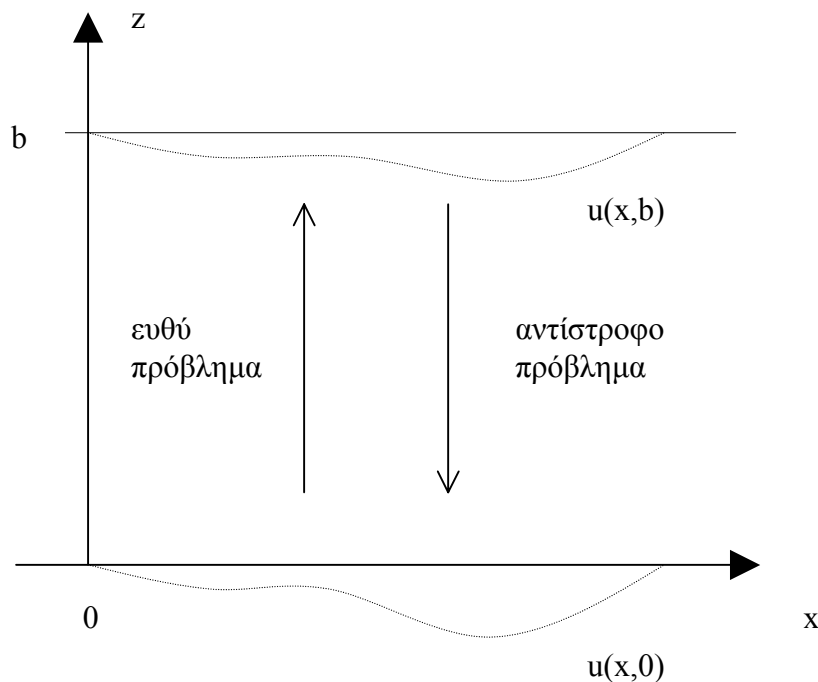


**ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3^ο ΤΟ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΒΑΘΙΑΣ
ΚΑΘΙΖΗΣΗΣ - ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ
ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ**

1. ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΔΙΑΧΥΣΗΣ-ΜΕΤΑΔΟΣΗΣ ΒΑΘΙΑΣ ΚΑΘΙΖΗΣΗΣ¹

1.1. Εισαγωγή

Η διαδικασία της άντλησης πετρελαίου ή νερού σε μεγάλης κλίμακας προβλήματα οδηγεί σε μεγάλη καθίζηση στην επιφάνεια της γης στη γενική περίπτωση. Η ποσότητα της καθίζησης μπορεί να είναι αρκετά μεγάλη ώστε να επιφέρει σημαντικές και αρκετές φορές καταστρεπτικές συνέπειες στις κατασκευές στην επιφάνεια της γης. Στο ευθύ πρόβλημα διάχυσης-μετάδοσης καθίζησης χρησιμοποιώντας ως δεδομένα – αρχικές συνθήκες τη καθίζηση στη βάση του πετάσματος καθίζησης υπολογίζουμε την ποσότητα και τη μορφή του μηχανισμού καθίζησης στην επιφάνεια της γης. Η δυσκολία στο πρόβλημα αυτό είναι ότι είναι σχεδόν αδύνατο να γνωρίζουμε με ακρίβεια την καθίζηση στη βάση του πετάσματος. Αντίθετα, το «γεγονός» του φαινομένου αυτού, αυτό που μπορούμε να παρατηρήσουμε και να μετρήσουμε είναι η καθίζηση στην επιφάνεια της γης. Η επίλυση του προβλήματος χρησιμοποιώντας ως αρχικές συνθήκες την επιφανειακή καθίζηση με σκοπό τον υπολογισμό της καθίζησης βάσης ανάγεται στην επίλυση του αντιστρόφου, στο βάθος (χρόνο), προβλήματος διάχυσης-μετάδοσης βαθιάς καθίζησης (Εικ. 3-1).



Εικ. 3-1 : Ευθύ και Αντίστροφο Πρόβλημα βαθιάς καθίζησης

¹ Αγγλ. *Inverse SDC problem (ISDC)*

Τα αντίστροφα προβλήματα, γενικά, είναι μη καλώς ορισμένα, που σημαίνει ότι η ύπαρξη, η μοναδικότητα και η ευστάθεια της λύσης δεν μπορούν να εξασφαλιστούν. Αρκετές μέθοδοι κανονικοποίησης έχουν δημιουργηθεί για τα προβλήματα αυτού του είδους. Σε αυτή την εργασία, σύμφωνα με τη δυϊκή μορφή του προβλήματος (διάχυση-μετάδοση) παρουσιάζεται η εφαρμογή δύο μεθόδων κανονικοποίησης που αφορά το αντίστοιχο ευθύ επίπεδο πρόβλημα βαθιάς καθίζησης: Η μέθοδος της οιονεί-αντιστροφής¹ που προτείνεται από τον J.L.Lions για αντίστροφα παραβολικά προβλήματα [1] και η μέθοδος u_{xxzz} .

1.2. Τοποθέτηση του αντιστρόφου προβλήματος

Σύμφωνα με τη παράγραφο 1.3 του Κεφαλαίου 2 το ευθύ πρόβλημα διάχυσης-μετάδοσης καθίζησης περιγράφεται από τις παρακάτω σχέσεις, με κατάλληλη προσαρμογή των ανεξάρτητων και εξαρτημένων μεταβλητών ($\omega \rightarrow u$, $s \rightarrow z$, $\xi \rightarrow x$, $\hat{c} \rightarrow c$):

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{c}{(1-z)^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\xi}{1-z} \frac{\partial u}{\partial x} \quad (3.1\alpha)$$

για

$$0 \leq x \leq 1 \quad ; \quad 0 < z \leq b \quad (3.1\beta)$$

και

$$u(x,0) = w_0^* \quad (\alpha.\sigma.) \quad (3.1\gamma)$$

$$u(1,z) = 0 \quad (\sigma.\sigma.) \quad (3.1\delta)$$

$$u_x(0,z) = 0 \quad (\sigma.\sigma.) \quad (3.1\epsilon)$$

από το οποίο υπολογίζεται η $u(x,b)$ και συγκεκριμένα το αποτέλεσμα της αριθμητικής επίλυσης του παραπάνω αλγορίθμου $u_n(x,b)$. Δηλαδή, δίνεται η κατανομή της καθίζησης στη βάση του πετάσματος καθίζησης και υπολογίζεται η επιφανειακή. Αντίθετα, το φυσικό πρόβλημα, όπως έχει διατυπωθεί νωρίτερα, είναι πως θα υπολογιστεί η καθίζηση στη βάση του πετάσματος, έχοντας ως δεδομένη την επιφανειακή καθίζηση. Σύμφωνα με τη μέθοδο της οιονεί-αντιστροφής [1], το ισοδύναμο μαθηματικό πρόβλημα που προκύπτει από το φυσικό είναι:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{c}{(1-z)^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\xi}{1-z} \frac{\partial u}{\partial x} \quad (3.2\alpha)$$

για

¹ Αγγλ. *The Method of Quasi-Reversibility*

$$0 \leq x \leq 1 \quad ; \quad 0 < z \leq b \quad (3.2\beta)$$

και

$$u(x, b) = u_n(x, b) \quad (\alpha.σ.) \quad (3.2\gamma)$$

$$u(1, z) = 0 \quad (\sigma.σ.) \quad (3.2\delta)$$

$$u_x(0, z) = 0 \quad (\sigma.σ.) \quad (3.2\epsilon)$$

από όπου προκύπτει η w_0^* όπως την ονομάσαμε αρχικά στη διατύπωση που αναφέρεται στο ευθύ πρόβλημα ή $u(x, 0)$ με τον παρόν συμβολισμό στο μαθηματικό προσομοίωμα. Το παραπάνω πρόβλημα αρχικών και συνοριακών τιμών είναι μη καλώς ορισμένο: η ύπαρξη λύσης δεν εξασφαλίζεται ενώ ακόμα και αν υπάρχει λύση, είναι ασταθής.

