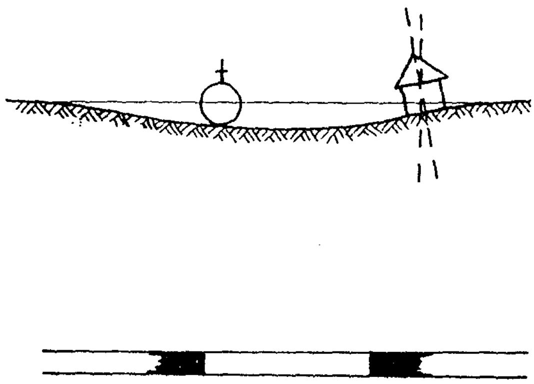
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^{Ο} ΚΛΑΣΙΚΕΣ ΘΕΩΡΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟ ΕΥΘΥ & ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΒΑΘΙΑΣ ΚΑΘΙΖΗΣΗΣ – ΟΡΙΣΜΟΙ

1. ΚΑΘΙΖΗΣΗ ΜΕΓΑΛΗΣ ΚΛΙΜΑΚΑΣ - ΟΡΙΣΜΟΙ

Τα υπόγεια έργα (Πολιτικού Μηχανικού ή άλλα γεωτεχνικά) είναι ο λόγος ανακατανομής των τάσεων και παραμορφώσεων στη μάζα των γεωϋλικών. