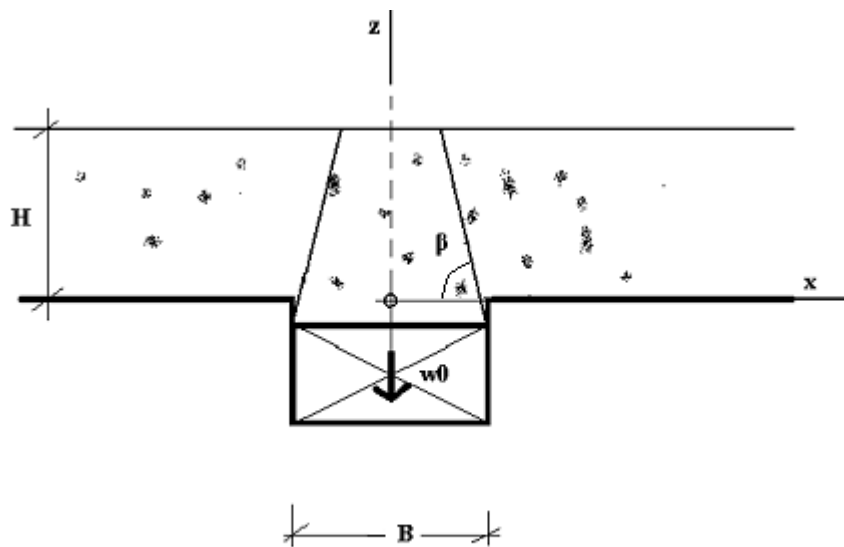


ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^ο ΤΟ ΕΥΘΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΔΙΑΧΥΣΗΣ-ΜΕΤΑΔΟΣΗΣ ΒΑΘΙΑΣ ΚΑΘΙΖΗΣΗΣ

1. ΕΥΘΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΔΙΑΧΥΣΗΣ-ΜΕΤΑΔΟΣΗΣ ΒΑΘΙΑΣ ΚΑΘΙΖΗΣΗΣ ΜΕ ΤΗ ΘΕΩΡΙΑ LITWINISZYN

1.1. Εισαγωγή

Η συμπίεση μιας φυσικής δεξαμενής πετρελαίου ή νερού είναι η αφορμή για τη δημιουργία του γνωστού μηχανισμού του «πετάσματος καθίζησης», όπως φαίνεται στη παρακάτω Εικόνα 2-1 [1].



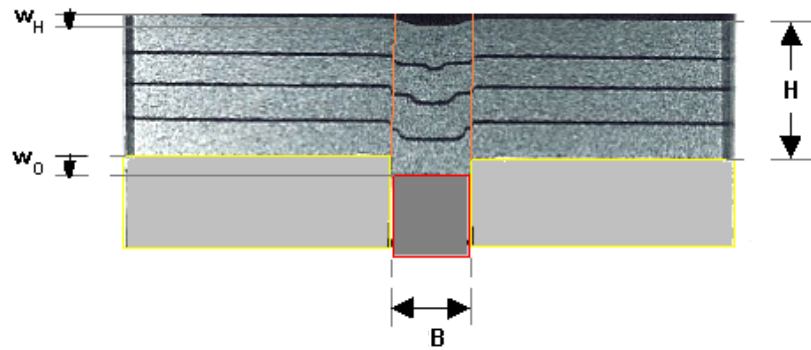
Εικόνα 2-1: Το πρόβλημα του «πετάσματος καθίζησης»

Οι γεωδεξαμενές αποτελούνται από βραχώδη μάζα με πάχος μερικών χιλιομέτρων, έστω H . Στο κεφάλαιο αυτό μελετάται η αστοχία μεγάλης κλίμακας στη βραχώδη μάζα, όπου και αναλύεται ο μηχανισμός δημιουργίας του πετάσματος καθίζησης. Οι συνέπειες του μηχανισμού μπορεί να εκφραστεί μέσω μίας σχέσης η οποία συσχετίζει την καθίζηση στην επιφάνεια w_H με τη καθίζηση στη βάση του πετάσματος καθίζησης w_0 (Εικ. 2-2)

$$w_H = f(\dots; w_0) \quad (2.1)$$

Οι τελείες στο όρισμα της συνάρτησης μεταφοράς $f()$ στην εξίσωση (2.1) αναφέρονται στις υπόλοιπες παραμέτρους του προβλήματος. Οι ελαστικές παραμορφώσεις θεωρούνται αμελητέες ως προς τις πλαστικές παραμορφώσεις. Οπότε στο όρισμα της $f()$ αμελούνται οι ελαστικές παράμετροι και το υλικό περιγράφεται μόνο από τις παραμέτρους αντοχής του. Προκειμένου να απλουστεύσουμε το πρόβλημα θεωρούμε ότι η αντοχή της βραχώμαζας περιγράφεται από ένα σύνολο

παραμέτρων (χρησιμοποιώντας τη μέση τιμή τους στο ύψος H) Mohr-Coulomb: για παράδειγμα τη μέση τιμή της γωνίας τριβής του υλικού $\bar{\phi}$ και τη μέση τιμή της συνοχής \bar{c} . Επίσης, η συνάρτηση μεταφοράς $f()$, πρέπει να εξαρτάται από σημαντικές γεωμετρικές και φυσικές παραμέτρους του προβλήματος. Ειδικότερα τίθεται η παρακάτω παραμετροποίηση του προβλήματος



Εικόνα 2-2: Φυσικό πείραμα μικρής κλίμακας – Πρόβλημα επίπεδης παραμόρφωσης [2]

$$w_H \approx f(\bar{\gamma}, \bar{c}, \bar{\phi}, H, B, \beta; w_0) \quad (2.2)$$

όπου w_H , w_0 , είναι η μέση καθίζηση στην επιφάνεια και στη βάση του πετάσματος αντίστοιχα. $[L]^1$, $\bar{\gamma}$, \bar{c} και $\bar{\phi}$ είναι το μέσο (καθ' ύψος) μοναδιαίο βάρος $[FL^{-3}]$, συνοχή $[FL^{-2}]$ και γωνία τριβής $[-]$ της βραχόμαζας της γεωκατασκευής αντίστοιχα. Ενώ H , B και β είναι οι γεωμετρικές παράμετροι του προβλήματος, αντίστοιχα το πάχος (ύψος) της γεωκατασκευής $[L]$, το πλάτος του πετάσματος καθίζησης $[L]$ και η γωνία κλίσης των συνόρων εντοπισμένης παραμόρφωσης που ορίζουν το μέρος της γεωκατασκευής που συμμετέχει στο μηχανισμό.

Χρησιμοποιώντας διαστατική ανάλυση, η παραπάνω εξίσωση (2.2) μπορεί να γραφεί σε μορφή αδιάστατων μεταβλητών ως ακολούθως:

$$\frac{w_H}{B} \approx f\left(\frac{\bar{c}}{\bar{\gamma}H}, \bar{\phi}, \frac{H}{B}, \beta; \frac{w_0}{B}\right) \quad (2.3)$$

Παρατηρούμε ότι οι δυνάμεις συνοχής για το παραπάνω περιγραφόμενο πρόβλημα είναι αμελητέες ως προς τις δυνάμεις βαρύτητας:

$$\frac{\bar{c}}{\bar{\gamma}H} \ll 1 \quad (2.4)$$

Για παράδειγμα χρησιμοποιούνται τυπικές τιμές βράχου σε μονοαξονική αντοχή βράχου και γωνίας τριβής, $(UCS) = 10. \text{ MPa}$, $\bar{\phi} = 30^\circ$ οπότε,

¹ Οι εκφράσεις με τη μορφή $[F^p L^q T^r]$ αναφέρονται σε διαστάσεις της συγκεκριμένης ποσότητας σε παράγοντες δυνάμεων, μήκους και χρόνου. Η μορφή $[-]$ αναφέρεται σε αδιάστατη ποσότητα.

$\bar{c} = (\text{UCS}) \tan(45^\circ + \bar{\phi}/2) \approx 3. \text{ MPa}$. Για κάποιο τυπικό βάθος $H = 3. \text{ km}$ η εκτίμηση υπολογίζεται σε $\bar{c}/(\bar{\gamma}H) \approx 0.04$. Οπότε σε πρώτη προσέγγιση, ο όρος αυτός αμελείται στο όρισμα της συνάρτησης μεταφοράς

$$\frac{w_H}{B} \approx f\left(\bar{\phi}, \frac{H}{B}, \beta; \frac{w_0}{B}\right) \quad (2.5)$$

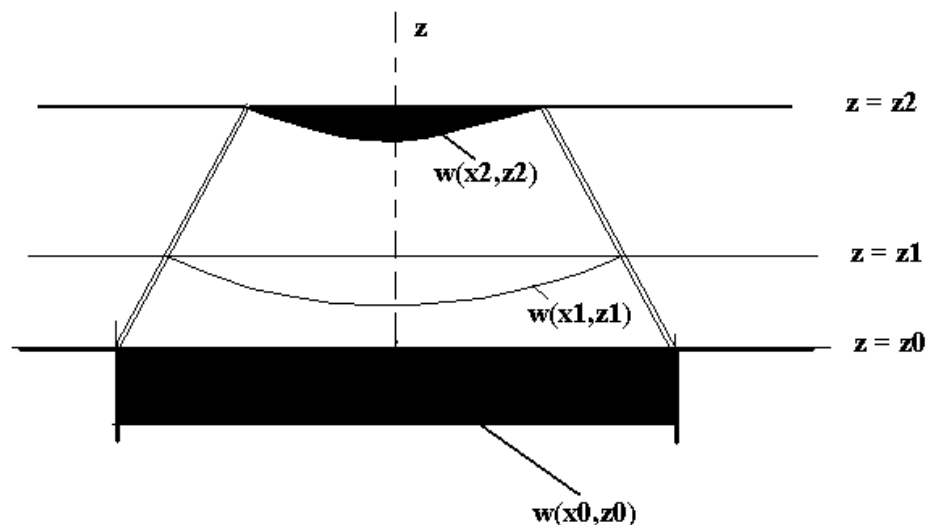
Σύμφωνα με την εργασία του Hubbert's [3] το αποτέλεσμα αυτό έχει διαπιστωθεί από τα μέσα της δεκαετίας του 1930, όταν αναγνωρίστηκε ότι για τη μελέτη της διαμόρφωσης γεωλογικών σχηματισμών, όπως αστοχίες σε βράχο, αρκεί η μελέτη μονοδιάστατων προσομοιωμάτων.

Φυσικά πειράματα πέτασματος καθίζησης υπό κλίμακα [2, 4], παρουσιάζουν τις μετατοπίσεις του φαινομένου να διαχέονται προς τα πάνω με ένα μηχανισμό εντοπισμού πάνω από το πέτασμα καθίζησης. Τα σύνορα που μορφώνονται από τη δημιουργία του μηχανισμού συγκλίνουν καθ' ύψος μειώνοντας το πλάτος του μηχανισμού. Η γωνία β του συνόρου προκύπτει ως συνάρτηση της καθίζησης στο μέτωπο-βάση του πέτασματος καθίζησης. Συγκεκριμένα, όσο αυξάνεται η καθίζηση στο μέτωπο τόσο αυξάνεται η γωνία β . Για μεγάλες τιμές της καθίζησης στο μέτωπο το σύνορο γίνεται κάθετο στον άξονα x .

Σε αυτό το Κεφάλαιο αντιμετωπίζεται το πρόβλημα βαθιάς καθίζησης χρησιμοποιώντας τη Θεωρία βαθιάς καθίζησης κατά Litwiniszyn, καθώς και με χρήση Θεωρίας Ελαστικότητας.

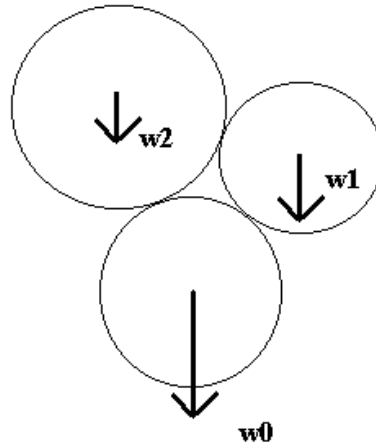
1.2. Η θεωρία βαθιάς καθίζησης κατά Litwiniszyn

Η μετατόπιση στο μέτωπο-βάση του θυροπετάσματος προκαλεί τη δημιουργία ενός μηχανισμού το οποίο είναι συνάρτηση της θέσης στο επίπεδο x - z . Για απλοποίηση του μαθηματικού προσομοιώματος θεωρούμε αυτή σταθερή δηλαδή $w(x_0, z_0) = w_0$ (Εικ. 2-3).



Εικόνα 2-3: Η θεωρία Litwiniszyn

Σύμφωνα με πρόσφατη δουλειά του καθηγητή Litwiniszyn [5], [6] υποθέτουμε ότι η καθίζηση μεγάλης κλίμακας πάνω από μία γεωκατασκευή είναι μία στοχαστική διαδικασία τύπου Μαρκοβ. Υποθέτουμε δηλαδή ότι η κατακόρυφη μετακίνηση ενός κόκκου (π.χ. στη κατεύθυνση της βαρύτητας) προκαλεί κίνηση των υπερκείμενων κόκκων τόσο οριζόντια, όσο και κατακόρυφα (Εικ. 2-4).



Εικόνα 2-4: Διαδικασία Markov

Ο παραπάνω συλλογισμός οδηγεί στη δημιουργία ενός μηχανισμού «μετάδοσης-διάχυσης» της καθίζησης, ο οποίος μπορεί να περιγραφεί ως εξής:

Έστω μία κατανομή καθίζησης στο ύψος $z=z_1$:

$$z = z_1 - u_z \quad (2.6)$$

όπου η κατανομή

$$u_z = w(x_1, z_1) \quad (2.7)$$

περιγράφει τη καθίζηση στο επίπεδο $z = z_1$. Η κατανομή της καθίζησης σε μεγαλύτερο ύψος $z_2 > z_1$ σχετίζεται με αυτή στο επίπεδο $z = z_1$. Υποθέτουμε ότι η σχέση τους περιγράφεται από ένα γραμμικό συναρτησιακό τελεστή της μορφής:

$$w(x_2, z_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(x_2, z_2; x_1, z_1) w(x_1, z_1) dx_1 \quad (2.8)$$

Ο τελεστής K είναι τελεστής πυκνότητας πιθανότητας και υπακούει στις παρακάτω συνθήκες:

$$A. \int_{-\infty}^{+\infty} K(x, z; x_1, z_1) dx = 1 \quad (2.9)$$

$$B. K(x_3, z_3; x_1, z_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(x_3, z_3; x_2, z_2) K(x_2, z_2; x_1, z_1) dx_2, \forall z_1 < z_2 < z_3$$

Η ολοκληρωτική σχέση (2.9B) είναι γνωστή ως εξίσωση *Einstein-Kolmogorov* [7]. Υπό ορισμένες προϋποθέσεις για τον συναρτησιακό τελεστή $K(x_2, z_2; x_1, z_1)$, μπορεί να αποδειχθεί ότι η ολοκληρωτική εξίσωση Einstein-Kolmogorov ικανοποιεί μία μερική διαφορική εξίσωση παραβολικού τύπου. Συγκεκριμένα, αν υποθέσουμε ότι ο τελεστής K ικανοποιεί τις παρακάτω συνθήκες:

1. Υπάρχει η 1^η ροπή

$$A(x, z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{\Delta z} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \xi) K(x, z + \Delta z; \xi, z) d\xi \right\} \quad (2.10)$$

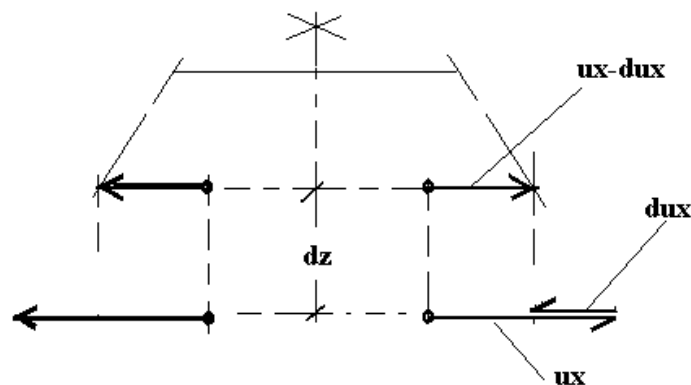
Η ποσότητα A περιγράφει τη μέση οριζόντια μετατόπιση της θέσης ενός κόκκου. Για συμμετρική κατανομή της καθίζησης ως προς τον άξονα $x=0$ είναι $A=0$ (Εικ. 2-5)

2. Υπάρχει η 2^η ροπή

$$C(x, z) = \frac{1}{2} \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{\Delta z} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \xi)^2 K(x, z + \Delta z; \xi, z) d\xi \right\} \quad (2.11)$$

Η ποσότητα

$$\langle x - \xi \rangle^2 = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \xi)^2 K(x, z + \Delta z; \xi, z) d\xi \quad (2.12)$$



Εικόνα 2-5: Συμμετρική κατανομή καθίζησης

είναι ένα μέτρο κανονικότητας της καθίζησης. Το παραπάνω όριο για μικρά Δz είναι ανάλογο του Δz :

$$\langle x - \xi \rangle^2 = C(x, z) \Delta z \quad (2.13)$$

3. Η 3^η ροπή είναι μηδενική

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{\Delta z} \int_{-\infty}^{+\infty} |x - \xi|^3 K(x, z + \Delta z; \xi, z) d\xi \right\} = 0 \quad (2.14)$$