Αποδεικνύεται ότι η προσθήκη ενός παραβολικού τελεστή 4^{ης} τάξεως στη διαφορική εξίσωση του παραπάνω προβλήματος τοποθετεί το πρόβλημα ως καλώς ορισμένο [1], υπό προϋποθέσεις. Η προσθήκη του τελεστή πρέπει να γίνει όμως με τέτοιο τρόπο ώστε να μην αλλάζει τη μορφή της εξίσωσης και το φυσικό της νόημα ενώ λόγω της τάξης του τελεστή χρειάζονται νέες συνθήκες συμβατές με τις προηγούμενες καθώς και με τη φυσική σημασία του προβλήματος. Με την κατάλληλη προσθήκη του τελεστή, την προσθήκη συνοριακών συνθηκών και μετασχηματισμό της ανεξάρτητης μεταβλητής z , το αντίστροφο πρόβλημα αρχικών και συνοριακών τιμών έχει τη μορφή:

$$\frac{\partial u_\epsilon}{\partial z} = -\frac{c}{(1-b+z)^2} \frac{\partial^2 u_\epsilon}{\partial x^2} + \frac{x}{1-b+z} \frac{\partial u_\epsilon}{\partial x} - \epsilon \frac{\partial^4 u_\epsilon}{\partial x^4} \quad (3.3\alpha)$$

για

$$0 \leq x \leq 1 \quad ; \quad 0 < z \leq b \quad (3.3\beta)$$

και

$$u_\epsilon(x, 0) = u(x, b) \quad (\alpha.σ.) \quad (3.3\gamma)$$

$$u_\epsilon(1, z) = 0 \quad (\sigma.σ.) \quad (3.3\delta)$$

$$(u_\epsilon)_x(0, z) = 0 \quad (\sigma.σ.) \quad (3.3\epsilon)$$

$$(u_\epsilon)_{xx}(1, z) = 0 \quad (\sigma.σ.) \quad (3.3\sigma\tau)$$

Όπως προκύπτει από την σύγκριση των εξισώσεων (3.3α) και (3.2α), η διαφορά τους ανάγεται στη προσθήκη του διαφορικού τελεστή 4^{ης} τάξεως ως προς x πολλαπλασιαζόμενου με ένα πολύ μικρό θετικό αριθμό ο οποίος ονομάζεται παράμετρος κανονικοποίησης και την αλλαγή των προσήμων των όρων 1^{ης} και 2^{ης}

τάξεως ως προς x . Η αλλαγή προσήμου οφείλεται στο μετασχηματισμό της ανεξάρτητης μεταβλητής $z \rightarrow b-z$, έτσι ώστε η μεταβλητή αυτή κατά την αριθμητική επίλυση να παίρνει τιμές $b \rightarrow 0$ και όχι αντίθετα όπως υποδηλώνει το πρόβλημα αρχικών και συνοριακών τιμών (3.2).

Όπως έχουμε ήδη αναφερθεί, η καλή τοποθέτηση του αντιστρόφου προβλήματος πραγματοποιείται με τη χρήση του τελεστή 4^{ns} τάξεως. Η παραμέτρος κανονικοποίησης ε , απαιτείται να είναι μικρή έτσι ώστε για $\varepsilon \rightarrow 0$ η εξίσωση να τείνει στην αρχική εξίσωση. Οπότε η παράμετρος κανονικοποίησης έχει ένα μικρό εύρος τιμών αφού για μεγάλες τιμές αλλοιώνονται τα χαρακτηριστικά του προβλήματος ενώ για πολύ μικρές τιμές εμφανίζει τα χαρακτηριστικά του μη καλώς ορισμένου προβλήματος (3.2) αφού τείνει σε αυτό.

Σημαντική διαφορά όμως αποτελεί και η προσθήκη της συνοριακής συνθήκης (3.2στ). Η συνθήκη αυτή είναι συμβατή τόσο με το μη μετασχηματισμένο ευθύ πρόβλημα όσο και με το πρόβλημα αρχικών και συνοριακών τιμών (3.1) αφού $u|_z = 0$. Η συνοριακή συνθήκη για τον τελεστή 2^{ns} τάξεως επιβάλλεται λόγω της τάξης του τελεστή που χρησιμοποιείται στην εξίσωση (3.3α).

Έτσι τίθεται το αντίστροφο πρόβλημα καλά τοποθετημένο κατά Hadamard χωρίς εξαιρετική αλλοίωση των χαρακτηριστικών της εξίσωσης [1].

1.3. Αριθμητική επίλυση του αντιστρόφου προβλήματος με τη μέθοδο κανονικοποίησης u_{xxxx}

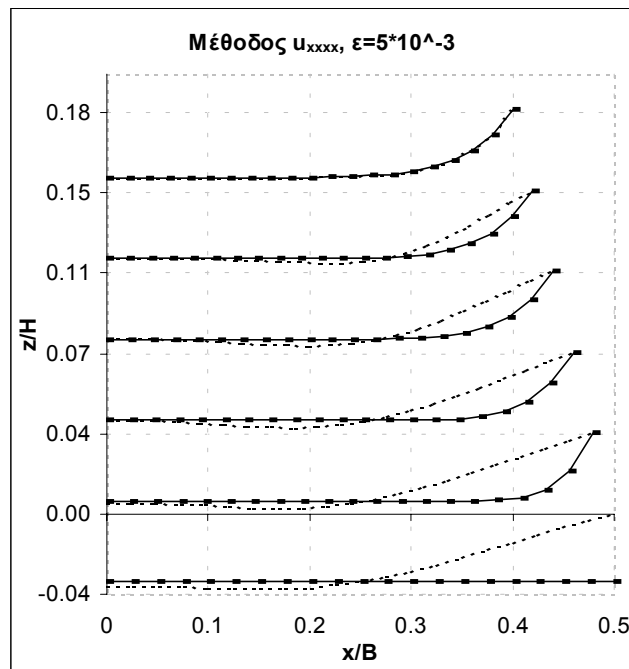
Το παραπάνω αναφερόμενο πρόβλημα αρχικών και συνοριακών τιμών επιλύθηκε με τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών με τα δεδομένα του Δοκιμίου 2. Ο αλγόριθμος επίλυσης που χρησιμοποιήθηκε (μη πεπλεγμένος) εμφανίζεται στη παρακάτω σχέση:

$$\begin{aligned}
 u_j^{n+1} = & u_j^n + \frac{\Delta z}{\Delta x(1-b+z_n)} x_j (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) - \\
 & - \frac{c\Delta z}{\Delta x^2(1-b+z_n)^2} (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) \\
 & - \frac{\varepsilon\Delta z}{\Delta x^4} (u_{j+2}^n - 4u_{j+1}^n + 6u_j^n - 4u_{j-1}^n + u_{j-2}^n)
 \end{aligned} \quad (3.4)$$

