέσματα από το ευθύ με το αντίστροφο πρόβλημα (Εικ.2-10α – 2-10γ). Ως προς τη κεντρική καθίζηση είναι φανερό ότι δεν επηρεάζεται από το σφάλμα προσέγγισης.

Όσον αφορά τη μέθοδο κανονικοποίησης u_{xxzz} προκύπτει ότι υπάρχουν οι παράμετροι K_3 και K_4 εξαρτώμενες από τις παραμέτρους του προβλήματος, έτσι ώστε η απόλυτη τιμή του τελεστή Φ να είναι μικρότερη η ίση από $K_3(\Delta z)+ K_4(\Delta x^2)$ για οσοδήποτε μικρά Δz, Δx. Όσο μικρότερες τιμές του Δz και Δx θεωρήσουμε για τη λύση του προβλήματος με τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών, τόσο καλύτερη σύγκλιση πραγματικής και αριθμητικής λύσης θα έχουμε.

Κατά συνθήκη η επιλογή αριθμητικών παραμέτρων επιβάλλει Δz<<<Δx. Ο συντελεστής K_4 εξαρτάται από την δεύτερης τάξης παράγωγο της u ως προς x, τη χωρική μεταβλητή x και τη χρονική μεταβλητή L_n=1-b+z_n. Το χωρικό σημείο των αριθμητικών υπολογισμών το οποίο επηρεάζεται σημαντικά από το αριθμητικό σφάλμα είναι και σε αυτή τη περίπτωση κοντά στο δεξιό σύνορο, λιγότερο από τη προηγούμενη μέθοδο αφού η παράμετρος L_n, είναι στη δύναμη –1. Στο σημείο αυτό οι παράγωγοι της u ως προς x είναι σημαντικές ενώ στην αρχή της εφαρμογής του αλγορίθμου η «χρονική» μεταβλητή παίρνει σημαντικά χαμηλές τιμές. Αυτό φαίνεται στα αποτελέσματα (Εικ. 2-11α – 2-11γ), όπου κοντά στο δεξιό σύνορο υπάρχει σημαντική ασυμβατότητα στα αποτελέσματα από το ευθύ με το αντίστροφο πρόβλημα. Ως προς τη κεντρική καθίζηση είναι φανερό ότι δεν επηρεάζεται από το σφάλμα προσέγγισης, όπως και στη προηγούμενη μέθοδο κανονικοποίησης.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 4

1. **Richtmeyer, R.D. and Morton, K.W.**, *Difference methods for initial value problems*, John Wiley & Sons, 1967