Αν ισχύουν οι παραπάνω προϋποθέσεις, αποδεικνύεται ότι η ολοκληρωτική εξίσωση Einstein-Kolmogorov ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση Einstein-Kolmogorov:

Απόδειξη [7]: Θεωρούμε μία αυθαίρετη συνάρτηση $\psi(x)$ η οποία τείνει στο μηδέν μαζί με τις παραγώγους της κατά μήκος των συνόρων της περιοχής ολοκλήρωσης. Τότε πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της εξίσωσης (2.9) με την $\psi(x)$ και ολοκληρώνοντας τη σε όλο το σύνολο R είναι:

$$\begin{aligned} \int K(x, z + \Delta z; x_0, z_0) \psi(x) dx &= \\ &= \int K(\xi, z; x_0, z_0) d\xi \int K(x, z + \Delta z; \xi, z) \psi(x) dx. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Αναπτύσσουμε την $\psi(x)$ σε σειρά Taylor σε μία περιοχή του $(x - \xi)$:

$$\psi(x) = \psi(\xi) + \psi'(\xi)(x - \xi) + \frac{\psi''(\xi)}{2}(x - \xi)^2 + \frac{\psi'''(\xi^*)}{3!}(x - \xi)^3 \quad (2.16)$$

όπου ξ^* είναι μία ενδιάμεση τιμή που βρίσκεται ανάμεσα στο x και το ξ . Διαιρώντας το με το Δz , μετά από απλή διευθέτηση έχουμε:

$$\begin{aligned} \int \frac{K(x, z + \Delta z; x_0, z_0) - K(x, z; x_0, z_0)}{\Delta z} \psi(x) dx &= \\ &= \int K(\xi, z; x_0, z_0) \left[\psi'(\xi) \frac{x - \xi}{\Delta z} + \psi''(\xi) \frac{(x - \xi)^2}{2\Delta z} \right] d\xi + \\ &+ \frac{1}{3! \Delta z} \int \int \psi'''(\xi^*) (x - \xi)^3 K(\xi, z; x_0, z_0) K(x, z + \Delta z; \xi, z) d\xi dx. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Υποθέτοντας ότι η $\psi'''(x)$ είναι φραγμένη

$$|\psi'''(x)| < A \quad (2.18)$$

και θυμίζοντας ότι

$$\int K(\xi, z; x_0, z_0) d\xi = 1, \quad (2.19)$$

επιτυγχάνουμε

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{\Delta z} \int \int \psi'''(\xi^*) (x - \xi)^3 K(\xi, z; x_0, z_0) K(x, z + \Delta z; \xi, z) d\xi dx \right| &\leq \\ &\leq \frac{A}{\Delta z} \int |x - \xi|^3 K(x, z + \Delta z; \xi, z) dx = \frac{A|x - \xi|^3}{\Delta z} \end{aligned} \quad (2.20)$$

Από την συνθήκη (2.14) προκύπτει ότι αυτή η έκφραση τείνει στο μηδέν καθώς το $\Delta z \rightarrow 0$. Για αυτό, καθώς $\Delta z \rightarrow 0$ και χρησιμοποιώντας εκτός από τη σχέση (2.14) τις συνθήκες (2.11)-(2.12) είναι:

$$\begin{aligned} \int \psi(x) \frac{\partial K(x, z; x_0, z_0)}{\partial z} dx &= \\ &= \int K(\xi, z; x_0, z_0) [\psi'(\xi)A(\xi, z) + \psi''(\xi)B(\xi, z)] d\xi. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Ολοκληρώνουμε κατά μέρη το δεξιό σκέλος της παραπάνω ισότητας χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η συνάρτηση $\psi(x)$ τείνει στο μηδέν μαζί με τις παραγώγους της στα όρια της περιοχής ολοκλήρωσης και τότε είναι:

$$\int \psi(x) \left[\frac{\partial K}{\partial z} + \frac{\partial(AK)}{\partial x} - \frac{\partial^2(BK)}{\partial x^2} \right] dx = 0. \quad (2.22)$$

Η σχέση (2.22) πρέπει να ισχύει για κάθε αυθαίρετη συνάρτηση $\psi(x)$. Για να συμβαίνει αυτό πρέπει να ικανοποιείται η παρακάτω διαφορική εξίσωση των *Einstein-Kolmogorov* για την πιθανότητα συνάρτησης $K(x, z; x_0, z_0)$

$$\frac{\partial K}{\partial z} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} (CK) - \frac{\partial}{\partial x} (AK) \quad (2.23)$$

Αν πολλαπλασιάσουμε τη τελευταία εξίσωση με $w(x_0, z_0)$ και ολοκληρώσουμε στο διάστημα $(-\infty, +\infty)$ χρησιμοποιώντας την σχέση (2.8) καταλήγουμε στην σχέση:

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} (Cw) - \frac{\partial}{\partial x} (Aw) \quad (2.24)$$

Για το πρόβλημα στο οποίο αναφερόμαστε, θεωρούμε ότι ισχύει

$$A=0, \quad C=\text{const.} \quad (2.25)$$

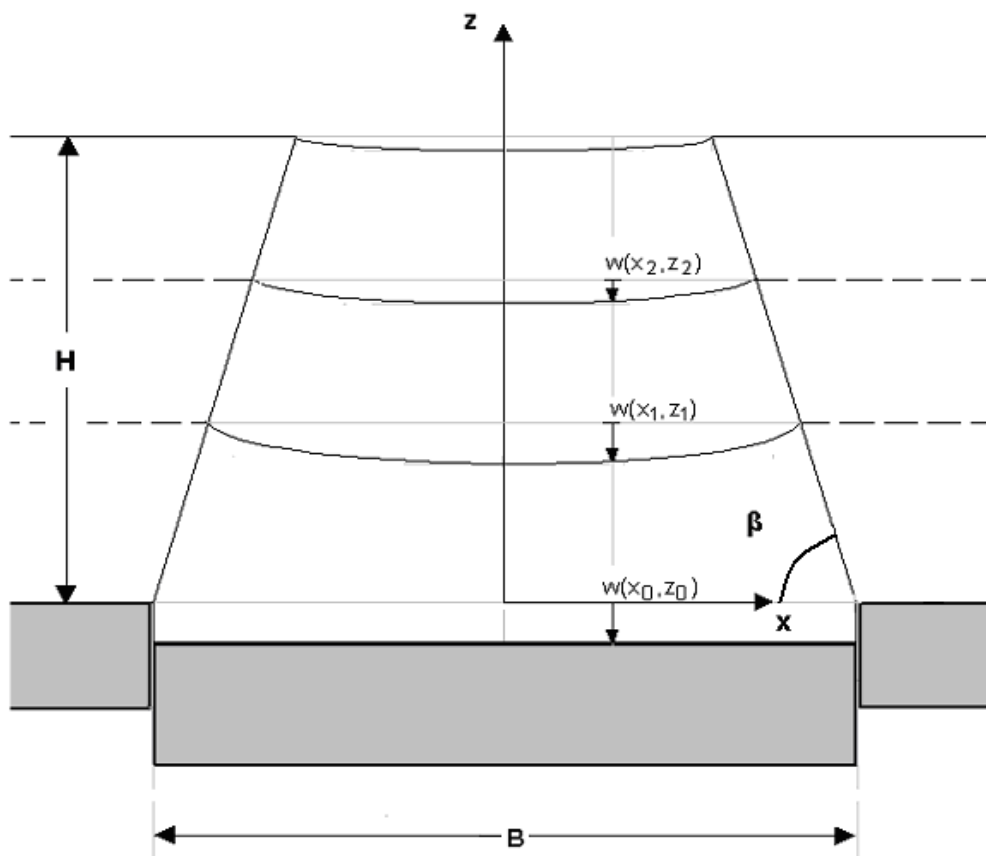
Η παραπάνω υπόθεση είναι η απλούστερη υπόθεση, αφού υποθέτουμε συμμετρική και κανονική κατανομή καθίζησης ($A=0$) ενώ επίσης υποθέτουμε ότι οι ιδιότητες των γεωυλικών δεν αλλάζουν καθ' ύψος ($C=const.$). Τότε η καθίζηση ικανοποιεί τη παρακάτω εξίσωση:

$$\frac{\partial w}{\partial z} = C \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (2.26)$$

Η παραπάνω εξίσωση είναι η εξίσωση διάχυσης θερμότητας δι' αγωγής του Fourier όπου η μεταβλητή z τίθεται αντί του χρόνου t .

1.3. Πρόβλημα επίπεδης παραμόρφωσης¹ – Επεξεργασία προσομοιώματος

Σύμφωνα με πειραματικά αποτελέσματα θεωρούμε το χωρίο που εμφανίζεται στην Εικόνα 2-6. Στην Εικόνα αυτή εμφανίζεται μια εδαφική κατά μήκος τομή μίας γεωκατασκευής που υπόκειται στη διαδικασία του «πετάσματος καθίζησης». Ονομάζεται H το ύψος της τομής, B το πλάτος του πετάσματος, ενώ η γωνία που σχηματίζουν τα σύνορα της γεωκατασκευής με τον οριζόντιο άξονα ονομάζεται β .



Εικόνα 2-6: Το Πρόβλημα βαθιάς καθίζησης

¹ Αγγλ. *Plane strain problem*

Για την επεξεργασία της εξίσωσης (2.26), εισάγουμε τις παρακάτω αδιάστατες ποσότητες:

A) τις αδιάστατες εξαρτημένες και ανεξάρτητες μεταβλητές

$$z^* = \frac{z}{H} \quad ; \quad x^* = \frac{x}{B/2} \quad (2.27)$$

$$w^* = \frac{w}{B} \quad (2.28)$$

και B) τον συντελεστή διάχυσης

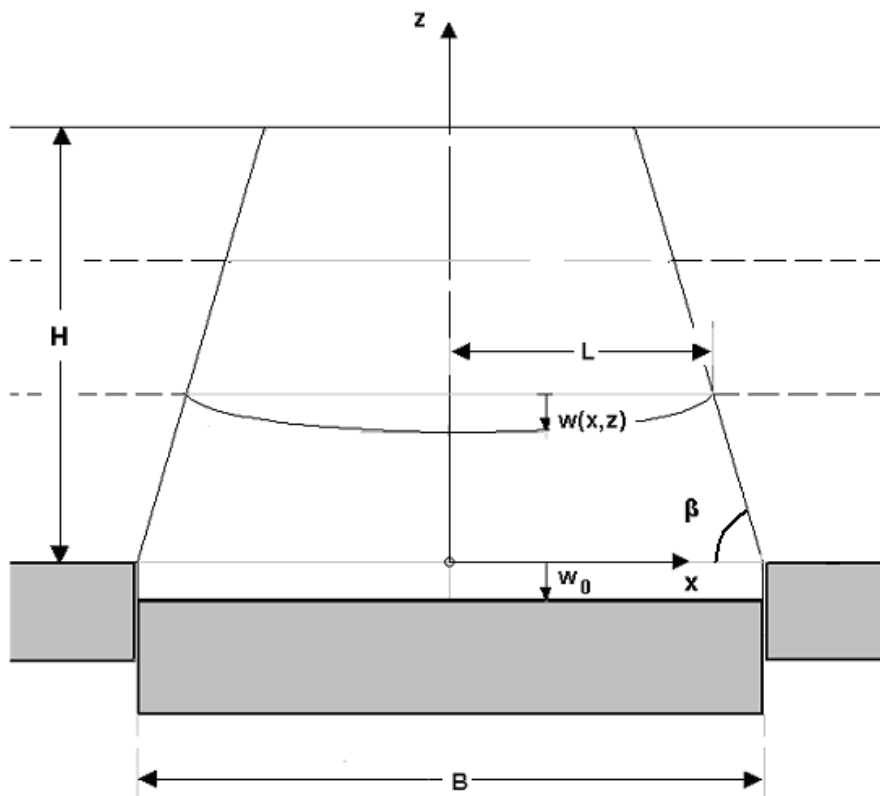
$$c = \left(\frac{H}{(B/2)^2} \right) C \quad (2.29)$$

Με αυτές τις σχέσεις το πρόβλημα αρχικών και συνοριακών τιμών είναι:

$$\frac{\partial w^*}{\partial z^*} = c \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^{*2}} \quad (2.30\alpha)$$

Με αρχικές συνθήκες που δίνονται στο μέτωπο του πέτασματος καθίζησης:

$$z^* = 0 : w^* = w_0^* \quad (2.30\beta)$$



Εικόνα 2-7: Μαθηματική επεξεργασία προβλήματος βαθιάς καθίζησης – Πρόβλημα Επίπεδης παραμόρφωσης

Οι συνοριακές συνθήκες περιγράφονται σε μεταβλητό σύνορο:

$$z^* > 0; x^* = \pm L^*(z^*); w^* = 0 \quad (2.30\gamma)$$

όπου L είναι το πλάτος της επιφάνειας καθίζησης στην οριζόντια κατεύθυνση:

$$L = \frac{B}{2} - \cot\beta z \quad ; \quad L^* = \frac{L}{B/2} = 1 - 2\frac{H}{B}\cot\beta z^* \quad (2.30\delta)$$

Για την αριθμητική επίλυση του παραπάνω προβλήματος με τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών επιβάλλεται ο μετασχηματισμός του παραπάνω προβλήματος αρχικών και συνοριακών τιμών έτσι ώστε το σύνορο να είναι σταθερό:

$$\bar{x} = u(x^*, z^*) = \frac{x^*}{L^*(z^*)} \quad (2.31)$$

$$\bar{z} = v(x^*, z^*) = z^*$$

οπότε

$$\frac{\partial}{\partial x^*} = \frac{\partial u}{\partial x^*} \frac{\partial}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial v}{\partial x^*} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{L^*} \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \quad (2.32)$$

$$\frac{\partial}{\partial z^*} = \frac{\partial u}{\partial z^*} \frac{\partial}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial v}{\partial z^*} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \left(-\frac{x^*}{L^{*2}} \frac{dL^*}{dz^*} \right) \frac{\partial}{\partial \bar{x}} + 1 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \left(-\frac{1}{L^*} \frac{dL^*}{dz^*} \bar{x} \right) \frac{\partial}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$$

και

$$b = 2 \left(\frac{H}{B} \right) \cot\beta > 0 \quad (0^\circ < \beta < 90^\circ) \Rightarrow L^* = 1 - b\bar{z}; \frac{dL^*}{d\bar{z}} = -b \quad (2.33)$$

Τότε η εξίσωση μετασχηματίζεται στη παρακάτω:

$$\frac{\partial w^*}{\partial \bar{z}} = \frac{c}{(1 - b\bar{z})^2} \frac{\partial^2 w^*}{\partial \bar{x}^2} - \frac{b\bar{x}}{1 - b\bar{z}} \frac{\partial w^*}{\partial \bar{x}} \quad (2.34)$$

Τελικά, χρησιμοποιώντας ένα νέο μετασχηματισμό

$$\omega = w^*$$

$$\xi = \bar{x} \quad (2.35)$$

$$s = b\bar{z}$$

και ένα νέο συντελεστή διάχυσης

$$\hat{c} = \frac{c}{b} > 0 \quad (2.36)$$

καταλήγουμε στο παρακάτω πρόβλημα:

$$\frac{\partial \omega}{\partial s} = \frac{\hat{c}}{(1-s)^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi^2} - \frac{\xi}{1-s} \frac{\partial \omega}{\partial \xi} \quad (2.37\alpha)$$

για

$$-1 \leq \xi \leq 1 \quad ; \quad 0 < s \leq b \quad (2.37\beta)$$

και

$$\omega(\xi, 0) = w_0^* \quad (\alpha.σ.) \quad (2.37\gamma)$$

$$\omega(\pm 1, s) = 0 \quad (\sigma.σ.) \quad (2.37\delta)$$

ή το ισοδύναμο συμμετρικό ως προς τον άξονα $x=0$

$$\frac{\partial \omega}{\partial s} = \frac{\hat{c}}{(1-s)^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi^2} - \frac{\xi}{1-s} \frac{\partial \omega}{\partial \xi} \quad (2.38\alpha)$$

για

$$0 \leq \xi \leq 1 \quad ; \quad 0 < s \leq b \quad (2.38\beta)$$

και

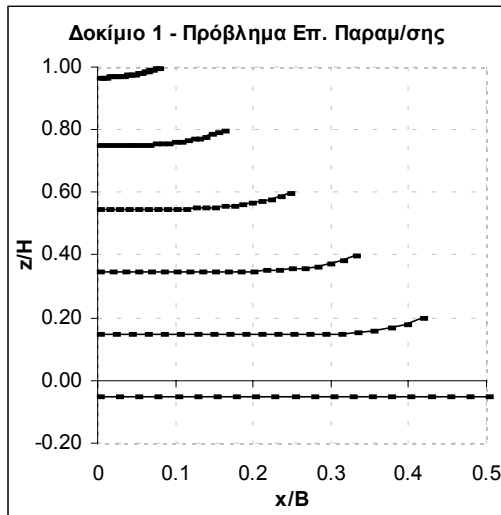
$$\omega(\xi, 0) = w_0^* \quad (\alpha.σ.) \quad (2.38\gamma)$$

$$\omega(1, s) = 0 \quad (\sigma.σ.) \quad (2.38\delta)$$

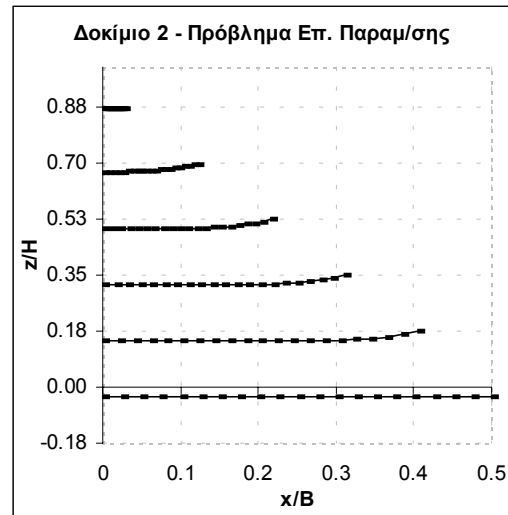
$$\omega_\xi(0, s) = 0 \quad (\sigma.σ.) \quad (2.38\epsilon)$$

Αυτή είναι μερική διαφορική εξίσωση διάχυσης-μετάδοσης με μεταβλητούς συντελεστές. Το προσομοίωμα περιέχει μία ελεύθερη παράμετρο \hat{c} , η οποία προσδιορίζεται από πειραματικά δεδομένα.