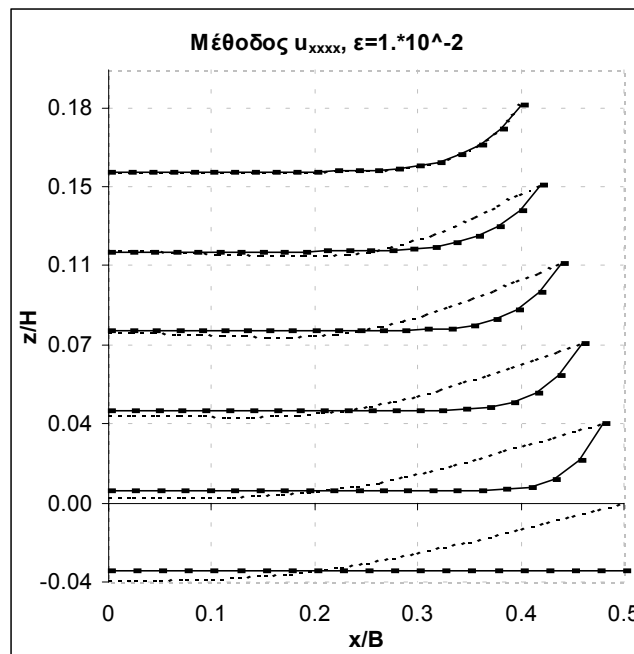
Επιλεκτικά σε αυτή την εργασία παρουσιάζονται αποτελέσματα επίλυσης του αντιστρόφου προβλήματος για το Δοκίμιο 2. Η αριθμητική επίλυση του παραπάνω προβλήματος (Παράρτημα Δ) εμφανίζεται στις Εικόνες 3-2α – 3.2γ, όπου εμφανίζονται τα αποτελέσματα του αντιστρόφου προβλήματος (διακεκομμένη γραμμή) και τα αποτελέσματα στο ευθύ (πλήρης γραμμή). Σημειώνεται τα αποτελέσματα εμφανίζονται στη μορφή $u/B^* = f(x/B, z/H)$ όπου $B^* = (H/B) = 2$. Τα αποτελέσματα της αριθμητικής επίλυσης του προβλήματος αφορούν τιμές της παραμέτρου κανονικοποίησης $0.005 < \varepsilon < 0.0125$. Για τιμές της παραμέτρου ε εκτός του διαστήματος τα αποτελέσματα διαφέρουν σημαντικά από το ευθύ πρόβλημα.

Παρατηρούμε ότι για μικρές τιμές της παραμέτρου κανονικοποίησης ε η κεντρική καθίζηση ($x=0$) πλησιάζει στη λύση στο ευθύ πρόβλημα. Επίσης, ανεξάρτητα από τις τιμές της παραμέτρου ε , από την αρχή της λύσης του αντιστρόφου προβλήματος

παρατηρείται απόκλιση της καμπυλότητας της λύσης κοντά στο δεξιό σύνορο μεταξύ των αποτελεσμάτων στο ευθύ και το αντίστροφο πρόβλημα. Η παρατήρηση αυτή θα αναλυθεί αργότερα σε αυτή την εργασία.



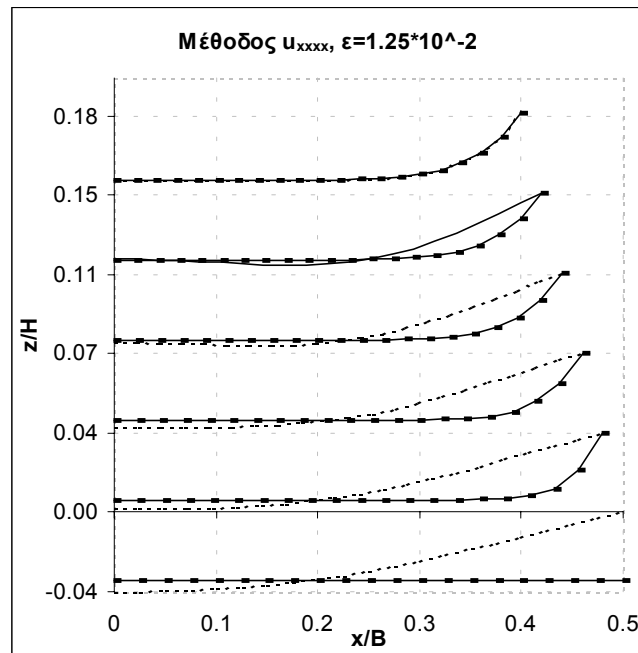
Εικ. 3-2(α) : Σύγκριση αποτελεσμάτων για το Ευθύ και το Αντίστροφο Πρόβλημα βαθιάς καθίζησης



Εικ. 3-2(β) : Σύγκριση αποτελεσμάτων για το Ευθύ και το Αντίστροφο Πρόβλημα βαθιάς καθίζησης

Όπως αναφέρεται σε προηγούμενες εργασίες, [1] η χρήση του κλειστού τύπου αλγορίθμου στη μέθοδο κανονικοποίησης u_{xxxx} , δεν μπορεί να μας δώσει αξιόπιστα

αποτελέσματα σε ορισμένες περιπτώσεις: Για μεγάλες τιμές της «χρονικής» μεταβλητής z , τα αποτελέσματα της αριθμητικής επίλυσης του αντιστρόφου προβλήματος βαθιάς καθίζησης (ISDC) διαφέρουν σημαντικά από τα αποτελέσματα στο ευθύ πρόβλημα. Αν b είναι το βάθος για το οποίο έχει επιλυθεί το ευθύ πρόβλημα, τότε η αρχική συνθήκη για το αντίστροφο πρόβλημα δεν μπορεί να τοποθετηθεί για τιμές του βάθους μεγαλύτερες από $z \approx 0.25b$. Οπότε επιλύεται αριθμητικά το ευθύ πρόβλημα για $z \approx 0.25b$ και η λύση του χρησιμοποιείται ως αρχικές συνθήκες για το αντίστροφο πρόβλημα.



Εικ. 3-2(γ) : Σύγκριση αποτελεσμάτων για το Ευθύ και το Αντίστροφο Πρόβλημα βαθιάς καθίζησης

Στο σημείο αυτό θα πρέπει να αναφερθούμε στην μέθοδο πεπερασμένων διαφορών που χρησιμοποιήθηκε. Αντίθετα με την επίλυση στο ευθύ πρόβλημα το οποίο λύθηκε με χρήση μεθόδου πεπερασμένων διαφορών έμμεσης διατύπωσης, το αντίστροφο επιλύεται με χρήση άμεσης μεθόδου, αφού στη περίπτωση την οποία μελετάμε και οι δύο έχουν περίπου ίδια αποτελέσματα, ενώ είναι το ίδιο ασταθής.

1.4. Αριθμητική επίλυση του αντιστρόφου προβλήματος με τη μέθοδο κανονικοποίησης u_{xxxx}

Η περιορισμένη χρονικά λύση του αντιστρόφου προβλήματος με τη μέθοδο u_{xxxx} , προκύπτει από τον ισχυρό διαχυτικό χαρακτήρα του τελεστή 4^{th} τάξεως. Η φύση του προβλήματος (διάχυση-μετάδοση) αλλά και η περιορισμένη χρονικά λύση με τη προηγούμενη μέθοδο επιβάλλει την επίλυση του αντιστρόφου προβλήματος με τη χρήση ενός τελεστή με περισσότερο μεταδοτικό χαρακτήρα.

Στην εργασία αυτή για την επίλυση του αντιστρόφου προβλήματος βαθιάς καθίζησης χρησιμοποιήθηκε ο τελεστής u_{xxxx} , με χρήση κατάλληλων αρχικών και συνοριακών συνθηκών τόσο ως προς το φυσικό πρόβλημα αλλά και ως προς το μαθηματικό προσομοίωμα:

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial z} = -\frac{c}{(1-b+z)^2} \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x^2} + \frac{x}{1-b+z} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x} + v \frac{\partial^4 u_\varepsilon}{\partial x^2 \partial z^2} \quad (3.4\alpha)$$

για

$$0 \leq x \leq 1 \quad ; \quad 0 < z \leq b \quad (3.4\beta)$$

και

$$u_\varepsilon(x,0) = u(x,b) \quad (\alpha.\sigma) \quad (3.4\gamma)$$

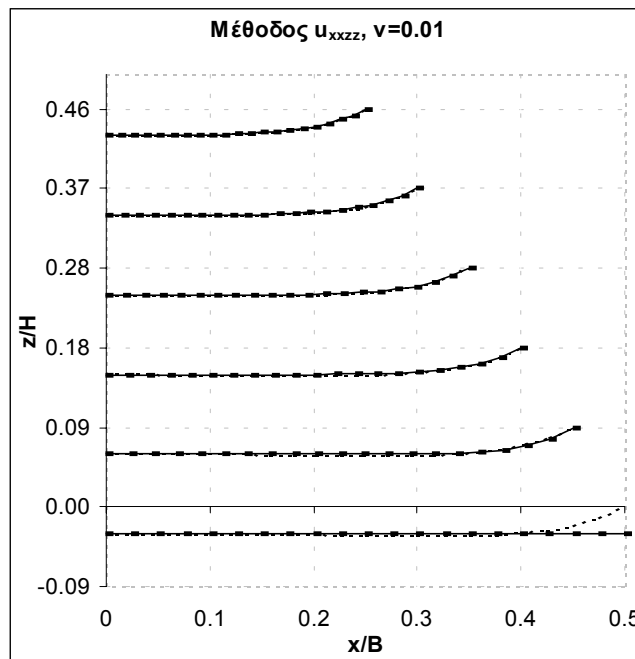
$$(u_\varepsilon)_x(0,z) = 0 \quad (\sigma.\sigma.) \quad (3.4\delta)$$

$$u_\varepsilon(1,z) = 0 \quad (\sigma.\sigma.) \quad (3.4\epsilon)$$

$$(u_\varepsilon)_z(x,0) = -u_z(x,b) \quad (\alpha.\sigma) \quad (3.4\sigma\tau)$$

Η διαφορά στις αρχικές και συνοριακές συνθήκες ανάμεσα στο ευθύ και το αντίστροφο πρόβλημα με τη μέθοδο κανονικοποίησης u_{xxzz} , εντοπίζεται στη σχέση 3.4στ. Η πρόσθετη αρχική συνθήκη αναφέρεται στα πρώτα δύο επίπεδα βάθους από την επιφάνεια και απλά θέτει την καθίζηση γνωστή σε αυτά τα στρώματα αφού μπορεί να υπολογιστεί από γεωτρήσεις.

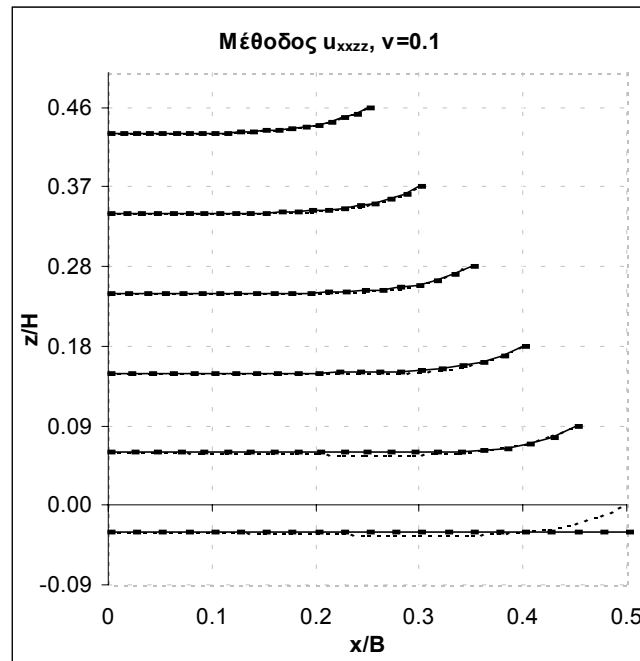
Σε αυτή τη μέθοδο, όπως και στη προηγούμενη η κανονικοποιημένη κατανομή συμβολίζεται με u_ε ανεξάρτητα από το σύμβολο του συντελεστή κανονικοποίησης v .



Εικ. 3-3(α) : Σύγκριση αποτελεσμάτων για το Ευθύ και το Αντίστροφο Πρόβλημα βαθιάς καθίζησης

Η επίλυση του παραπάνω προβλήματος αρχικών και συνοριακών τιμών έγινε χρησιμοποιώντας την αριθμητική μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών. Ο αλγόριθμος επίλυσης του προβλήματος 3.4 εμφανίζεται στη παρακάτω σχέση:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta z} = -\frac{c}{(1-b+z_n)^2} \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} + \frac{x_j}{(1-b+z_n)} \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} + v \left(\frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_{j+1}^n + u_{j+1}^{n-1}}{\Delta x^2 \Delta z^2} - 2 \frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{\Delta x^2 \Delta z^2} + \frac{u_{j-1}^{n+1} - 2u_{j-1}^n + u_{j-1}^{n-1}}{\Delta x^2 \Delta z^2} \right) \quad (3.5)$$

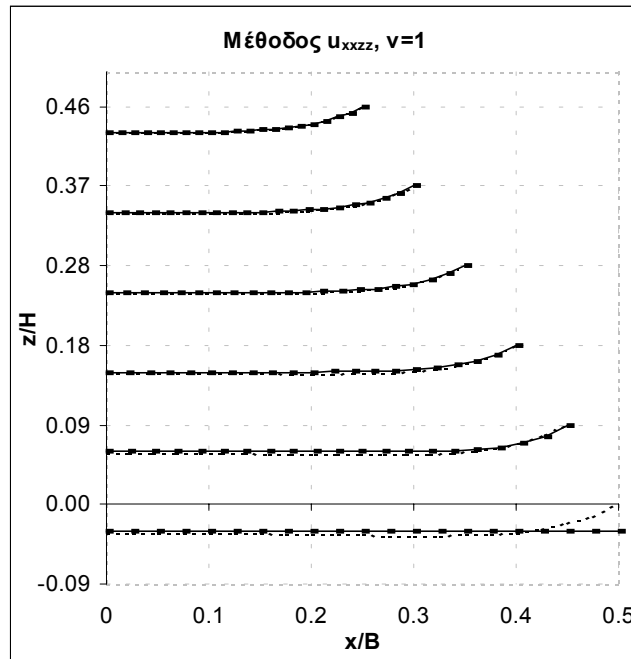


Εικ. 3-3(β) : Σύγκριση αποτελεσμάτων για το Ευθύ και το Αντίστροφο Πρόβλημα βαθιάς καθίζησης

Τα αποτελέσματα της αριθμητικής επίλυσης (Παράρτημα Ε) εμφανίζονται συγκριτικά με το ευθύ πρόβλημα στις Εικόνες 3-3(α-γ). Για αυτήν τη μέθοδο κανονικοποίησης, οι τιμές της παραμέτρου v που χρησιμοποιήθηκαν κυμαίνονται από 0.01 έως 1. Σημειώνεται τα αποτελέσματα εμφανίζονται στη μορφή $u/B^* = f(x/B, z/H)$ όπου $B^* = (H/B) = 2$.