Η επεξεργασία της αριθμητικής επίλυσης εμφανίζεται στο Παράρτημα του Κεφαλαίου αυτού. Το λογισμικό σε γλώσσα FORTRAN για την αριθμητική επίλυση του προβλήματος που χρησιμοποιήθηκε (πεπλεγμένος αλγόριθμος πεπερασμένων διαφορών) εμφανίζεται στο Παράρτημα Α στο τέλος της εργασίας.

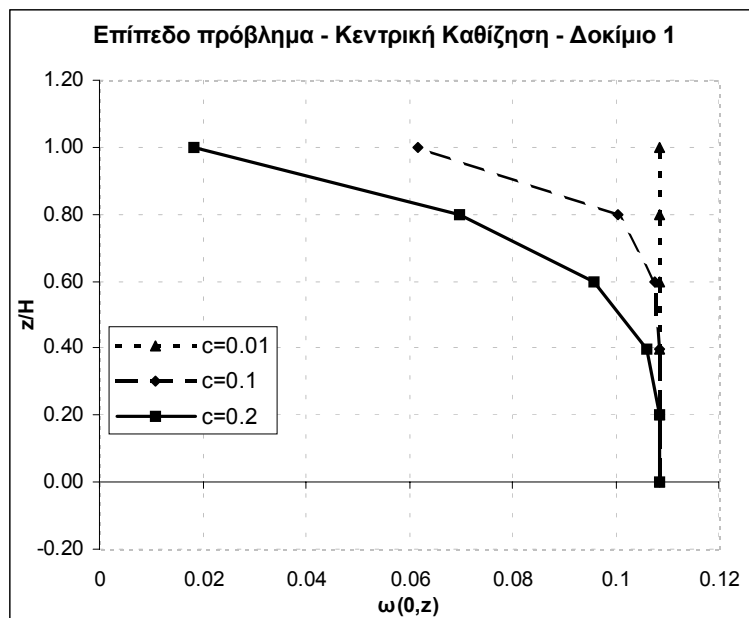


Εικόνα 2-8(α): Κατανομή καθίζησης καθ' ύψος
- Δοκίμιο 1



Εικόνα 2-8(β): Κατανομή καθίζησης καθ' ύψος
- Δοκίμιο 2

Στις Εικόνες 2-8(α-β) εμφανίζονται τυπικά αποτελέσματα της αριθμητικής επίλυσης του παραπάνω προβλήματος (2.30) σε γνωστή γεωμετρία του μηχανισμού καθίζησης ($H/B=2$, και $\beta=78^0$ και $w_0/B=0.1086$, Δοκίμιο 1) τα οποία αναφέρονται στο Δοκίμιο της Εικόνας 2-2 αλλά και άλλου δοκιμίου ($H/B=2$, και $\beta=75^0$ και $w_0/B=0.062$, Δοκίμιο 2) και συντελεστή διάχυσης $\hat{c}=0.1$ και για τα δύο Δοκίμια. Σημειώνεται ότι στις Εικόνες 2-8(α-β) τα αποτελέσματα εμφανίζονται στη μορφή $\omega/B^* = f(x/B, z/H)$ όπου $B^*=(H/B)=2$.



Εικόνα 2-9: Επίρροή του συντελεστή διάχυσης στη Κεντρική καθίζησης

Στην Εικόνα 2-9 εμφανίζεται η επίρροή του συντελεστή διάχυσης \hat{c} , στην κεντρική καθίζηση για το Δοκίμιο-1. Συγκεκριμένα παρουσιάζεται η καθίζηση στον άξονα $x=0$ στη μορφή $\omega(0, z) = f(z/H)$ ως προς το ύψος από το θυροπέτασμα καθίζησης για

διάφορες τιμές της παραμέτρου \hat{c} . Είναι φανερό ότι όσο ο συντελεστής διάχυσης τείνει στο 0, το πρόβλημα εμφανίζει κυρίως το μεταδοτικό του χαρακτήρα, ενώ για μεγαλύτερες τιμές της ελεύθερης παραμέτρου η διαχυτική συμπεριφορά γίνεται εντονότερη.

1.4. Αξονοσυμμετρικό πρόβλημα¹ – Επεξεργασία προσομοιώματος

Για το αξονοσυμμετρικό πρόβλημα μπορούμε να μετασχηματίσουμε την εξίσωση (2.26) σε πολικές συντεταγμένες

$$\frac{\partial w}{\partial z} = C \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial w}{\partial r} \right) \quad (2.39)$$

θεωρώντας κυκλική τη βάση του πετάσματος καθίζησης (Εικόνα 2-10). Προκειμένου να επεξεργαστούμε περισσότερο το πρόβλημα μετατρέπουμε τις διαστατοποιημένες μεταβλητές του προβλήματος (ανεξάρτητες και εξαρτημένες) σε αδιαστατοποιημένες, χρησιμοποιώντας τον παρακάτω μετασχηματισμό:

α) Για τις μεταβλητές του προβλήματος

$$z^* = \frac{z}{H} \quad ; \quad r^* = \frac{r}{B/2}$$

$$w^* = \frac{w}{B}$$

και β) την ελεύθερη παράμετρο c ,

$$c = \left(\frac{H}{(B/2)^2} \right) C$$

Τότε η εξίσωση (2.39) μετατρέπεται σε:

$$\frac{\partial w^*}{\partial z^*} = c \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{\partial w^*}{\partial r^*} \right) \quad (2.40)$$

Η αρχική συνθήκη του προβλήματος δίνεται στη βάση του πετάσματος καθίζησης:

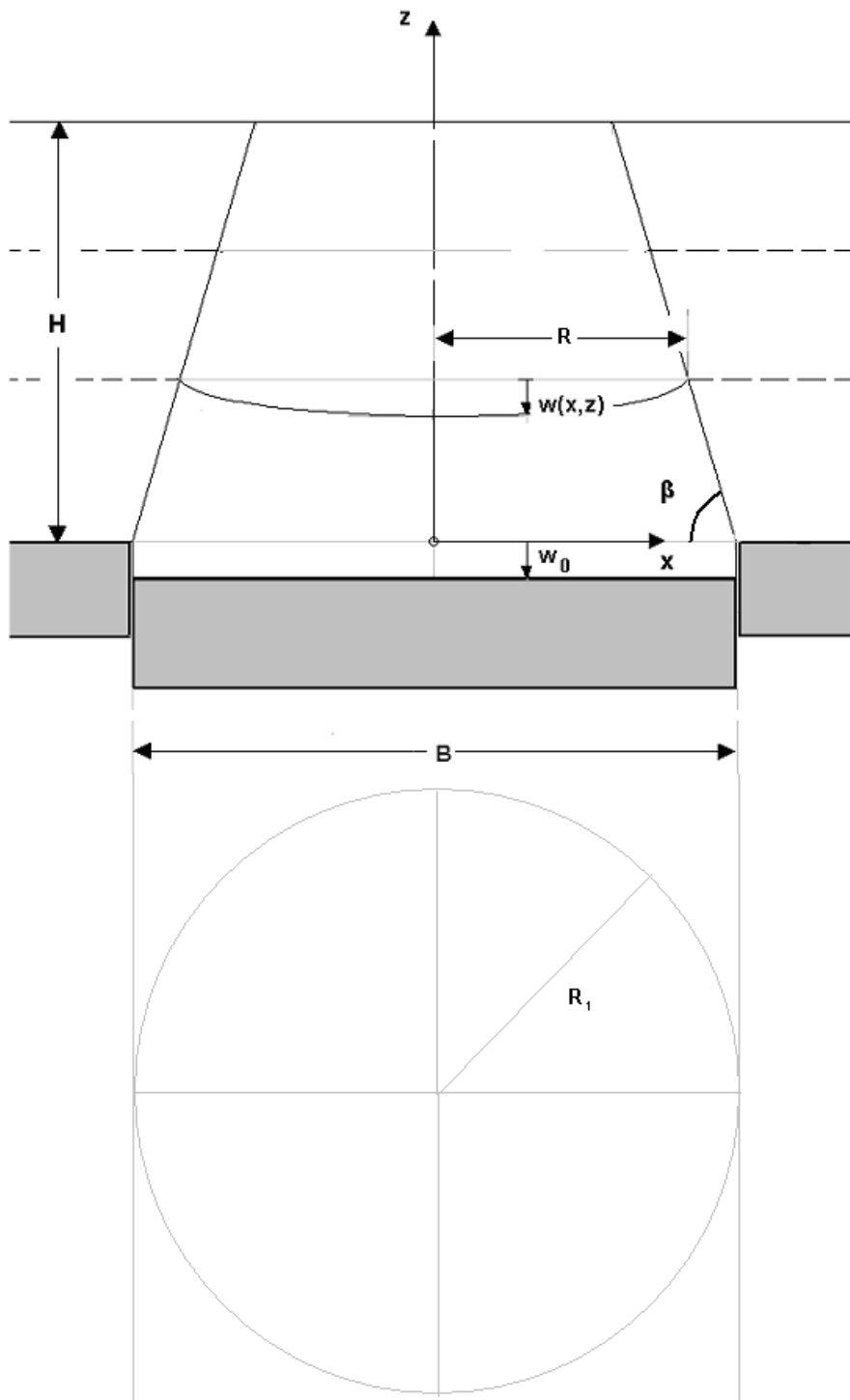
$$z^* = 0 : w^* = w_0^*$$

Οι συνοριακές συνθήκες του προβλήματος περιγράφονται σε μεταβλητό χωρίο:

$$z^* > 0 ; r^* = R^*(z^*) : w^* = 0$$

¹ Αγγλ. *Axisymmetric problem*

όπου R , η ακτίνα του πετάσματος καθίζησης, οποία μεταβάλλεται καθ' ύψος.



Εικόνα 2-10: Μαθηματική επεξεργασία προβλήματος βαθιάς καθίζησης – Αξονοσυμμετρικό Πρόβλημα

$$R^* = \frac{R}{B/2} = 1 - bz^* \quad ; \quad b = 2 \frac{H}{B} \cot \beta$$

Χρησιμοποιώντας ένα νέο μετασχηματισμό:

$$\bar{r} = u(r^*, z^*) = \frac{r^*}{R^*(z^*)}$$

$$\bar{z} = v(r^*, z^*) = z^*$$

όπου υπολογίζουμε,

$$\frac{\partial}{\partial r^*} = \frac{\partial u}{\partial r^*} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} + \frac{\partial v}{\partial r^*} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{R^*} \frac{\partial}{\partial \bar{r}}$$

$$\frac{\partial}{\partial z^*} = \frac{\partial u}{\partial z^*} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} + \frac{\partial v}{\partial z^*} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \left(-\frac{r^*}{R^{*2}} \frac{dR^*}{dz^*} \right) \frac{\partial}{\partial \bar{r}} + 1 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \left(-\frac{1}{R^*} \frac{dR^*}{dz^*} \bar{r} \right) \frac{\partial}{\partial \bar{r}} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$$

και

$$\frac{dR^*}{dz^*} = -b$$

Η εξίσωση που διέπει το πρόβλημα μετατρέπεται σε

$$\frac{\partial w^*}{\partial \bar{z}} = \frac{c}{(1-b\bar{z})^2} \frac{\partial^2 w^*}{\partial \bar{r}^2} - \left[\frac{b\bar{r}}{1-b\bar{z}} - \frac{c/\bar{r}}{(1-b\bar{z})^2} \right] \frac{\partial w^*}{\partial \bar{r}} \quad (2.41)$$

Και τελικά με τον παρακάτω μετασχηματισμό:

$$\omega = w^*$$

$$\rho = \bar{r}$$

$$s = b\bar{z}$$

και ένα νέο συντελεστή διάχυσης

$$\hat{c} = \frac{c}{b} > 0$$

το αξονοσυμμετρικό πρόβλημα βαθιάς καθίζησης μετατρέπεται στο παρακάτω πρόβλημα αρχικών και συνοριακών τιμών:

$$\frac{\partial \omega}{\partial s} = \frac{\hat{c}}{(1-s)^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \rho^2} - \left[\frac{\rho}{1-s} - \frac{\hat{c}/\rho}{(1-s)^2} \right] \frac{\partial \omega}{\partial \rho} \quad (2.42\alpha)$$

για

$$0 \leq \rho \leq 1 \quad ; \quad 0 < s \leq b \quad (2.42\beta)$$

και

$$\omega(\rho, 0) = w_0^* \quad (\alpha.σ.) \quad (2.42\gamma)$$

$$\omega(1, s) = 0 \quad (\sigma.σ.) \quad (2.42\delta)$$

ή στο συμμετρικό του ως προς τον άξονα $\rho=0$

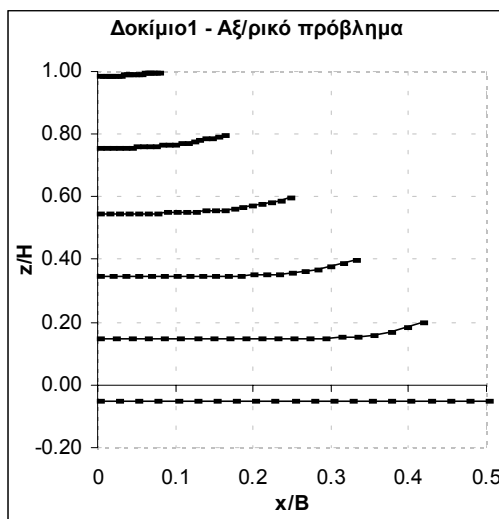
$$\frac{\partial \omega}{\partial s} = \frac{\hat{c}}{(1-s)^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \rho^2} - \left[\frac{\rho}{1-s} - \frac{\hat{c}/\rho}{(1-s)^2} \right] \frac{\partial \omega}{\partial \rho} \quad (2.43\alpha)$$

για

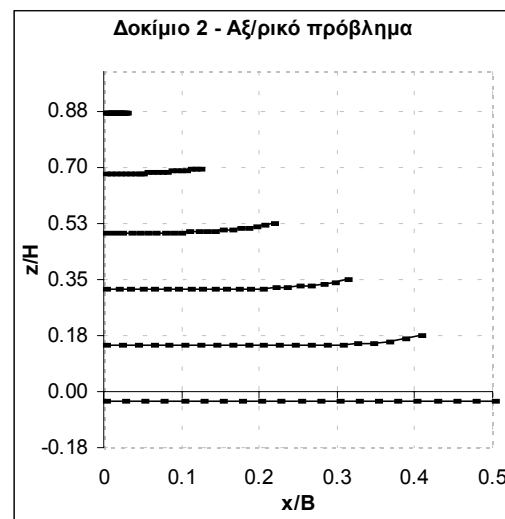
$$0 \leq \rho \leq 1 \quad ; \quad 0 < s \leq b \quad (2.43\beta)$$

και

$$\omega(\rho, 0) = w_0^* \quad (\alpha.σ.) \quad (2.43\gamma)$$



Εικόνα 2-11(α): Κατανομή καθίζησης καθ' ύψος - Δοκίμιο 1



Εικόνα 2-11(β): Κατανομή καθίζησης καθ' ύψος - Δοκίμιο 2

$$\omega(1, s) = 0 \quad (\sigma.σ.) \quad (2.43\delta)$$

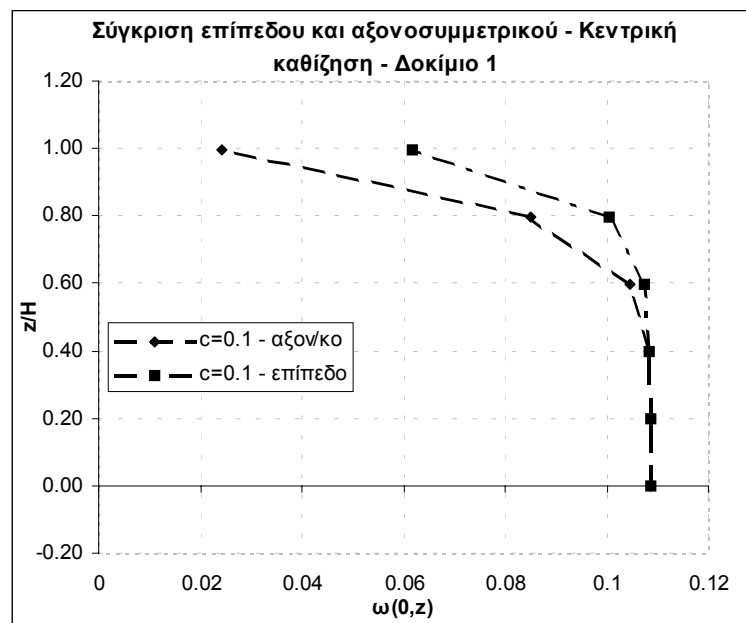
$$\omega_\rho(0, s) = 0 \quad (\sigma.σ.) \quad (2.43\epsilon)$$

Η αριθμητική επεξεργασία του αλγορίθμου που χρησιμοποιήθηκε εμφανίζεται στο Παράρτημα στο τέλος του Κεφαλαίου. Για την αριθμητική επίλυση του προβλήματος

χρησιμοποιήθηκε πεπλεγμένος αλγόριθμος πεπερασμένων διαφορών ο οποίος εμφανίζεται στο τέλος της εργασίας (Παράρτημα Α).