Για μικρότερες τιμές της παραμέτρου v , εμφανίζεται σημαντική αστάθεια στη λύση, αφού ο συντελεστής της κανονικοποίησης τείνει στο 0 οπότε το κανονικοποιημένο πρόβλημα τείνει στο μη κανονικοποιημένο, ενώ για τιμές μεγαλύτερες του 1 τα αποτελέσματα, τουλάχιστον ως προς την κεντρική καθίζηση, αποκλίνουν σημαντικά από το ευθύ πρόβλημα.

Σε σύγκριση με τα αποτελέσματα από τη προηγούμενη μέθοδο, χρησιμοποιώντας τη μέθοδο κανονικοποίησης u_{xzz} μπορούμε να επιλύσουμε το αντίστροφο πρόβλημα για περισσότερο βάθος (μεγαλύτερο από το διπλάσιο). Παρατηρείται, επίσης μικρότερη απόκλιση της καμπυλότητας της λύσης κοντά στο δεξιό σύνορο.



Εικ. 3-3(γ) : Σύγκριση αποτελεσμάτων για το Ευθύ και το Αντίστροφο Πρόβλημα βαθιάς καθίζησης

2. ΓΡΑΜΜΙΚΟΠΟΙΗΜΕΝΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ¹

2.1. Εισαγωγή

Σε αυτή την παράγραφο της εργασίας αναφερόμαστε στη γραμμικοποιημένη ανάλυση ευστάθειας διαφορικών εξισώσεων. Παρουσιάζεται θεωρία που αφορά την καλή τοποθέτηση προβλημάτων αρχικών τιμών για γραμμικές διαφορικές εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές. Στη πραγματικότητα, οι περισσότερες εφαρμογές αφορούν μη γραμμικά προβλήματα αρχικών και συνοριακών τιμών, τις περισσότερες φορές με μη σταθερούς συντελεστές, όπως συμβαίνει και σε αυτή την εργασία.

Οι δύο πιο σημαντικές μέθοδοι ελέγχου ευστάθειας για διαφορικούς τελεστές είναι η μέθοδος Fourier και η μέθοδος της ενέργειας². Η πρώτη μέθοδος μπορεί να εφαρμοστεί μόνο σε διαφορικές εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές ενώ η δεύτερη εφαρμόζεται και σε μη γραμμικές εξισώσεις με μεταβλητούς συντελεστές. Συχνά επιλέγεται η πρώτη μέθοδος, ακόμα και αν οι συντελεστές είναι μεταβλητοί, θεωρώντας τους παραμέτρους με τιμές σε καθορισμένο διάστημα. Η θεώρηση αυτή είναι δυνατή μόνο όταν δεν αλλάζουν τη μορφή της διαφορικής εξίσωσης ή δεν παραβιάζουν τις βασικές συνθήκες ευστάθειας των διαφορικών εξισώσεων. Τότε η μελέτη ευστάθειας με τη μέθοδο Fourier αποτελεί μία σαφής ένδειξη για την καλή τοποθέτηση του προβλήματος.

Στην εργασία αυτή αναπτύσσεται θεωρία που αφορά τη μέθοδο Fourier και εφαρμόζεται στο αντίστροφο πρόβλημα βαθιάς καθίζησης και για τις δύο μεθόδους κανονικοποίησης.

¹ Αγγλ. Linear Stability Analysis

² Αγγλ. Energy method

2.2. Προβλήματα αρχικών τιμών στο L^2 με σταθερούς συντελεστές

Ξεκινάμε με μερικές παρατηρήσεις. Θα εργαστούμε στο σύνολο Banach $L^2 = L^2(\mathbb{R}^d)$ με την νόρμα

$$\|u\| = \left(\int_{\mathbb{R}^d} |u(x)|^2 dx \right)^{1/2} \quad (3.6)$$

Ορίζουμε έναν πολυδείκτη $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ με α_j μη-αρνητικούς ακέραιους

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_d^{\alpha_d} \quad (3.7)$$

Θέτουμε $D = \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_d} \right)$ και ακολούθως έχουμε την ακόλουθη μορφή για γενικές παραγώγους τάξεως $|\alpha| = \sum_j \alpha_j$, δηλαδή

$$D^\alpha u = i^{-|\alpha|} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{\alpha_1} \dots \left(\frac{\partial}{\partial x_d} \right)^{\alpha_d} \quad (3.8)$$

Δηλώνουμε με το C^∞ το σύνολο των άπειρα παραγωγίσιμων μιγαδικών συναρτήσεων μέσα στο \mathbb{R}^d και με το C_0^∞ το υποσύνολο των συναρτήσεων το οποίο είναι συμπαγές. Επίσης εισάγουμε το σύνολο J του $u \in C^\infty$ έτσι ώστε για κάθε πολυδείκτη α, β

$$\sup_{\mathbb{R}^d} |x^\alpha D^\beta u(x)| < \infty \quad (3.9)$$

Ισχύει ότι $C_0^\infty \subset J \subset C^\infty$ και είναι γνωστό ότι C_0^∞ και J είναι πυκνά στο L^2 .

Για ολοκληρώσιμο u πάνω στο \mathbb{R}^d ορίζουμε τον μετασχηματισμό Fourier

$$\hat{u}(\xi) = \int u(x) e^{-i\langle x, \xi \rangle} dx, \quad \langle x, \xi \rangle = \sum_{j=1}^d x_j \xi_j \quad (3.10)$$

Είναι γνωστό ότι αν $u \in J$ τότε $\hat{u} \in J$ [2]. Επιπλέον για $u \in J$ έχουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier

$$u(x) = (2\pi)^{-d} \int \hat{u}(\xi) e^{i\langle x, \xi \rangle} d\xi \quad (3.11)$$

και την σχέση Parseval

$$\|\hat{u}\| = (2\pi)^{d/2} \|u\| \quad (3.12)$$

και ως συνέπεια του ακόλουθου, το σύνολο \hat{C}_0^∞ των συναρτήσεων στο J με τον μετασχηματισμό Fourier να ανήκει στο C_0^∞ είναι πυκνό στο L^2 .