Τα αποτελέσματα της αριθμητικής επίλυσης παρουσιάζονται στις Εικόνες 2-11α και 2-11β. Τα Δοκίμια που χρησιμοποιήθηκαν στην επίλυση του αξονοσυμμετρικού προβλήματος είναι τα ίδια με αυτά που χρησιμοποιήθηκαν στο πρόβλημα επίπεδης παραμόρφωσης: Δοκίμιο-1 ($H/B=2$, $\beta=78^\circ$ και $w_0/B=0.1086$) και Δοκίμιο-2 ($H/B=2$, $\beta=75^\circ$ και $w_0/B=0.062$) στα οποία χρησιμοποιήθηκε ο ίδιος συντελεστής διάχυσης $\hat{c}=0.1$. Σημειώνεται ότι στις Εικόνες 2-11(α-β) τα αποτελέσματα εμφανίζονται στη μορφή $\omega/B^* = f(x/B, z/H)$ όπου $B^*=(H/B)=2$.

Για την σύγκριση των αποτελεσμάτων ανάμεσα στο πρόβλημα επίπεδης παραμόρφωσης και στο αξονοσυμμετρικό παρουσιάζεται ένα γράφημα (Εικόνα 2-12) στο οποίο εμφανίζονται τα αποτελέσματα της κεντρικής καθίζησης για το Δοκίμιο-1, στη μορφή $\omega(0, z) = f(z/H)$. Είναι φανερό ότι η διάχυση της καθίζησης είναι περισσότερο εμφανής στο αξονοσυμμετρικό πρόβλημα από ότι στο πρόβλημα επίπεδης παραμόρφωσης.



Εικόνα 2-12: Σύγκριση Επίπεδου – Αξονοσυμμετρικού – Κεντρική καθίζηση

1.5. Αντίστροφη Ανάλυση¹

Σε προηγούμενες παραγράφους μελετήθηκε το ευθύ πρόβλημα βαθιάς καθίζησης χρησιμοποιώντας το προσομοίωμα που προτείνεται από τη Θεωρία Litwinişzyn. Στη τελική του μορφή, το πρόβλημα αρχικών και συνοριακών τιμών που προκύπτει, περιλαμβάνει μία ελεύθερη παράμετρο, τον συντελεστή διάχυσης \hat{c} η οποία συγκεντρώνει τα φυσικά χαρακτηριστικά της γεωκατασκευής. Ο προσδιορισμός της παραμέτρου \hat{c} , ανάγεται στη σύγκριση αποτελεσμάτων φυσικών πειραμάτων με τα αριθμητικά αποτελέσματα.

¹ Αγγλ. *back analysis*



Εικόνα 2-13α: Χαλαρή άμμος – Δοκίμιο 3



Εικόνα 2-13β: Χαλαρή άμμος – Δοκίμιο 4



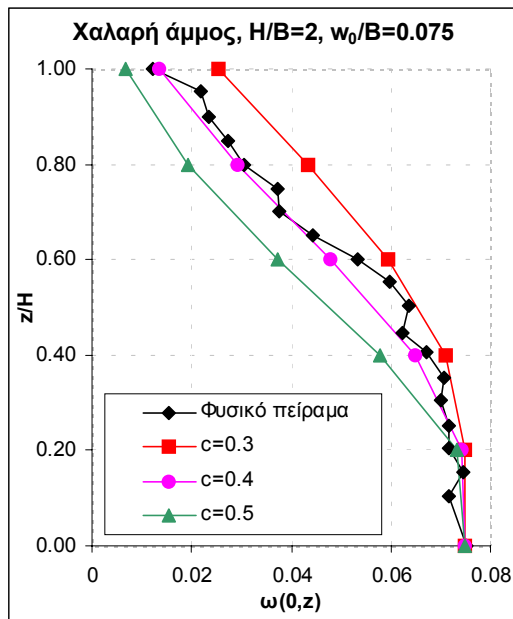
Εικόνα 2-14α: Πυκνή άμμος – Δοκίμιο 5



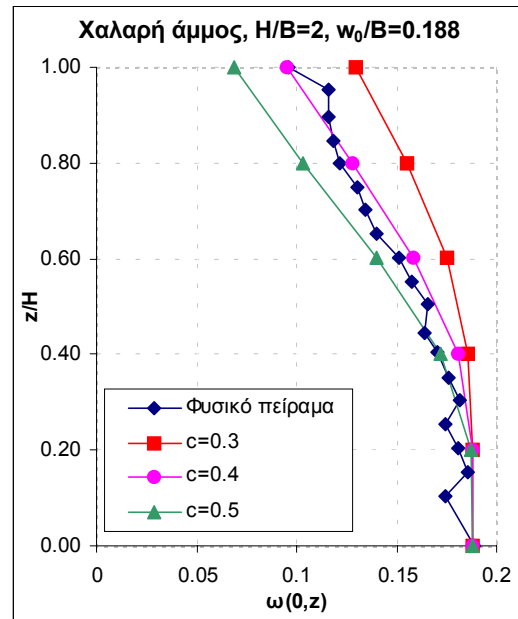
Εικόνα 2-14β: Πυκνή άμμος – Δοκίμιο 6

Συγκεκριμένα στη παράγραφο αυτή, συγκρίνονται δεδομένα φυσικών πειραμάτων μικρής κλίμακας με αριθμητικά αποτελέσματα [4]. Τα φυσικά πειράματα πετάσματος καθίζησης αφορούν δοκίμια πυκνής και χαλαρής άμμου (Hokksund sand), με κυκλική γεωμετρία πετάσματος καθίζησης υπό σταθερή ταχύτητα καθίζησης (0.5 mm/sec), αρκετά μικρή για τη προσομοίωση στατικών εδαφικών μετακινήσεων σε γεωκατασκευές πάνω από γεωδεξαμενές πετρελαίου. Από τα δοκίμια που

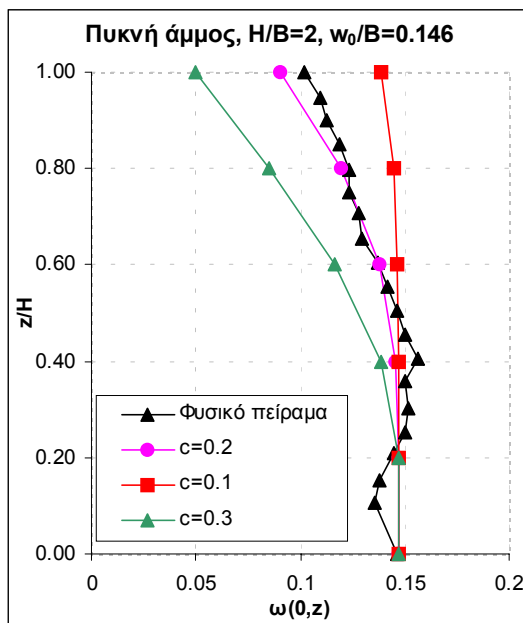
χρησιμοποιήθηκαν στα φυσικά πειράματα επιλέχθηκαν τυχαία κάποια για τη σύγκριση τους με αριθμητικά αποτελέσματα για το προσδιορισμό του συντελεστή διάχυσης.



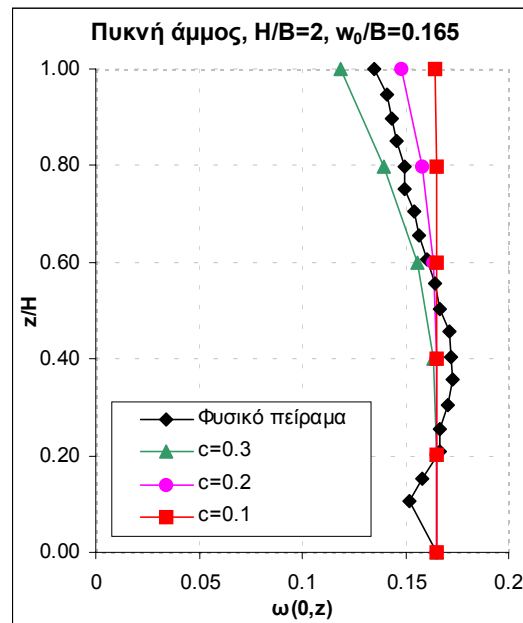
Εικόνα 2-15α: Χαλαρή άμμος – Δοκίμιο 3



Εικόνα 2-15β: Χαλαρή άμμος – Δοκίμιο 4



Εικόνα 2-16α: Πυκνή άμμος – Δοκίμιο 5



Εικόνα 2-16β: Πυκνή άμμος – Δοκίμιο 6

Τα Δοκίμια, τα οποία χρησιμοποιήθηκαν είναι (Δοκίμιο 3) $H/B=2$, $w_0/B=0.075$ και $\beta=82.2^\circ$ (Εικόνα 2-13α) και (Δοκίμιο 4) $H/B=2$, $w_0/B=0.188$ και $\beta=84.5^\circ$ (Εικόνα 2-13β), τα οποία αφορούν τα φυσικά πειράματα χαλαρής άμμου. Τα φυσικά πειράματα πυκνής άμμου αφορούν Δοκίμια με τη παρακάτω περιγραφή: (Δοκίμιο 5) $H/B=2$, $w_0/B=0.146$ και $\beta=82^\circ$, (Εικόνα 2-14α) και (Δοκίμιο 6) $H/B=2$, $w_0/B=0.165$ και $\beta=84.7^\circ$ (Εικόνα 2-14β).

Τα δεδομένα των φυσικών πειραμάτων πυκνής και χαλαρής άμμου χρησιμοποιήθηκαν στην επίλυση του αξονοσυμμετρικού προβλήματος, όπως αυτό περιγράφηκε στη παράγραφο 1.4, για διάφορες τιμές συντελεστών διάχυσης c . Τα αποτελέσματα των αριθμητικών επιλύσεων σε σύγκριση με τα αποτελέσματα των φυσικών πειραμάτων εμφανίζονται στις Εικόνες 2-15α, 2-15β, για τη χαλαρή άμμο και 2-16α, 2-16β για τη πυκνή στη μορφή $\omega(0, z) = f(z/H)$. Από τη παρεμβολή δεδομένων, όπως παρουσιάζεται στα γραφήματα είναι φανερό ότι για τη χαλαρή άμμο ο συντελεστής διάχυσης αντιστοιχεί σε $\hat{c}=0.4$, ενώ για τη πυκνή άμμο σε $\hat{c}=0.2$.

2. ΕΥΘΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΒΑΘΙΑΣ ΚΑΘΙΖΗΣΗΣ ΜΕ ΤΗ ΘΕΩΡΙΑ ΤΗΣ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ

2.1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

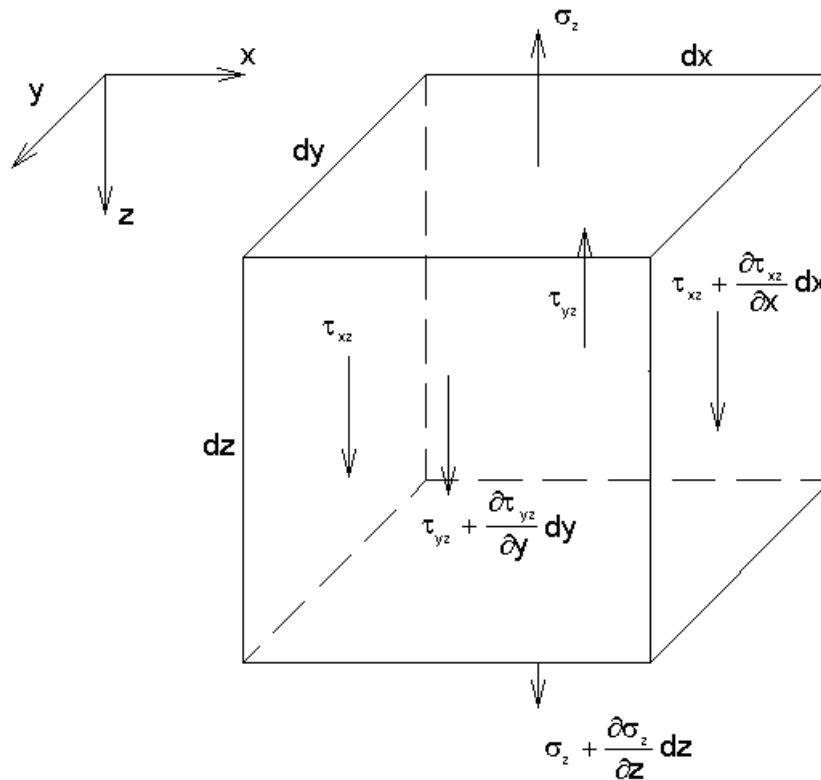
Στη προηγούμενη ενότητα του Κεφαλαίου αυτού, μελετήθηκε το Ευθύ πρόβλημα βαθιάς καθίζησης χρησιμοποιώντας τη θεωρία του J. Litwiniszyn. Η θεωρία του J. Litwiniszyn χρησιμοποιεί την ολοκληρωτική εξίσωση Einstein-Kolmogorov προκειμένου να υπολογίσει την κατανομή καθίζησης, η οποία καταλήγει σε ένα μαθηματικό προσομοίωμα «βάσης» για την κατανομή της καθίζησης το οποίο περιγράφεται από την εξίσωση θερμότητας δι' αγωγής του Fourier. Το πρόβλημα αρχικών και συνοριακών τιμών που προκύπτει περιλαμβάνει μία ελεύθερη παράμετρο η οποία προσδιορίζει τα μηχανικά χαρακτηριστικά του εδαφικού σχηματισμού και μπορεί να υπολογιστεί από φυσικά πειράματα, όπως επίσης περιγράφεται σε προηγούμενη παράγραφο.

Σε αυτή την ενότητα περιγράφεται ένα προσομοίωμα «βάσης» βαθιάς καθίζησης το οποίο χρησιμοποιεί ως βάση τη Θεωρία της Ελαστικότητας. Χρησιμοποιώντας τις μηχανικές ιδιότητες ενός στοιχειώδους σωματιδίου, τις καταστατικές εξισώσεις της ελαστικότητας μελετάται η εξίσωση ισορροπίας για συγκεκριμένες συνοριακές συνθήκες. Η πλειοψηφία των προτεινόμενων προσομοιωμάτων βάσης αναφέρονται στην ισότροπη, γραμμική, ελαστική συμπεριφορά του υλικού.

2.2. Εφαρμογή της ελαστοστατικής θεωρίας H.A.Rahmatulin

2.2.1. Βασικές αρχές της ελαστοστατικής θεωρίας H.A.Rahmatulin

Για να προβλέψουμε την κατανομή της καθίζησης της επιφάνειας της γης κάτω από την επίδραση των υπογείων εργασιών, ως βάση δεχόμαστε ένα συνεχές μέσο με ένα βαθμό ελευθερίας. Το μηχανικό προσομοίωμα και ο στοιχειώδης όγκος του φαίνονται στην Εικόνα 2-17. Οι κύριες εξισώσεις της θεωρίας αυτού του μέσου έχουν την ακόλουθη μορφή:



Εικ.2-17: Μηχανικό προσομοίωμα

$$\sigma_z = E_0 \varepsilon_z, \quad \tau_{xz} = \mu_0 \gamma_{xz}, \quad \tau_{yz} = \mu_0 \gamma_{yz} \quad (2.44)$$

$$\sigma_x = \sigma_y = \tau_{zx} = \tau_{zy} = \tau_{yz} = \tau_{xy} = 0$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y}$$

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \gamma_{zx} = \gamma_{xy} = \gamma_{yz} = 0$$

από τις οποίες προκύπτει

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0 \quad (2.45)$$

όπου οι ποσότητες E_0 και μ_0 είναι χαρακτηριστικά του μέσου. Τότε από την ισορροπία των δυνάμεων στη κατακόρυφη διεύθυνση, προκύπτει η κύρια εξίσωση για τις μετακινήσεις

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + k^2 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0, \quad k^2 = \frac{E_0}{\mu_0} \quad (2.46)$$

στην οποία δίνονται αρχικές και συνοριακές συνθήκες ανάλογα με το φυσικό πρόβλημα.