Στην συνέχεια θα θεωρήσουμε το διάνυσμα συναρτήσεων N διαστάσεων $u(x) = (u_1(x), \dots, u_N(x))$. Είναι φυσικό να ορίσουμε $u(x) \in L^2$ και αντίστοιχα τα σύνολα J , C_0^∞ κλπ αξιώνοντας ότι αυτό ισχύει για κάθε συνιστώσα $u_j, j=1, \dots, N$. Σημειώνεται ότι οι απλές κάθετες γραμμές υποδηλώνουν νόρμα ως προς διανύσματα διάστασης N π.χ

$$|v| = \left(\sum_{j=1}^N |v_j|^2 \right)^{1/2} \quad (3.13)$$

και για πίνακες $N \times N$,

$$|A| = \sup_{v \neq 0} \frac{|Av|}{|v|} \quad (3.14)$$

και οι διπλές κάθετες γραμμές υποδηλώνουν νόρμα ως προς τον χώρο των L^2 συναρτήσεων έτσι ώστε για διάνυσμα N -διαστάσεων $u(x) \in L^2$,

$$\|u\| = \left(\int |u(x)|^2 dx \right)^{1/2} \quad (3.15)$$

Επίσης παρακάτω θα χρησιμοποιήσουμε τα ακόλουθα:

Λήμμα 1 [2]: Έστω M ένα πυκνό υποσύνολο του L^2 και ας είναι $\alpha(\xi)$ ένας συνεχής πίνακας $N \times N$.

Τότε

$$\sup_{v \in M} \frac{\|\alpha v\|}{\|v\|} = \sup_{\xi} |\alpha(\xi)| \quad (3.16)$$

και $u(x, t)$ ένα διάνυσμα συναρτήσεων N διαστάσεων ορισμένο για $x \in \mathbb{R}^d$ και $t \geq 0$. Θεωρούμε το πρόβλημα αρχικής τιμής

$$\frac{\partial u}{\partial t} = P(D)u = \sum_{|a| \leq M} P_a D^a u, \quad t \geq 0 \quad (3.17\alpha)$$

$$u(x, 0) = v(x), \quad (3.17\beta)$$

όπου P_a είναι σταθεροί πίνακες $N \times N$ και όπου μπορούμε να θεωρήσουμε P_u να είναι ορισμένο για $u \in J$ και

$$P(\xi) = \sum_{|\alpha| \leq M} P_\alpha \xi^\alpha, \xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \cdots \xi_d^{\alpha_d}$$

Τότε

Θεώρημα 1 [2]: Το πρόβλημα αρχικής τιμής (3.17) είναι καλώς ορισμένο στο L^2 αν και μόνο αν για κάθε $T \geq 0$, υπάρχει ένα C έτσι ώστε

$$|\exp(tP(\xi))| \leq C, \quad \xi \in \mathbb{R}^d, \quad 0 \leq t \leq T \quad (3.18)$$

Απόδειξη: Υποθέτουμε ότι η (3.18) ισχύει. Ας είναι $v \in J$ και θεωρούμε

$$u(x, t) = (2\pi)^{-d} \int \exp(tP(\xi)) \hat{v}(\xi) e^{i\langle x, \xi \rangle} d\xi \quad (3.19)$$

Με την παραγωγή της παραπάνω σχέσης ότι η $u(x, t)$ ικανοποιεί την (3.17α) και είναι επίσης μία λύση για το πρόβλημα αρχικών τιμών (3.17). Εφόσον για $t \geq 0$, $u(x, t) \in J$ είναι μια ακριβής λύση [2] και είναι επίσης μοναδική. Έτσι

$$E_0(t)v = u(x, t) \text{ με } D_0 = J \quad (3.20)$$

Από τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier και το θεώρημα Parseval

$$\begin{aligned} \|u(\cdot, t)\|^2 &= (2\pi)^{-d} \int |\exp(tP(\xi)) \hat{v}(\xi)|^2 d\xi \\ &\leq C^2 (2\pi)^{-d} \int |\hat{v}(\xi)|^2 d\xi = C^2 \|v\|^2 \end{aligned} \quad (3.21)$$

Εφόσον το J είναι πυκνό στο L^2 προκύπτει ότι το πρόβλημα αρχικής τιμής είναι καλώς ορισμένο.

Τώρα θέλουμε να αποδείξουμε την αναγκαιότητα του (3.18) για την καλή τοποθέτηση. Έστω $v \in \hat{C}_0^\infty$ και ορίζουμε το $u(x, t)$ από τη σχέση (3.19). Αρχικά βρίσκουμε ότι το $u(x, t)$ ικανοποιεί το πρόβλημα αρχικής τιμής (3.17) και έτσι $u(x, t) = E(t)v$. Από τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier και το θεώρημα Parseval είναι

$$\|E(t)v\|^2 = (\partial x)^{-d} \int |\exp(tP(\xi)) \hat{v}(\xi)|^2 d\xi \quad (3.22)$$

$$\|v\|^2 = (\partial x)^{-d} \int |\hat{v}(\xi)|^2 d\xi \quad (3.23)$$

έτσι ώστε από το Λήμμα 1,

$$\|E(t)\| = \sup_{\xi} |\exp(tP(\xi))|, \quad (3.24)$$

το οποίο αποδεικνύει την χρησιμότητα του (3.18) εφόσον το \hat{C}_0^∞ είναι πυκνό στο L^2 .

Παράδειγμα 1 Θεωρούμε το συμμετρικό υπερβολικό σύστημα εξισώσεων

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{j=1}^J A_j \frac{\partial u}{\partial x_j} \quad A_j^* = A_j \quad (3.25)$$

Τότε το πρόβλημα αρχικών τιμών για το (3.25) είναι καλώς ορισμένο μέσα στο L^2 γιατί ισχύει

$$|\exp(tP(\xi))| = \left| \exp\left(ti \sum_{j=1}^d A_j \xi_j\right) \right| = 1 \quad (3.26)$$

εφόσον αυτό είναι ένας μοναδιαίος πίνακας.

Πριν προχωρήσουμε στο επόμενο παράδειγμα αναφέρουμε μια λήμμα. Για ένα τυχαίο πίνακα A $N \times N$ με ιδιοτιμές $\lambda_j, j=1, \dots, N$ ορίζουμε

$$\Lambda(A) = \max_j \operatorname{Re}(\lambda_j) \quad (3.27)$$

Τότε έχουμε

Λήμμα 2 Αν A είναι ένας πίνακας $N \times N$ έχουμε για $t \geq 0$

$$|\exp(tA)| \leq \exp(t\Lambda(A)) \sum_{j=0}^{N-1} (2t|A|)^j \quad (3.28)$$

Απόδειξη Βλέπε [2].

Παράδειγμα 2 Θεωρούμε το σύστημα (3.17) και θεωρούμε επίσης το αρχικό μέρος \tilde{P} του P το οποίο αντιστοιχεί στο πολυώνυμο

$$\tilde{P}(\xi) = \sum_{|\alpha|=M} P_\alpha \xi^\alpha \quad (3.29)$$

Λέμε ότι το σύστημα (3.17) είναι παραβολικό σύμφωνα με τη λογική της θεωρίας Petrowski αν υπάρχει ένα $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$\Lambda(\tilde{P}(\xi)) \leq -\delta, \quad |\xi| = 1 \quad (3.30)$$

Το οποίο είναι ισοδύναμο με την ύπαρξη ενός $\delta > 0$ και ενός C έτσι ώστε

$$\Lambda(P(\xi)) \leq -\delta|\xi|^M + C, \quad \xi \in \mathbb{R}^d \quad (3.31)$$

Στην συνέχεια έχουμε ότι αν το (3.17) είναι παραβολικό σύμφωνα με την λογική της θεωρίας Petrowski, το αντίστοιχο πρόβλημα αρχικών τιμών είναι καλώς ορισμένο μέσα στο L^2 .

Απόδειξη [2]

Από το Λήμμα 2 έχουμε για $0 \leq t \leq T$,

$$|\exp(tP(\xi))| \leq C \left[1 + (t|\xi|^M)^{N-1} \right] \exp(-\delta t|\xi|^M), \quad (3.32)$$

το οποίο είναι φραγμένο. Για την ακρίβεια, η εξίσωση θερμότητας δι'αγωγής του Fourier

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

ανήκει σε αυτήν την κατηγορία.

2.3. Εφαρμογή στο αντίστροφο πρόβλημα βαθιάς καθίζησης με τη μέθοδο κανονικοποίησης u_{xxxx}

Στη προηγούμενη παράγραφο επειδή ακριβώς αναφερόμασταν σε αυστηρούς μαθηματικούς όρους χρησιμοποιήθηκε η παραγωγή ως προς το χρόνο t . Από την αρχή της εργασίας αυτής γνωρίζουμε ότι στα προβλήματα που έχουμε αντιμετωπίσει αντιστοιχεί με το βάθος z , οπότε και στην εφαρμογή της μαθηματικής θεωρίας θα χρησιμοποιηθεί με τον ίδιο τρόπο.

Όπως ήδη έχει αναφερθεί, η γραμμικοποιημένη ανάλυση ευστάθειας διαφορικής εξίσωσης που μελετήσαμε, αναφέρεται σε γραμμικές διαφορικές εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές. Αυστηρά δεν μπορεί να εφαρμοστεί στην παρούσα περίπτωση αφού η διαφορική εξίσωση που μελετάμε σε αυτή τη παράγραφο η εξίσωση (3.3α)

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial z} = -\frac{c}{(1-b+z)^2} \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x^2} + \frac{x}{1-b+z} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x} - \varepsilon \frac{\partial^4 u_\varepsilon}{\partial x^4} \quad (3.33)$$

είναι γραμμική, αλλά με μη σταθερούς συντελεστές. Θεωρώντας τους συντελεστές παραμέτρους με τιμές σε καθορισμένο διάστημα

$$a_s = \frac{c}{(1-b+z)^2} \quad a_s \in [0.1, 1] \quad (3.34)$$

$$b_s = \frac{x}{(1-b+z)} \quad b_s \in [0, 10]$$

δεν αλλάζει η μορφή της διαφορικής εξίσωσης (παραβολική) και δεν παραβιάζονται συνθήκες ευστάθειας. Άρα η μελέτη ευστάθειας με τη μαθηματική θεωρία της προηγούμενης παραγράφου, εφόσον ικανοποιείται, αποτελεί σημαντική ένδειξη για την καλή τοποθέτηση του προβλήματος αρχικών και συνοριακών τιμών, αφού πρόσθετα αναφερθεί ότι οι αρχικές και συνοριακές συνθήκες του προβλήματος δεν παρουσιάζουν καμία ιδιαίτερη ιδιομορφία.

Σύμφωνα με τη προηγούμενη παράγραφο είναι

$$P(\xi) = -a_s(i\xi)^2 + b_s i\xi - \varepsilon(i\xi)^4 = a_s \xi^2 + b_s i\xi - \varepsilon \xi^4 \quad (3.35)$$

Οπότε

$$|\exp(z P(\xi))| = |\exp(z(a_s \xi^2 - \varepsilon \xi^4))| \leq C \quad \forall \xi \in \mathbb{R} \quad (3.36)$$

Στο Παράρτημα ΣΤ εμφανίζεται ένα τυπικό γράφημα συμπεριφοράς της παραπάνω έκφρασης του $P(\xi)$

2.4. Εφαρμογή στο αντίστροφο πρόβλημα βαθιάς καθίζησης με τη μέθοδο κανονικοποίησης u_{xxxx}

Στην περίπτωση της μεθόδου κανονικοποίησης u_{xxxx} θα πρέπει να εφαρμοστεί το Θεώρημα που αναφέρεται στη παράγραφο 2.2. του παρόντος Κεφαλαίου, σε άλλη του μορφή αφού η εξίσωση (3.4a)

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial z} = -\frac{c}{(1-b+z)^2} \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x^2} + \frac{x}{1-b+z} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x} + v \frac{\partial^4 u_\varepsilon}{\partial x^2 \partial z^2} \quad (3.37)$$

περιλαμβάνει και άλλο διαφορικό ως προς το βάθος (χρόνο) εκτός από την $\partial u_\varepsilon / \partial z$. Η απόδειξη του θεωρήματος τοποθετείται ως προς τη λύση μιας μερικής διαφορικής εξίσωσης με μορφή

$$\frac{\partial u}{\partial z} = P(D)u, \quad z \geq 0 \quad (3.38)$$

και τότε η επίλυση της συνήθους διαφορικής εξίσωσης που προκύπτει από τον μετασχηματισμό Fourier της παραπάνω εξίσωσης είναι

$$u(x, z) = (2\pi)^{-d} \int \exp(z P(\xi)) \hat{v}(\xi) e^{i\langle x, \xi \rangle} d\xi \quad (3.39)$$

Για να είναι η γραμμική διαφορική εξίσωση καλώς ορισμένη τότε πρέπει σύμφωνα με το Θεώρημα να είναι

$$|\exp(z P(\xi))| \leq C, \quad \xi \in \mathbb{R}^d, \quad 0 \leq z \leq Z \quad (3.40)$$

Στη συγκεκριμένη εξίσωση ο μετασχηματισμός Fourier της γραμμικής διαφορικής εξίσωσης (3.4a) είναι

$$\hat{u}_z - v(i\xi)^2 \hat{u}_{zz} = P_0(\xi)\hat{u} \quad (3.41)$$

όπου

$$P_0(\xi) = -a_s(i\xi)^2 + b_s i\xi = a_s \xi^2 + b_s i\xi \quad (3.42)$$

Τότε η λύση της διαφορικής εξίσωσης (3.4a) είναι (Παράρτημα Z)

$$u(x, z) = (2\pi)^{-d} \int (\exp(zP_1(\xi)) + \exp(zP_2(\xi))) \hat{v}(\xi) e^{i\langle x, \xi \rangle} d\xi \quad (3.43)$$

οπότε το Θεώρημα για την συνθήκη ευστάθειας μετατρέπεται σε

$$|\exp(zP_1(\xi))| \leq C_1, \quad |\exp(zP_2(\xi))| \leq C_2, \quad \xi \in \mathbb{R}^d, \quad 0 \leq z \leq Z \quad (3.44)$$

Από το Παράρτημα Z προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} P_1(\xi) &= \frac{1 - 1 + \sqrt{1 + 4v\xi^2 P_0(\xi)}}{2v\xi^2} = -\frac{1}{2v\xi^2} + \frac{\sqrt{1 + 4v\xi^2(a_s\xi^2 + b_s i\xi)}}{\sqrt{4v^2\xi^4}} = \\ &= -\frac{1}{2v\xi^2} + \sqrt{\frac{1}{4v^2\xi^2} + \frac{a_s}{v} + \frac{ib_s}{v\xi}} \end{aligned} \quad (3.45)$$