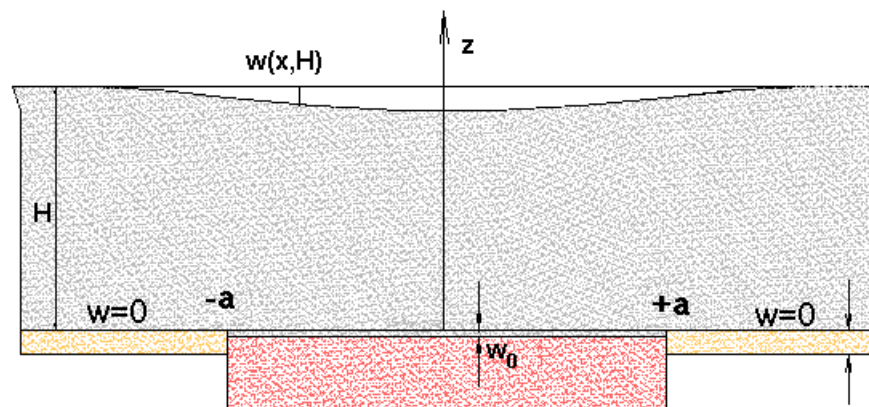
Από τις σχέσεις ανάμεσα στα χαρακτηριστικά του μέσου E_0 και μ_0 και στις ελαστικές σταθερές της Θεωρίας του Κλασικού Ελαστικότητας, G (μέτρο Kirchoff), E (μέτρο

Young) και ν (λόγος Poisson) υπολογίζεται η παράμετρος k . Έτσι, για $\mu_0 = G = E/2/(1+\nu)$ είναι $E_0 = E(1-\nu)/(1+\nu)/(1-2\nu)$, $k^2 = 2(1-\nu)/(1-2\nu)$.

2.2.2. Πρόβλημα επίπεδης παραμόρφωσης

Ας θεωρήσουμε το πρόβλημα επίπεδης παραμόρφωσης για τον υπολογισμό της κατανομής των καθιζήσεων στην επιφάνεια της γης στην περίπτωση ενός αρχικού σταδίου υπογείων εργασιών.

Σύμφωνα με τη θεωρία Rahmatulin το πρόβλημα του να οριστεί το $w=w(x,z)$ μετατρέπεται στο ακόλουθο πρόβλημα για την εξίσωση Laplace μέσα σε μία άπειρη λωρίδα (Εικ.2-18):



Εικ.2-18: Φυσικό πρόβλημα

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + k^2 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0 \quad (2.47\alpha)$$

$$w(x,0) = \begin{cases} 0 & , \quad |x| \in (a, +\infty] \\ -w_0 & , \quad x \in [-a, a] \end{cases} \quad (2.47\beta)$$

$$\sigma_z = E_0 \frac{\partial w}{\partial z} \Big|_{z=H} = 0 \quad (2.47\gamma)$$

όπου $w_0 = nm$ – η καθίζηση στο θυροπέτασμα, και n ο συντελεστής που χαρακτηρίζει την μέθοδο εφαρμογής των υπογείων εργασιών.

Για να λύσουμε το πρόβλημα χρησιμοποιούμε μετασχηματισμό Fourier:

$$\bar{w}(\alpha, z) : \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} w(x, z) e^{i\alpha x} dx \quad (2.48)$$

$$w(x, z): \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} w(\alpha, z) e^{-i\alpha x} d\alpha \quad (2.49)$$

Από τις «αρχικές» συνθήκες του προβλήματος έχουμε

$$\begin{aligned} \bar{w}(\alpha, 0): & \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} w(x, 0) e^{i\alpha x} dx = \\ & = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{+a} (-w_0) e^{i\alpha x} dx = -\frac{2w_0 \sin(\alpha a)}{\alpha\sqrt{2\pi}} \end{aligned} \quad (2.50)$$

$$\left. \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \right|_{z=H} = 0 \quad (2.51)$$

Τότε η σχέση (2.47α) μετατρέπεται στη παρακάτω συνήθη διαφορική εξίσωση

$$k^2 \frac{d^2 \bar{w}}{dz^2}(\alpha, z) - \alpha^2 \bar{w}(\alpha, z) = 0 \quad (2.52)$$

της οποίου η γενική λύση είναι

$$\bar{w}(\alpha, z) = A(\alpha) \cosh\left(\frac{\alpha z}{k}\right) + B(\alpha) \sinh\left(\frac{\alpha z}{k}\right) \quad (2.53)$$

όπου $A(\alpha)$ και $B(\alpha)$ είναι σταθερές ολοκλήρωσης, για τις οποίες ισχύει

$$\bar{w}(\alpha, 0) = A(\alpha) = \frac{-2w_0 \sin(\alpha a)}{\alpha\sqrt{2\pi}} \quad (2.54)$$

$$\left. \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \right|_{z=H} = \frac{\alpha}{k} \sinh\left(\frac{\alpha H}{k}\right) \frac{(-2w_0 \sin(\alpha a))}{\alpha\sqrt{2\pi}} + B(\alpha) \frac{\alpha}{k} \cosh\left(\frac{\alpha H}{k}\right) = 0 \quad (2.55)$$

Έτσι, από τους (2.55) και (2.51) επιτυγχάνουμε

$$B(\alpha) = \frac{2w_0 \sinh\left(\frac{\alpha H}{k}\right) \cdot \sin(\alpha a)}{\alpha\sqrt{2\pi} \cosh\left(\frac{\alpha H}{k}\right)} \quad (2.56)$$

Τότε η κατανομή των καθιζήσεων δίνεται από τη σχέση

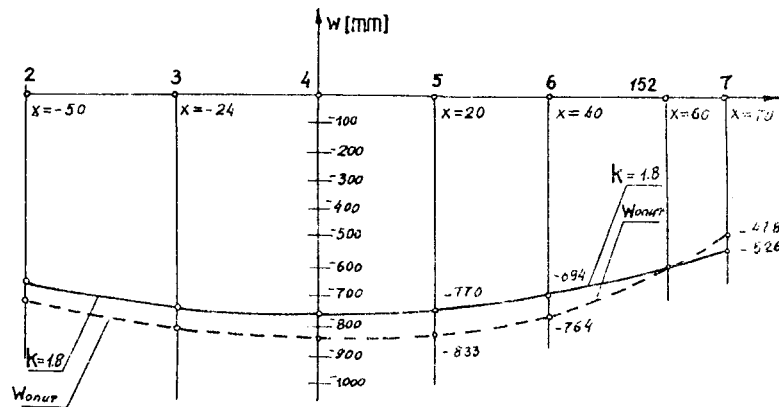
$$\begin{aligned} w(x, z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{w}(\alpha, z) e^{-i\alpha x} d\alpha \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[A(\alpha) \cosh\left(\frac{\alpha z}{k}\right) + B(\alpha) \sinh\left(\frac{\alpha z}{k}\right) \right] e^{-i\alpha x} d\alpha = \end{aligned} \quad (2.57\alpha)$$

$$= -\frac{w_0}{\pi} \left\{ \arctan \left[\frac{\sinh \left(\frac{k\pi(a+x)}{2H} \right)}{\cos \left(\frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{z}{H} \right) \right)} \right] + \arctan \left[\frac{\sinh \left(\frac{k\pi(a-x)}{2H} \right)}{\cos \left(\frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{z}{H} \right) \right)} \right] \right\} \quad (2.57\beta)$$

Για $z=H$ η κατανομή των καθιζήσεων είναι

$$w(x, H) = -\frac{w_0}{\pi} \left\{ \arctan \left[\sinh \left(\pi k \left(\frac{a+x}{2H} \right) \right) \right] + \arctan \left[\sinh \left(\pi k \left(\frac{a-x}{2H} \right) \right) \right] \right\} \quad (2.58)$$

Το τεστ επαλήθευσης της λύσης του προβλήματος, για $z=H$, (σχέση 2.58) επιτυγχάνεται για το μεταλλείο Lenin (Σιβηρία) εμφανίζεται στην Εικόνα 2-19 για $k=1.8$ σύμφωνα με τη βιβλιογραφία [6], και H τείνει στο άπειρο.

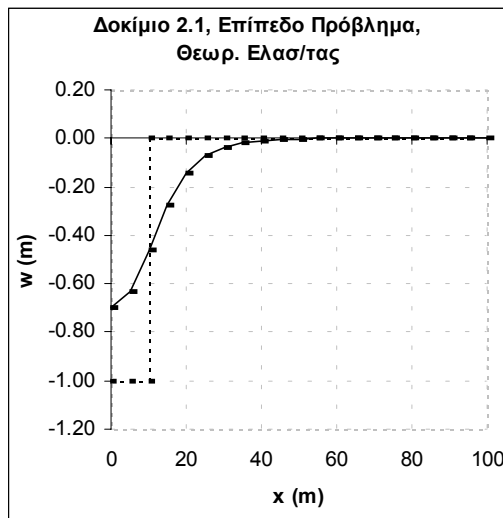


Εικ.2-19: Σύγκριση μηχανικού προσομοιώματος με πραγματικά δεδομένα

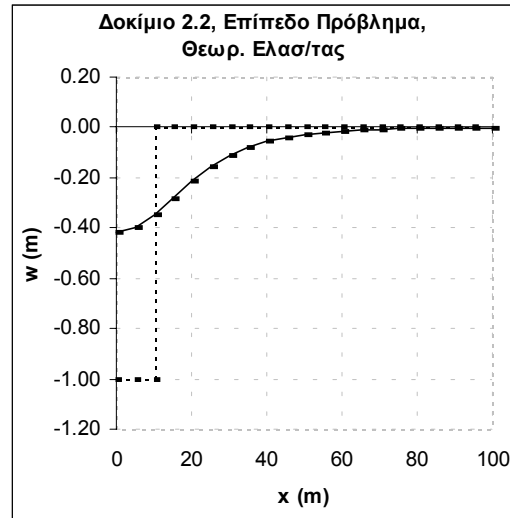
Στην εργασία αυτή, για την επαλήθευση της λύσης του προβλήματος βαθιάς καθίζησης με τη Θεωρία της Ελαστικότητας (σχέση 2.57), χρησιμοποιούνται δοκίμια από το υλικό που περιγράφηκε παραπάνω ($k=1.8$), με πλάτος πετάσματος καθίζησης $a=10\text{m}$, καθίζηση στο πέτασμα $w_0=1\text{m}$, για διάφορα ύψη καθίζησης: για το Δοκίμιο 2.1 $H=20\text{m}$, για το Δοκίμιο 2.2 $H=40\text{m}$, για το Δοκίμιο 2.3 $H=60\text{m}$, για το Δοκίμιο 2.4 $H=80\text{m}$, για το Δοκίμιο 2.5 $H=100\text{m}$.

Για τα Δοκίμια αυτά υπολογίζεται αριθμητικά (Παράρτημα Β) η κατανομή της καθίζησης στην επιφάνεια ($z=H$) και εμφανίζεται σε αντιπαραβολή με την καθίζηση στο θυροπέτασμα καθίζησης (Εικόνες 2-20α – 2.20ε). Η πλήρης γραμμή περιγράφει την κατανομή στην επιφάνεια, ενώ η εστιγμένη γραμμή αντιστοιχεί στην κατανομή της καθίζησης στο θυροπέτασμα.

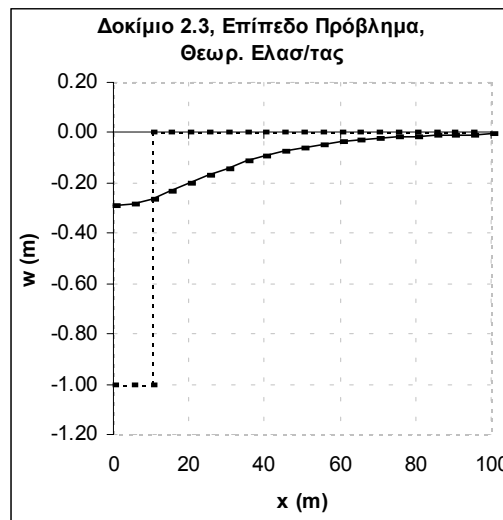
Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται για εύρος δεκαπλάσιο του πλάτους στο θυροπέτασμα καθίζησης ($a=10\text{m}$), δηλαδή $x \in [0,100]$ αφού σύμφωνα με την λύση του προβλήματος η κατανομή της καθίζησης στην επιφάνεια εκτείνεται ως αυτό το σημείο για μεγάλο ύψος (H – αρκετά μεγάλο). Η παρατήρηση αυτή έρχεται σε αντίθεση τόσο με τα πειραματικά αποτελέσματα (Εικόνες 2-13 και 2-14), (ακόμα και αν αυτά αναφέρονται στο αξονοσυμμετρικό πρόβλημα) όσο και με τα αποτελέσματα που προέκυψαν από την επίλυση του προβλήματος βαθιάς καθίζησης με τη Θεωρία Litwiniszyn.



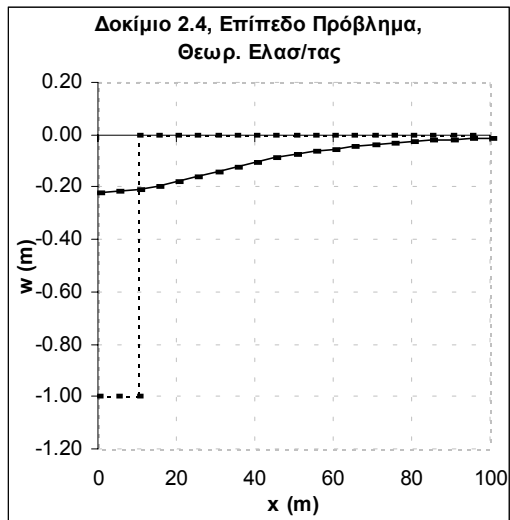
Εικόνα 2-20α: Δοκίμιο 2.1 – H=20m



Εικόνα 2-20β: Δοκίμιο 2.2 – H=40m



Εικόνα 2-20γ: Δοκίμιο 2.3 – H=60m

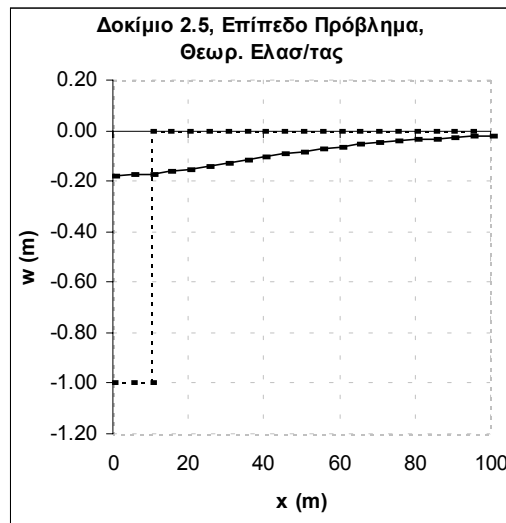


Εικόνα 2-20δ: Δοκίμιο 2.4 – H=80m

Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται για εύρος δεκαπλάσιο του πλάτους στο θυροπέτασμα καθίζησης ($a=10\text{m}$), δηλαδή $x \in [0,100]$ αφού σύμφωνα με την λύση του προβλήματος η κατανομή της καθίζησης στην επιφάνεια εκτείνεται ως αυτό το σημείο για μεγάλο ύψος (H – αρκετά μεγάλο). Η παρατήρηση αυτή έρχεται σε αντίθεση τόσο με τα πειραματικά αποτελέσματα (Εικόνες 2-13 και 2-14), (ακόμα και αν αυτά αναφέρονται στο αξονοσυμμετρικό πρόβλημα) όσο και με τα αποτελέσματα που προέκυψαν από την επίλυση του προβλήματος βαθιάς καθίζησης με τη Θεωρία Litwinişyn.

Τόσο τα φυσικά πειράματα όσο και οι προηγούμενες επιλύσεις εμφανίζουν τουλάχιστον ποιοτική διαφορά ως προς σχέση της κατανομής της καθίζησης στην επιφάνεια και στο θυροπέτασμα καθίζησης, αφού το εύρος της κατανομής της καθίζησης στο x -άξονα μειώνεται καθ' ύψος.

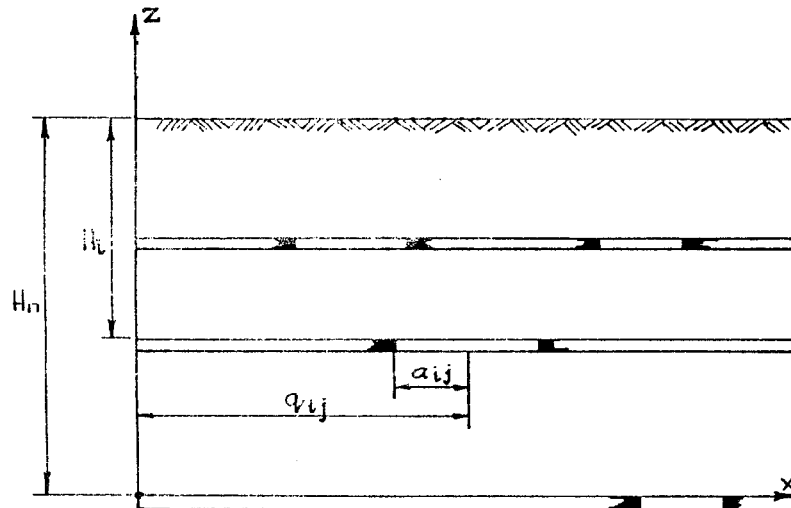
Ποσοτική, όσο και ποιοτική σύγκριση των διαφόρων λύσεων του προβλήματος βαθιάς καθίζησης παρουσιάζεται στη τελευταία παράγραφο του Κεφαλαίου αυτού.