ενώ

$$\begin{aligned} P_2(\xi) &= \frac{1 - 1 - \sqrt{1 + 4v\xi^2 P_0(\xi)}}{2v\xi^2} = -\frac{1}{2v\xi^2} - \frac{\sqrt{1 + 4v\xi^2(a_s\xi^2 + b_s i\xi)}}{\sqrt{4v^2\xi^4}} = \\ &= -\frac{1}{2v\xi^2} - \sqrt{\frac{1}{4v^2\xi^2} + \frac{a_s}{v} + \frac{ib_s}{v\xi}} \end{aligned} \quad (3.46)$$

Οπότε

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(P_{1,2}(\xi)) &= \operatorname{Re}\left(-\frac{1}{2v\xi^2} \pm \sqrt{\frac{1}{4v^2\xi^2} + \frac{a_s}{v} + \frac{ib_s}{v\xi}}\right) = \\ &= \operatorname{Re}\left(-\frac{1}{2v\xi^2} \pm \sqrt{\frac{1}{4v^2\xi^2} + \frac{a_s}{v} + \frac{ib_s}{v\xi} + b_s^2 - b_s^2}\right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \operatorname{Re} \left(-\frac{1}{2v\xi^2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2v\xi} + ib_s \right)^2 + \frac{a_s}{v} + b_s^2} \right) \leq \\
&\leq \operatorname{Re} \left(-\frac{1}{2v\xi^2} + \left(\frac{1}{2v\xi} + ib_s \right) + \sqrt{\frac{a_s}{v} + b_s^2} \right) = \\
&= -\frac{1}{2v\xi^2} + \frac{1}{2v\xi} + \sqrt{\frac{a_s}{v} + b_s^2} \leq C_{1,2} \tag{3.47}
\end{aligned}$$

3. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 3

Η δυσκολία στην επίλυση του ευθέως πρόβληματος βαθιάς καθίζησης ανάγεται στο γεγονός ότι είναι σχεδόν αδύνατο να γνωρίζουμε με ακρίβεια την καθίζηση στη βάση του πετάσματος. Αντίθετα, αυτό που μπορούμε να παρατηρήσουμε και να μετρήσουμε είναι η καθίζηση στην επιφάνεια της γης. Η επίλυση του προβλήματος βαθιάς καθίζησης χρησιμοποιώντας ως αρχικές συνθήκες την επιφανειακή καθίζηση με σκοπό τον υπολογισμό της καθίζησης βάσης ανάγεται στην επίλυση του αντιστρόφου, στο βάθος (χρόνο), προβλήματος διάχυσης-μετάδοσης βαθιάς καθίζησης που μελετήθηκε στο Κεφάλαιο 3. Στο Κεφάλαιο αυτό μελετάται η επίλυση του αντιστρόφου προβλήματος βαθιάς καθίζησης με χρήση κανονικοποιήσεων.

Τα αποτελέσματα της αριθμητικής επίλυσης του προβλήματος με τη μέθοδο κανονικοποίησης u_{xxxx} αφορούν τιμές της παραμέτρου κανονικοποίησης $0.005 < \varepsilon < 0.0125$. Για τιμές της παραμέτρου ε εκτός του διαστήματος τα αποτελέσματα διαφέρουν σημαντικά από το ευθύ πρόβλημα. Για μικρές τιμές της παραμέτρου κανονικοποίησης ε η κεντρική καθίζηση ($x=0$) πλησιάζει στη λύση στο ευθύ πρόβλημα.

Για μεγάλες τιμές της «χρονικής» μεταβλητής z , τα αποτελέσματα της αριθμητικής επίλυσής του αντιστρόφου προβλήματος βαθιάς καθίζησης διαφέρουν σημαντικά από τα αποτελέσματα στο ευθύ πρόβλημα. Αν b είναι το βάθος για το οποίο έχει επιλυθεί το ευθύ πρόβλημα, τότε η αρχική συνθήκη για το αντίστροφο πρόβλημα δεν μπορεί να τοποθετηθεί για τιμές του βάθους μεγαλύτερες από $z \approx 0.25b$. Ανεξάρτητα από τις τιμές της παραμέτρου ε , από την αρχή της λύσης του αντιστρόφου προβλήματος, παρατηρείται απόκλιση της καμπυλότητας της λύσης κοντά στο δεξιό σύνορο μεταξύ των αποτελεσμάτων στο ευθύ και το αντίστροφο πρόβλημα το οποίο θα αντιμετωπισθεί στο Κεφάλαιο 4.

Η περιορισμένη χρονικά λύση του αντιστρόφου προβλήματος με τη μέθοδο u_{xxxx} , προκύπτει από τον ισχυρό διαχυτικό χαρακτήρα του τελεστή 4ης τάξεως. Η φύση του προβλήματος (διάχυση-μετάδοση) αλλά και η περιορισμένη χρονικά λύση με τη επιβάλλει την επίλυση του αντιστρόφου προβλήματος με τη χρήση ενός τελεστή με περισσότερο μεταδοτικό χαρακτήρα.

Στην εργασία αυτή για την επίλυση του αντιστρόφου προβλήματος βαθιάς καθίζησης προτείνεται ο τελεστής u_{xxzz} , πολλαπλασιασμένος με κάποια παράμετρο

κανονικοποίησης ν , με χρήση κατάλληλων αρχικών και συνοριακών συνθηκών τόσο ως προς το φυσικό πρόβλημα αλλά και ως προς το μαθηματικό προσομοίωμα. Η πρόσθετη αρχική συνθήκη που χρησιμοποιείται αναφέρεται στα πρώτα δύο επίπεδα βάθους από την επιφάνεια και απλά θέτει την καθίζηση γνωστή σε αυτά τα στρώματα αφού μπορεί να υπολογιστεί από γεωτρήσεις.

Για αυτήν τη μέθοδο κανονικοποίησης οι τιμές της παραμέτρου ν που χρησιμοποιήθηκαν κυμαίνονται από 0.01 έως 1. Για μικρότερες τιμές της παραμέτρου ν , εμφανίζεται σημαντική αστάθεια στη λύση, αφού ο συντελεστής της κανονικοποίησης τείνει στο 0 οπότε το κανονικοποιημένο πρόβλημα τείνει στο μη κανονικοποιημένο, ενώ για τιμές μεγαλύτερες του 1 τα αποτελέσματα, τουλάχιστον ως προς την κεντρική καθίζηση, αποκλίνουν σημαντικά από το ευθύ πρόβλημα.

Σε σύγκριση με τα αποτελέσματα από τη προηγούμενη μέθοδο, χρησιμοποιώντας τη μέθοδο κανονικοποίησης u_{xxzz} μπορούμε να επιλύσουμε το αντίστροφο πρόβλημα για περισσότερο βάθος (μεγαλύτερο από το διπλάσιο). Παρατηρείται, επίσης μικρότερη απόκλιση της καμπυλότητας της λύσης κοντά στο δεξιό σύνορο, από τη προηγούμενη μέθοδο κανονικοποίησης.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 3

1. **Lattés, R. and Lions, J.L.** *The method of quasi-reversibility*. American Elsevier Pub. Co., New York, 1969
2. **Tomée, V.**, (1970). *Topics in Stability Theory for Partial Difference Operators*, Lecture Notes in Mathematics, Symposium on the Theory of Numerical Analysis, Dundee, Scotland