Εικόνα 2-20ε: Δοκίμιο 2.5 – H=100m

Τόσο τα φυσικά πειράματα όσο και οι προηγούμενες επιλύσεις εμφανίζουν τουλάχιστον ποιοτική διαφορά ως προς σχέση της κατανομής της καθίζησης στην επιφάνεια και στο θυροπέτασμα καθίζησης, αφού το εύρος της κατανομής της καθίζησης στο x-άξονα μειώνεται καθ' ύψος.

Ποσοτική, όσο και ποιοτική σύγκριση των διαφόρων λύσεων του προβλήματος βαθιάς καθίζησης παρουσιάζεται στη τελευταία παράγραφο του Κεφαλαίου αυτού.



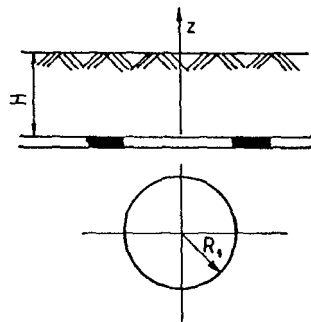
Εικ.2-21: Η Αρχή της Υπέρθωσης λύσεων

Αξίζει να σημειωθεί πως στην περίπτωση που έχουμε σε διαφορετικά σημεία πετάσματα καθίζησης καθώς και μόνιμα φορτία, η αρχή της υπέρθεσης λύσεων χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό της κατανομής καθιζήσεων (Εικόνα 2-21).

2.2.3. Αξονοσυμμετρικό πρόβλημα

Το αξονοσυμμετρικό πρόβλημα αφορά τη περίπτωση κυκλικού πετάσματος καθίζησης (Εικ.2-22). Για την επίλυση του αξονοσυμμετρικού προβλήματος χρησιμοποιούμε την μερική διαφορική εξίσωση (2.47α) σε πολικές συντεταγμένες με κατάλληλες «αρχικές» συνθήκες:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + k^2 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0 \quad (2.59\alpha)$$



Εικ. 2-22: Το αξονοσυμμετρικό πρόβλημα

$$w(r,0) = \begin{cases} -w_0 = \text{const}, & r \in [0, R_1] \\ 0, & r \in (R_1, \infty) \end{cases} \quad (2.59\beta)$$

$$\sigma_z(H,r) = E_0 \left. \frac{\partial w}{\partial z} \right|_{z=H} = 0 \quad (2.59\gamma)$$

Για την επίλυση του αξονοσυμμετρικού προβλήματος συνοριακών τιμών σε άπειρο χωρίο χρησιμοποιείται ο ολοκληρωτικός μετασχηματισμός Hankel:

$$\bar{f}(\alpha, z) := \int_0^{\infty} f(r, z) J_0(\alpha r) r dr \quad (2.60)$$

$$f(r, z) := \int_0^{\infty} \bar{f}(\alpha, z) J_0(r\alpha) \alpha d\alpha \quad (2.61)$$

όπου J_0 είναι η αντίστοιχη συνάρτηση Bessel και επιτυγχάνουμε:

$$k^2 \frac{d^2 \bar{w}}{dz^2} - \alpha^2 \bar{w}(z, \alpha) = 0 \quad (2.62)$$

επομένως

$$\bar{w}(\alpha, z) = A(\alpha) \cosh\left(\frac{\alpha z}{k}\right) + B(\alpha) \sinh\left(\frac{\alpha z}{k}\right) \quad (2.63)$$

όπου $A(\alpha)$ και $B(\alpha)$ είναι σταθερές ολοκλήρωσης.
Εφόσον

$$\bar{w}(\alpha, 0) = \int_0^{R_1} (-w_0) r J_0(\alpha r) dr = \frac{-w_0 R_1 J_1(R_1 \alpha)}{\alpha} \quad (2.64)$$

$$w(r, 0) = \int_0^\infty \frac{-w_0 R_1 J_1(R_1 \alpha)}{\alpha} \cdot \alpha J_0(r\alpha) d\alpha \quad (2.65)$$

από τις συνοριακές συνθήκες του προβλήματος (2.59β)-(2.59γ) είναι

$$A(\alpha) = \frac{-w_0 R_1 J_1(R_1 \alpha)}{\alpha}, \quad B(\alpha) = -A(\alpha) \frac{\sinh \frac{\alpha H}{k}}{\cosh \frac{\alpha H}{k}} \quad (2.66)$$

και τελικά είναι

$$w(r, z) = -w_0 R_1 \int_0^\infty \frac{\cosh \left[\frac{\alpha}{k} (H - z) \right] J_1(R_1 \alpha) J_0(r\alpha)}{\cosh \frac{\alpha H}{k}} d\alpha \quad (2.67)$$

Εφαρμόζουμε μετασχηματισμό της μεταβλητής ολοκλήρωσης όπως παρακάτω

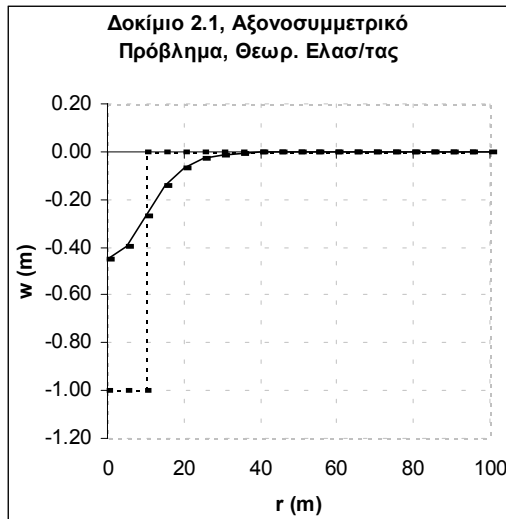
$$s = \frac{\alpha H}{k}, \quad d\alpha = \frac{k}{H} ds$$

οπότε η εξίσωση (2.62) παίρνει τη μορφή

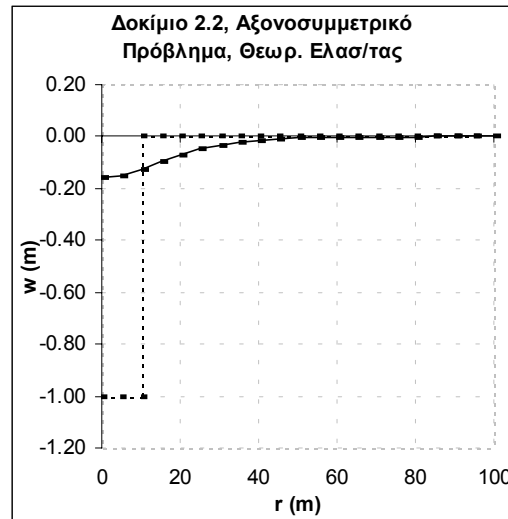
$$w(r, z) = \frac{-w_0 R_1 k}{H} \int_0^\infty \frac{\cosh \left[\left(1 - \frac{z}{H} s \right) \right] J_1 \left(\frac{R_1 k}{H} \cdot s \right) \cdot J_0 \left(\frac{k}{H} s \right) ds}{\cosh(s)} \quad (2.68)$$

Στην εργασία αυτή, για την επαλήθευση της λύσης του προβλήματος βαθιάς καθίζησης με τη Θεωρία της Ελαστικότητας (σχέση 2.68), χρησιμοποιούνται δοκίμια από το υλικό που περιγράφηκε στη προηγούμενη παράγραφο ($k=1.8$), με πλάτος πετάσματος καθίζησης $R_1=10\text{m}$, καθίζηση στο πέτασμα $w_0=1\text{m}$, για διάφορα ύψη καθίζησης: για το Δοκίμιο 2.1 $H=20\text{m}$, για το Δοκίμιο 2.1 $H=20\text{m}$, για το Δοκίμιο 2.2 $H=40\text{m}$, για το Δοκίμιο 2.3 $H=60\text{m}$, για το Δοκίμιο 2.4 $H=80\text{m}$, για το Δοκίμιο 2.5 $H=100\text{m}$.

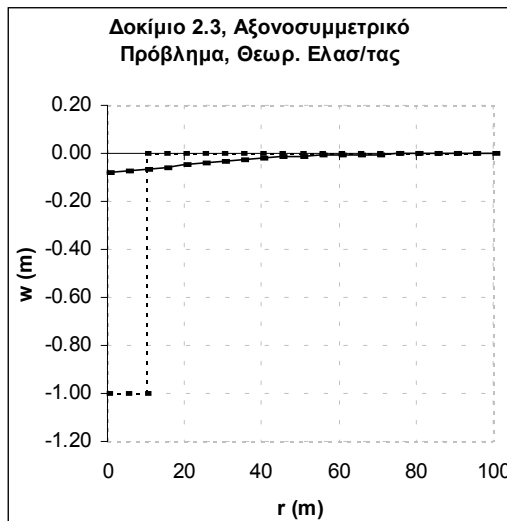
Για τα Δοκίμια αυτά υπολογίζεται αριθμητικά (Παράρτημα Β) η κατανομή της καθίζησης στην επιφάνεια ($z=H$) και εμφανίζεται σε αντιπαραβολή με την καθίζηση στο θυροπέτασμα καθίζησης (Εικόνες 2-23α – 2.23ε). Η πλήρης γραμμή περιγράφει την κατανομή στην επιφάνεια, ενώ η εστιγμένη γραμμή αντιστοιχεί στην κατανομή της καθίζησης στο θυροπέτασμα.



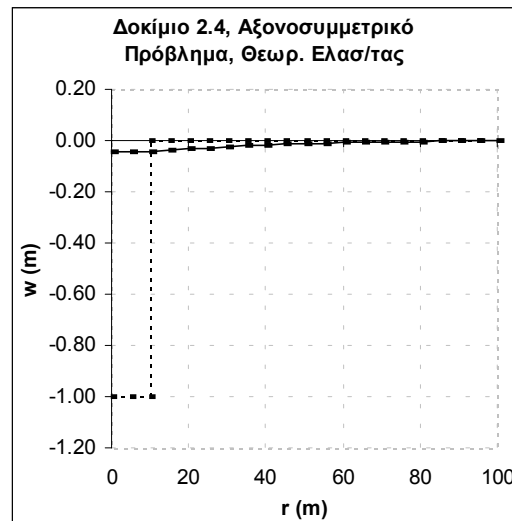
Εικόνα 2-23α: Δοκίμιο 2.1 – H=20m



Εικόνα 2-23β: Δοκίμιο 2.2 – H=40m



Εικόνα 2-23γ: Δοκίμιο 2.3 – H=60m



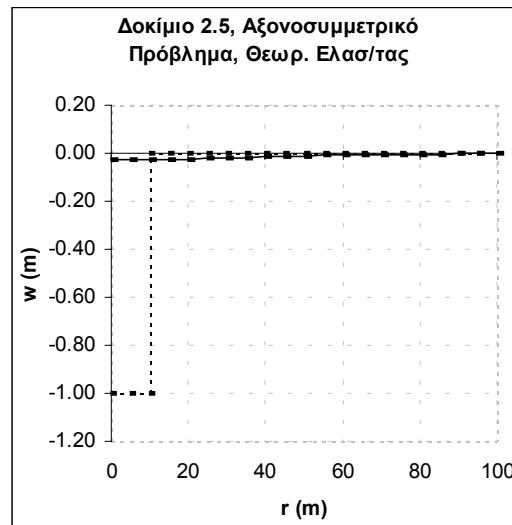
Εικόνα 2-23δ: Δοκίμιο 2.4 – H=80m

Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται για εύρος δεκαπλάσιο του ακτίνας του θυροπετάσματος καθίζησης ($R_1=10\text{m}$), δηλαδή $r \in [0,100]$ αφού σύμφωνα με την λύση του προβλήματος η κατανομή της καθίζησης στην επιφάνεια ($z=H$) εκτείνεται σε όλο τον άξονα x , αλλά σημαντική είναι περίπου ως αυτό το σημείο για μεγάλο ύψος (H – αρκετά μεγάλο). Η παρατήρηση αυτή έρχεται σε αντίθεση τόσο με τα πειραματικά αποτελέσματα (Εικόνες 2-13 και 2.14), όσο και με τα αποτελέσματα που προέκυψαν από την επίλυση του προβλήματος βαθιάς καθίζησης με τη Θεωρία Litwinişyn.

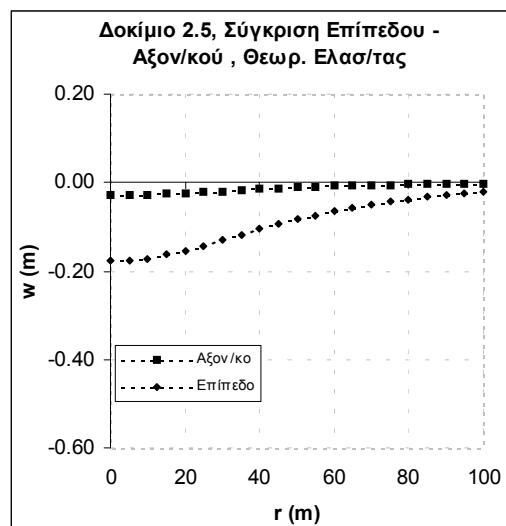
Τόσο τα φυσικά πειράματα όσο και οι προηγούμενες επιλύσεις εμφανίζουν τουλάχιστον ποιοτική διαφορά ως προς την κατανομή της καθίζησης στην επιφάνεια και στο θυροπέτασμα καθίζησης, αφού το εύρος της κατανομής της καθίζησης στο x -άξονα (r -άξονας σε πολικές) μειώνεται καθ' ύψος.

Για την σύγκριση των αποτελεσμάτων ανάμεσα στο πρόβλημα επίπεδης παραμόρφωσης και στο αξονοσυμμετρικό παρουσιάζεται ένα γράφημα (Εικόνα 2-24)

στο οποίο εμφανίζονται τα αποτελέσματα της κεντρικής καθίζησης για το Δοκίμιο-2.5, για την επίλυση του προβλήματος με τη Θεωρία της Ελαστικότητας όπως και



Εικόνα 2-23ε: Δοκίμιο 2.5 – H=100m



Εικόνα 2-24: Δοκίμιο 2.5 Σύγκριση αξονοσυμμετρικού– επίπεδου – Θεωρία Ελαστικότητας

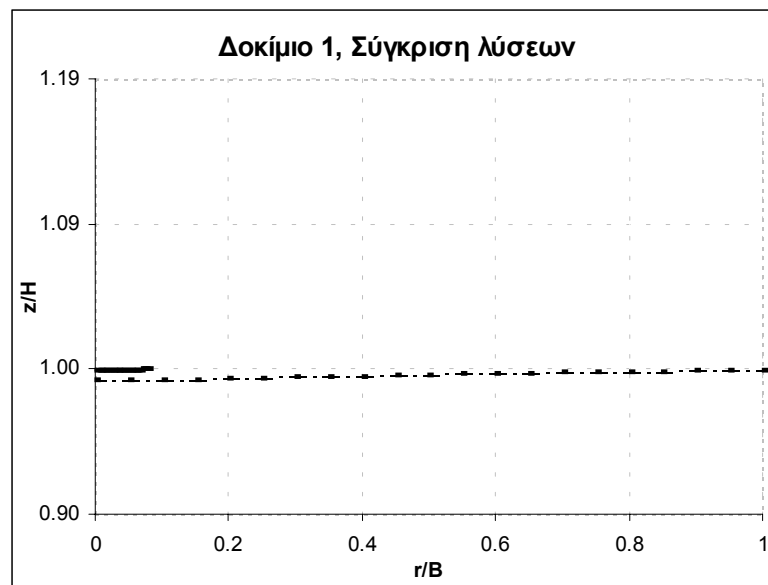
για την προηγούμενη θεώρηση του προβλήματος. Είναι φανερό ότι και σε αυτή τη περίπτωση η διάχυση της καθίζησης είναι περισσότερο έντονη στο αξονοσυμμετρικό πρόβλημα από ότι στο πρόβλημα επίπεδης παραμόρφωσης.

3. ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΛΥΣΕΩΝ

Στη παράγραφο αυτή παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της σύγκρισης των δύο μεθόδων θεώρησης του προβλήματος βαθιάς καθίζησης. Σε αυτό το σημείο πρέπει να αναφερθούν οι διαφορές των προβλημάτων αρχικών και συνοριακών τιμών που συγκρίνονται. Στη θεώρηση Litwiniuszyn, το πρόβλημα αρχικών και συνοριακών

τιμών που προκύπτει, ορίζεται ως προς τον x-άξονα στο χωρίο $[-1, 1]$ ή στο αντίστοιχο συμμετρικό $[0, 1]$ ενώ τα σύνορα του χωρίου επίλυσης θεωρούνται γνωστά και καθορίζονται από τη γωνία β . Τα σύνορα αυτά θεωρούνται ως διατμητική διεπιφάνεια όπου και υπάρχει εντοπισμός των παραμορφώσεων. Αντίθετα, στη θεώρηση με χρήση της Θεωρίας Ελαστικότητας, το πρόβλημα αρχικών και συνοριακών που προκύπτει ορίζεται ως προς το x-άξονα στο $[-\infty, +\infty]$, οπότε και η κατανομή καθίζησης που προκύπτει, εκτείνεται σε όλο τον x-άξονα.

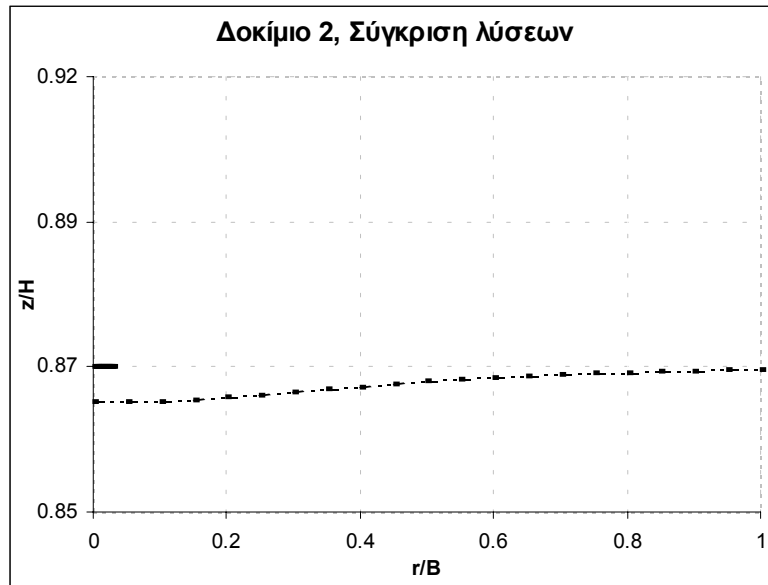
Τα Δοκίμια που χρησιμοποιήθηκαν στην επίλυση του αξονοσυμμετρικού προβλήματος είναι τα ίδια με αυτά που χρησιμοποιήθηκαν στο πρόβλημα επίπεδης παραμόρφωσης: Δοκίμιο-1 ($H/B=2$, $\beta=78^\circ$ και $w_0/B=0.1086$) και Δοκίμιο-2 ($H/B=2$, $\beta=75^\circ$ και $w_0/B=0.062$) στα οποία χρησιμοποιήθηκε ο ίδιος συντελεστής διάχυσης $\hat{c}=0.2$. Καθώς επίσης και τα (Δοκίμιο 5) $H/B=2$, $w_0/B=0.146$ και $\beta=82^\circ$, (Εικόνα 14α) και (Δοκίμιο 6) $H/2B=2$, $w_0/B=0.165$ και $\beta=84.3^\circ$ (Εικόνα 14β) για τον ίδιο συντελεστή διάχυσης $\hat{c}=0.2$. Προκειμένου να επιλυθεί το πρόβλημα καθίζησης για τα παραπάνω δοκίμια με τη Θεωρία της Ελαστικότητας, απαιτείται η πραγματική γεωμετρία των Δοκιμίων αλλά και οι παράμετροι του εδαφικού υλικού που χρησιμοποιήθηκε, η οποία παρουσιάζεται στη δημοσίευση [3].



Εικόνα 2-25α: Δοκίμιο 1

Το ύψος των Δοκιμίων είναι 200mm, το πλάτος (διάμετρος) του θυροπετάσματος καθίζησης είναι 100mm ($H/B=2$) και ανάλογα προκύπτει η καθίζηση στη βάση του θυροπετάσματος καθίζησης. Σύμφωνα με τα φυσικά πειράματα, το υλικό το οποίο χρησιμοποιήθηκε έχει $\nu=0.2$ (Λόγος Poisson). Από τις παραμέτρους προκύπτει ότι $k=1.63$.

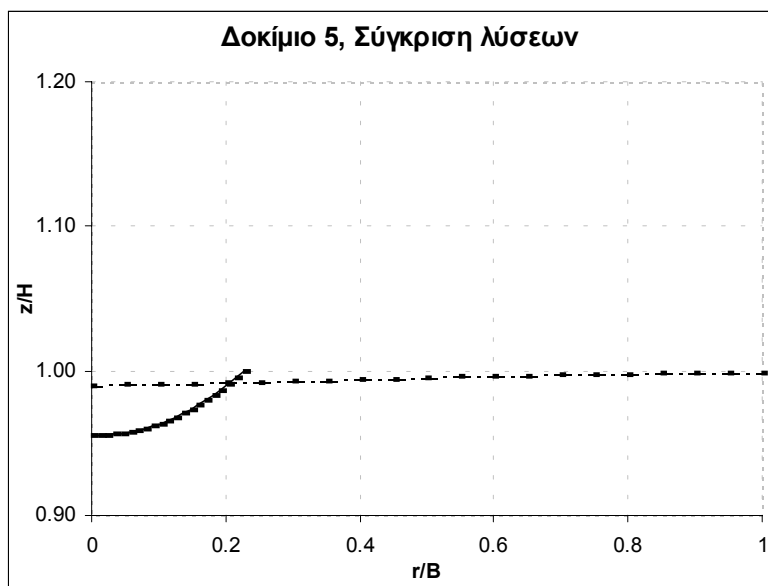
Αφού υπολογίστηκε αριθμητικά η κατανομή της καθίζησης, τα αποτελέσματα που προέκυψαν κανονικοποιήθηκαν προκειμένου να γίνουν συγκρίσιμα με αυτά της αρχικής θεώρησης. Σημειώνεται ότι οι συντεταγμένες του άξονα x είναι κανονικοποιημένες ως προς την παράμετρο $B^* = (H/B) = 2$. Αυτό σημαίνει ότι το πλάτος του πετάσματος καθίζησης αναφέρεται στην κανονικοποιημένη τιμή $x=0.5$ (Παράρτημα Γ).



Εικόνα 2-25β: Δοκίμιο 2

Αφού υπολογίστηκε αριθμητικά η κατανομή της καθίζησης, τα αποτελέσματα που προέκυψαν κανονικοποιήθηκαν προκειμένου να γίνουν συγκρίσιμα με αυτά της αρχικής θεώρησης. Σημειώνεται ότι οι συντεταγμένες του άξονα x είναι κανονικοποιημένες ως προς την παράμετρο $B^* = (H/B) = 2$. Αυτό σημαίνει ότι το πλάτος του πετάσματος καθίζησης αναφέρεται στην κανονικοποιημένη τιμή $x=0.5$ (Παράρτημα Γ).

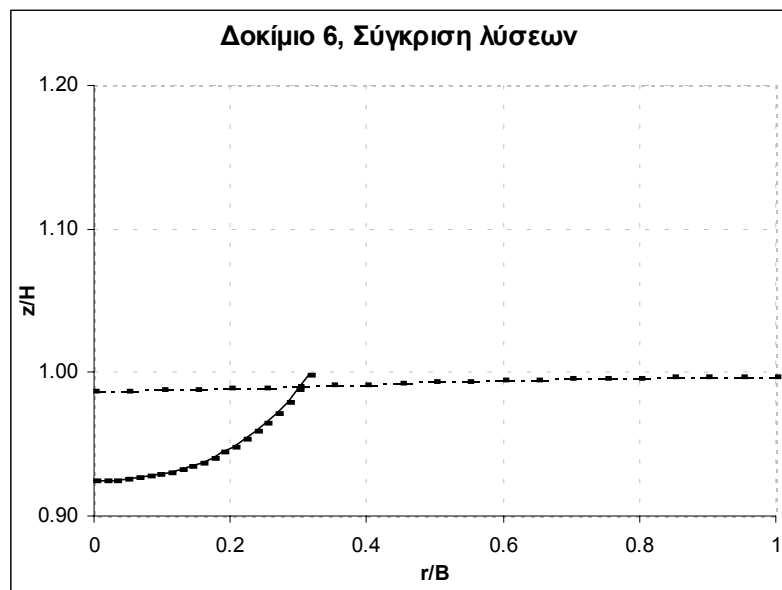
Στα γραφήματα 2-25α – 2.25δ συγκρίνεται η καθίζηση στην επιφάνεια ($z=H$) για την επίλυση του προβλήματος βαθιάς καθίζησης που αφορά τη Θεωρία Litwiniszyn (πλήρη γραμμή) με αυτήν που προκύπτει από την επίλυση του προβλήματος με χρήση της Θεωρίας Ελαστικότητας (εστιγμένη γραμμή).



Εικόνα 2-25γ: Δοκίμιο 5

Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται για εύρος τετραπλάσιο της ακτίνας του θυροπετάσματος καθίζησης ($R_1=50\text{mm}=0.05\text{m}$), δηλαδή $r \in [0,0.2]$ για να είναι συγκρίσιμα, αν και σύμφωνα με την λύση του προβλήματος με τη Θεωρία Ελαστικότητας η κατανομή της καθίζησης στην επιφάνεια εκτείνεται σε μεγαλύτερο πλάτος. Υπενθυμίζεται ότι στη λύση με χρήση της Θεωρίας Ελαστικότητας, για μεγάλο ύψος, το πλάτος της κατανομής καθίζησης στη επιφάνεια εκτείνεται σε πλάτος περίπου $10R_1$, σύμφωνα με τα αποτελέσματα που προκύπτουν από τη παράγραφο §2.2.2. και §2.2.3. Η παρατήρηση αυτή έρχεται σε αντίθεση τόσο με τα πειραματικά αποτελέσματα (Εικόνες 2-13 και 2-14), όσο και με τα αποτελέσματα που προέκυψαν από την επίλυση του προβλήματος βαθιάς καθίζησης με τη Θεωρία Litwiniszyn. Τόσο τα φυσικά πειράματα όσο και οι προηγούμενες επιλύσεις εμφανίζουν τουλάχιστον ποιοτική διαφορά ως προς την κατανομή της καθίζησης στην επιφάνεια και στο θυροπέτασμα καθίζησης, αφού το εύρος της κατανομής της καθίζησης στο x -άξονα (r -άξονας σε πολικές) μειώνεται καθ' ύψος.

Όσον αφορά τη ποιοτική σύγκριση των δύο θεωρήσεων, όπως αναφέρθηκε παραπάνω, διαφέρουν τουλάχιστον ως προς το εύρος της επιφανειακής καθίζησης που γίνεται αντιληπτή στην επιφάνεια της γης. Ποσοτικά, ως προς το μέγεθος της καθίζησης στις δύο πρώτες Εικόνες 2-23α και β είναι φανερή η απόκλιση των αποτελεσμάτων, αφού για την αντιμετώπιση του προβλήματος με τη Θεωρία Litwiniszyn, η κατανομή της καθίζησης είναι μηδενική, σε αντίθεση με τα αποτελέσματα της θεώρησης της Ελαστικότητας.



Εικόνα 2-24δ: Δοκίμιο 6

Η κατά μέτρο σύγκριση της επιφανειακής καθίζησης των δύο θεωρήσεων, για τα Δοκίμια 5 και 6, εκτός από την απόκλιση στο εύρος κατανομής της καθίζησης, δείχνει ότι τα αποτελέσματα συγκλίνουν, ειδικά αν ληφθεί υπ' όψιν ότι τα αποτελέσματα και των δύο θεωρήσεων έχουν προέλθει από αριθμητική επεξεργασία.

4. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 2

Σε αυτό το Κεφάλαιο μελετήθηκε το ευθύ πρόβλημα βαθιάς καθίζησης με χρήση της Θεωρίας βαθιάς καθίζησης Litwiniszyn. Η διαφορική εξίσωση Einstein-Kolmogorov που προκύπτει, με κατάλληλες παραδοχές, καταλήγει σε μία μερική διαφορική εξίσωση παραβολικού τύπου για την καθίζηση, η οποία είναι ταυτόσημη με την εξίσωση θερμότητας δι' αγωγής του Fourier με το βάθος z να αντικαθιστά το χρόνο t , Εξ. (2.26). Ο συντελεστής διάχυσης C στην προηγούμενα αναφερόμενη εξίσωση δίνεται στη μορφή γεωμετρικών χαρακτηριστικών και της αδιάστατης ποσότητας \hat{c} :

$$C = \frac{B}{2} \hat{c} \cot \beta$$

Χρησιμοποιώντας κατάλληλες «αρχικές» και συνοριακές συνθήκες το πρόβλημα αρχικών και συνοριακών τιμών που προκύπτει, επιλύθηκε αριθμητικά για το επίπεδο και το αξονοσυμμετρικό πρόβλημα. Ο συντελεστής διάχυσης \hat{c} περιγράφει την συνολική συμπεριφορά της βραχόμαζας και επηρεάζει την καθίζηση που υπολογίζεται στην επιφάνεια. Η ποσότητα \hat{c} υπολογίζεται με παρεμβολή σε πειραματικά δεδομένα. Οι τιμές της παραμέτρου \hat{c} είναι μεγαλύτερες στην χαλαρή άμμο παρά στην πυκνή.

Μία δεύτερη παράμετρος του προβλήματος είναι η γωνία κλίσης των συνόρων του μηχανισμού, β , η οποία επηρεάζει το πλάτος του μηχανισμού καθίζησης. Η ποσότητα αυτή υπολογίζεται άμεσα από τα πειραματικά δεδομένα.

Το ευθύ πρόβλημα βαθιάς καθίζησης μελετήθηκε επίσης με χρήση της Θεωρίας Ελαστικότητας, όπως συμβαίνει με την πλειοψηφία των προτεινόμενων προσομοιωμάτων «βάσης», η οποία αναφέρεται στην ισότροπη, γραμμική, ελαστική συμπεριφορά του υλικού. Η εξίσωση που προκύπτει είναι ελλειπτικού τύπου. Οι ολοκληρωτικές λύσεις που προκύπτουν υπολογίστηκαν αριθμητικά, με χρήση λογισμικού ανωτέρων μαθηματικών. Από την επίλυση που προκύπτει γίνεται κατ' αρχήν φανερό η ποιοτική διαφορά των αποτελεσμάτων των δύο θεωρήσεων, αφού το εύρος της επιφάνειας καθίζησης αυξάνεται αντίθετα με τα αποτελέσματα της επίλυσης με τη θεώρηση Litwiniszyn, αλλά ακόμη περισσότερο αντίθετα με τα πειραματικά αποτελέσματα [2], [4]. Ποσοτικά, το μέτρο της καθίζησης που εμφανίζεται στην επιφάνεια, για τις δύο θεωρήσεις, διαφέρει σημαντικά και ειδικά

στην περίπτωση των Δοκιμίων 1 και 2, η διαφορά αυτή δεν μπορεί να αποδοθεί στην αριθμητικό υπολογισμό των λύσεων.

Είναι φανερό και για τις δύο θεωρήσεις που χρησιμοποιήθηκαν για την επίλυση του προβλήματος βαθιάς καθίζησης, ότι η διάχυση της καθίζησης είναι περισσότερο εμφανής στο αξονοσυμμετρικό πρόβλημα από ότι στο πρόβλημα επίπεδης παραμόρφωσης.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Αριθμητική επίλυση προβλήματος βαθιάς καθίζησης – Ευθύ πρόβλημα

Στο Κεφάλαιο 2 η επίλυση του επιπέδου προβλήματος βαθιάς καθίζησης – ευθύ πρόβλημα ανάγεται στην επίλυση του παρακάτω προβλήματος αρχικών και συνοριακών τιμών

$$\frac{\partial \omega}{\partial s} = \frac{\hat{c}}{(1-s)^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi^2} - \frac{\xi}{1-s} \frac{\partial \omega}{\partial \xi} \quad (\text{Π2.1α})$$

για

$$0 \leq \xi \leq 1 \quad ; \quad 0 < s \leq b \quad (\text{Π2.1β})$$

και

$$\omega(\xi, 0) = w_0^* \quad (\text{α.σ.}) \quad (\text{Π2.1γ})$$

$$\omega(1, s) = 0 \quad (\text{σ.σ.}) \quad (\text{Π2.1δ})$$

$$\omega_\xi(0, s) = 0 \quad (\text{σ.σ.}) \quad (\text{Π2.1ε})$$

Αυτή είναι μερική διαφορική εξίσωση διάχυσης-μετάδοσης με μεταβλητούς συντελεστές. Το προσομοίωμα περιέχει μία ελεύθερη παράμετρο \hat{c} , η οποία προσδιορίζεται από πειραματικά δεδομένα. Για την αριθμητική επίλυση του παραπάνω προβλήματος αρχικών και συνοριακών τιμών αρχικά χρησιμοποιήθηκε αλγόριθμος άμεσης διατύπωσης, όπως περιγράφεται από την παρακάτω σχέση:

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x L_n} x_j (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + \frac{c \Delta t}{\Delta x^2 L_n^2} (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) \quad (\text{Π2.2α})$$

όπου

$$L_n = [0.0, 1.0] = 1-s \quad (\text{Π2.2β})$$

$$c = 0.1 \quad (\text{Π2.2γ})$$

$$x_j \in [0, 1.0] = \xi \quad (\text{Π2.2δ})$$

Ανάλογα, για το αξονοσυμμετρικό πρόβλημα η ανάπτυξη του σχήματος πεπερασμένων διαφορών με χρήση αλγορίθμου άμεσης διατύπωσης θα είχε ως αποτέλεσμα

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \left(\frac{\Delta t}{\Delta \rho L_n} - \frac{\hat{c}}{\rho L_n^2} \right) \rho_j (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + \frac{\hat{c} \Delta t}{\Delta \rho^2 L_n^2} (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) \quad (\text{Π2.3})$$

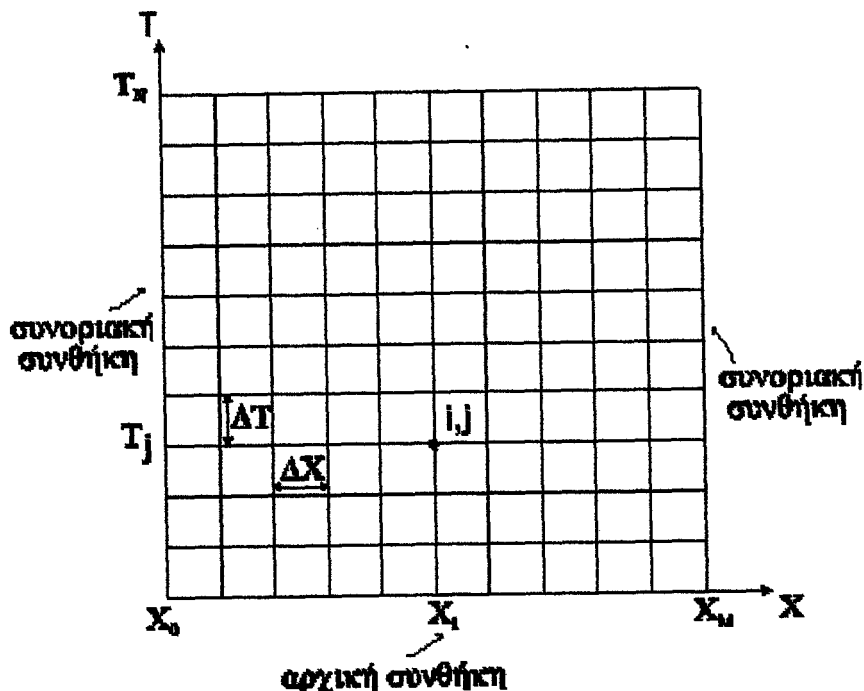
Σύμφωνα με τη βιβλιογραφία [9] η ευστάθεια του αριθμητικού αλγορίθμου πεπερασμένων διαφορών των μερικών διαφορικών εξισώσεων δευτέρας τάξεως εξασφαλίζεται όταν ισχύει

$$2r a(x,z) < 1 \text{ και } a(x,z) > 0 \quad (\text{Π2.4})$$

όπου $r = \Delta t / \Delta x^2$ και $a(x, z)$ ο συντελεστής του όρου δευτέρας τάξεως. Στην περίπτωση που αντιμετωπίζουμε, τόσο για το πρόβλημα επίπεδης παραμόρφωσης όσο και για το αξονοσυμμετρικό, η παραπάνω σχέση μετατρέπεται σε

$$2r \frac{\hat{c}}{(1-s)^2} < 1 \quad (\text{Π2.5})$$

Στην περίπτωση όπου στο φυσικό πρόβλημα τα σύνορα συγκλίνουν κάτω από την επιφάνεια, σύμφωνα με τους υπολογισμούς στο Κεφάλαιο 2, ο παρονομαστής της παραπάνω σχέσης μηδενίζεται, οπότε δεν υπάρχει ευστάθεια στην αριθμητική επίλυση του προβλήματος. Τότε μπορούμε να επιλύσουμε αριθμητικά το πρόβλημα για τιμές του s πολύ κοντά στο 1 επιλέγοντας την τιμή του r ώστε να ισχύει η παραπάνω σχέση ευστάθειας.



Εικ. Π2-1 : Πλέγμα κόμβων πεπερασμένων διαφορών

Για την επίλυση του συστήματος των εξισώσεων (Π2.1α – Π2.1ε) χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος των Πεπερασμένων Διαφορών στην οποία ανήκει και η μέθοδος της έμμεσης διατύπωσης Crank-Nicholson¹. Σύμφωνα με τη γενική μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών: οι τιμές των μεταβλητών του προβλήματος τη χρονική στιγμή n+1 προκύπτουν ως συνάρτηση των ίδιων μεταβλητών κατά την προηγούμενη χρονική στιγμή n.

Η περιοχή επίλυσης χωρίζεται σε υποπεριοχές οι οποίες σχηματίζονται από πλέγμα γραμμών όπως φαίνεται και στην Εικόνα Π2-1. Σε κάθε υποπεριοχή, κάθε εξίσωση μετατρέπεται σε σύστημα διακριτοποιημένων αλγεβρικών εξισώσεων, όπου η συνεχής πληροφορία που παρέχεται από την αναλυτική λύση αντικαθίσταται από διακεκριμένες τιμές επί των κόμβων του πλέγματος. Οι διακριτοποιημένες εξισώσεις προκύπτουν από τη διαφορική εξίσωση με προσέγγιση των διαφορικών τελεστών με αλγεβρικές διαφορές σύμφωνα με το Θεώρημα Taylor.

Μέθοδος Crank - Nicholson

Παρόλο που η μέθοδος άμεσης διατύπωσης² είναι υπολογιστικά απλή έχει ένα σοβαρό ελάττωμα. Το χρονικό βήμα ολοκλήρωσης $\Delta z = k$ είναι $0 < k/h^2$ δηλαδή $k \leq 0.5h^2$. Επίσης το χωρικό βήμα $h = \Delta x$ πρέπει να παραμένει μικρό για την επίτευξη μεγαλύτερης ακρίβειας. Οι Crank και Nicholson (1947) πρότειναν και χρησιμοποίησαν μία μέθοδο η οποία μειώνει τον συνολικό όγκο των υπολογισμών και είναι αξιόπιστη (δηλαδή συγκλίνει και είναι ευσταθής) για όλες τις τιμές του r (όπου $r = k/h^2$). Σύμφωνα με το σχήμα αυτό αντί οι τιμές των μεταβλητών του προβλήματος τη χρονική στιγμή n+1 να προκύπτουν ως συνάρτηση των τιμών των ίδιων μεταβλητών κατά την προηγούμενη χρονική στιγμή n σύμφωνα με την κλασσική άμεση απεικόνιση των πεπερασμένων διαφορών, στην Μέθοδο Crank - Nicholson αντικαθιστούνται από την μέση τιμή της απεικόνισης των διαφορών τους μεταξύ (n+1) και n χρονικού βήματος. Οι διακριτοποιημένες εξισώσεις προκύπτουν από την διαφορική εξίσωση με προσέγγιση των διαφορικών τελεστών από αλγεβρικές διαφορές. Οι μορφές διακριτοποίησης που χρησιμοποιήθηκαν για τα διαφορικά δεύτερης τάξης είναι σύμφωνα με την μέθοδο Crank - Nicholson

$$\frac{\partial}{\partial X^2} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{O_{j+1}^{n+1} - 2O_j^{n+1} + O_{j-1}^{n+1}}{\Delta X^2} + \frac{O_{j+1}^n - 2O_j^n + O_{j-1}^n}{\Delta X^2} \right\} \quad (\text{Π2.6})$$

Η εξίσωση (Π2.6) οδηγεί στην γενική μορφή μίας διακριτοποιημένης -αλγεβρικής εξίσωσης που δίδεται από τη παρακάτω σχέση

$$A_1(r)O_{j-1}^{n+1} + A_2(r)O_j^{n+1} + A_3(r)O_{j+1}^{n+1} = B_1(r)O_{j-1}^n + B_2(r)O_j^n + B_3(r)O_{j+1}^n \quad (\text{Π2.7})$$

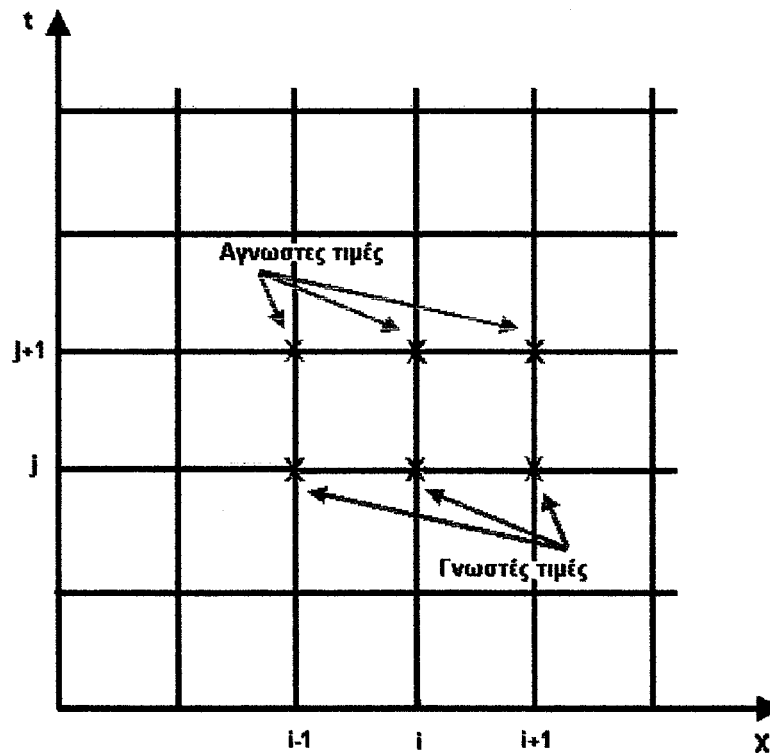
όπου $A_1(r)$, $A_2(r)$, $A_3(r)$, $B_1(r)$, $B_2(r)$, $B_3(r)$ είναι οι αλγεβρικοί συντελεστές της μεταβλητής του προβλήματος και συναρτήσεις της ποσότητας $r = \Delta T/(\Delta X)^2$.

¹ Αγγλ. Crank - Nicholson implicit method

² Αγγλ. Explicit method

Γενικά το αριστερό μέρος της εξίσωσης (Π2.7) περιέχει τρεις αγνώστους και το δεξί μέρος τρεις γνωστές τιμές της μεταβλητής οι οποίες έχουν τις ίδιες τετμημένες αλλά διαφορετικές τεταγμένες, δηλαδή αντιστοιχούν στο προηγούμενο χρονικό βήμα όπως φαίνεται και στην Εικόνα Π2-2.

Εάν υπάρχουν N εσωτερικά κομβικά σημεία κατά μήκος κάθε γραμμής χρονικού βήματος τότε για $n=0$ και $j=1,2,\dots, J$ η εξίσωση (Π2.7) δίνει J ταυτόχρονες εξισώσεις για τις J αντίστοιχες άγνωστες τιμές της μεταβλητής κατά μήκος της πρώτης χρονικής γραμμής υπό μορφή των γνωστών αρχικών και συνοριακών συνθηκών.



Εικ. Π2-2 : Μέθοδος Crank-Nicholson

Ομοίως, για $n=1$ θα εκφράζει J άγνωστες τιμές της μεταβλητής κατά μήκος της δεύτερης χρονικής γραμμής υπό την μορφή των γνωστών τιμών της μεταβλητής που υπολογίστηκαν κατά μήκος της πρώτης χρονικής γραμμής καθώς και των συνοριακών συνθηκών που διέπουν το πρόβλημα. Μία τέτοια μέθοδος όπου ο υπολογισμός μίας άγνωστης θεμελιώδους τιμής απαιτεί την γνώση της λύσης ενός συνόλου από ταυτόχρονες εξισώσεις περιγράφεται στη βιβλιογραφία σαν μία έμμεση μέθοδος.

Η εξίσωση (Π2.7) με ενσωματωμένες τις συνοριακές συνθήκες (Dirichlet) σε $n=0$ και $n=N$ οδηγεί στην ειδική περίπτωση ενός συστήματος γραμμικών εξισώσεων το οποίο είναι ένα τριδιαγώνιο σύστημα, δηλαδή ένα σύστημα το οποίο έχει μη μηδενικά στοιχεία μόνο στην διαγώνιο με συν ή πλήν μία ακόμη κολώνα). Το τριδιαγώνιο σύστημα μπορεί να λυθεί με τη βοήθεια της μεθόδου διάσπασης ενός μητρώου σε γινόμενο δύο άλλων μητρώων (LU Decomposition) σύμφωνα με την σχέση

$$L*U=A \quad (\text{Π2.8})$$

όπου L είναι το κάτω τρίγωνο το οποίο έχει στοιχεία μόνο στη διαγώνιο και κάτω και U είναι το άνω τρίγωνο το οποίο έχει στοιχεία μόνο στην διαγώνιο και πάνω.

Επίσης μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την εξής ανάλυση έτσι ώστε να λύσουμε το γραμμικό σύνολο εξισώσεων

$$A * X = (L * U) * X = L * (U * X) = B \quad (\text{Π2.9})$$

λύνοντας πρώτα για το διάνυσμα Y έτσι ώστε

$$L * Y = B \quad (\text{Π2.10})$$

και μετά λύνοντας την

$$U * X = Y \quad (\text{Π2.11})$$

Έτσι η εξίσωση (5.5.5) μπορεί να λυθεί σαν ανιούσα κατάσταση¹ ως εξής,

$$y_1 = \frac{b_1}{a_{11}} \quad (\text{Π2.12})$$

$$y_j = \frac{1}{a_{jj}} \left[b_j - \sum_{n=1}^{j-1} a_{jn} y_n \right]$$

όπου a_{jj} και a_{jn} είναι τα στοιχεία του πίνακα A , ενώ η εξίσωση (Π2.11) μπορεί τότε να λυθεί σαν αντίστροφη αντικατάσταση² όπως φαίνεται παρακάτω

$$X_j = \frac{Y_j}{B_{jj}} \quad (\text{Π2.13})$$

$$X_j = \frac{1}{B_{jj}} \left[Y_j - \sum_{n=j+1}^J B_{jn} X_n \right] \quad j=J-1, J-2, \dots, 1$$

Αλγόριθμος Αριθμητικής Επίλυσης – Πρόβλημα επίπεδης παραμόρφωσης

Σύμφωνα με τη μέθοδο Crank – Nicholson για

$$u_j^n = u(j\Delta x, n\Delta t) \quad (\text{Π2.14})$$

ισχύει

¹Αγγλ. *Forward substitution*

²Αγγλ. *Backsubstitution*

$$(u_t)_j^n = \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} \quad (\text{Π2.15α})$$

$$(u_x)_j^n = \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} \quad (\text{Π2.15β})$$

$$(u_{xx})_j^n = \frac{1}{2} \left[\frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{\Delta x^2} + \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} \right] \quad (\text{Π2.15γ})$$

Οπότε το αριθμητικό σχήμα πεπερασμένων διαφορών για το πρόβλημα επίπεδης παραμόρφωσης βαθιάς καθίζησης έχει τη μορφή

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n+1}}{\Delta z} = \frac{\hat{c}}{2 \left(1 - z^{n+\frac{1}{2}} \right)^2} \left[\frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{\Delta x^2} + \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} \right] -$$

(Π2.16)

$$- \frac{x_j}{2 \left(1 - z^{n+\frac{1}{2}} \right)} \left[\frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{2\Delta x} + \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} \right]$$

Αλγόριθμος Αριθμητικής Επίλυσης – Αξονοσυμμετρικό Πρόβλημα

Κατά όμοιο τρόπο ο αλγόριθμος πεπερασμένων διαφορών για το αξονοσυμμετρικό πρόβλημα δίνεται από τη παρακάτω σχέση

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n+1}}{\Delta z} = \frac{\hat{c}}{2 \left(1 - z^{n+\frac{1}{2}} \right)^2} \left[\frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{\Delta \rho^2} + \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta \rho^2} \right] -$$

(Π2.17)

$$- \left[\frac{\rho_j}{2 \left(1 - z^{n+\frac{1}{2}} \right)} - \frac{\hat{c}}{2\rho_j \left(1 - z^{n+\frac{1}{2}} \right)^2} \right] \left[\frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{2\Delta \rho} + \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta \rho} \right]$$

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 2

1. **K.v.Terzaghi** (1936). Stress distribution in dry and saturated sand above a yielding trap door. *Proc. Int. Conf. Soil Mech., Cambridge Mass.*, Vol. I, 307-311.
2. **Vardoulakis, I., Graf, B and Gudehus, G.** (1981). Trap-door problem with dry sand: A statical approach based upon model test kinematics, *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, Vol. 5, 57-78
3. **Hubbert, M.K.,** (1981). Mechanics of deformation of crustal rocks: Historical development, *N.L. Carter et al Ed., Mechanical Behavior of Crustal Rocks-The Handin*, Volume (American Geophysical Union), 1-9 .
4. **Papamichos, E., Vardoulakis, I., Heil, L.K.,** (2000). Overburden Modeling Above a Compacting Reservoir Using a Trap Door Apparatus. *Phys. Chem. Earth (A)*, Vol. 26
5. **Litwiniszyn, J.,** *Stochastic Methods in the Mechanics of Granular Bodies.* Springer-Verlag, Wien, 1974.
6. **Dimova, V.L.,** *Some Direct and Inverse Problems in Applied Geomechanics,* University of Mining & Geology, Sofia, 1990.
7. **Tikhonov, A.N. and Samarskii, A.A.,** *Equations of Mathematical Physics,* Dover, 1963.
8. **Richtmeyer, R.D. and Morton, K.W.,** *Difference methods for initial value problems,* John Wiley & Sons, 1967
9. **John, F.,** *Partial Differential Equations,* Springer-Verlag, New York, 1982

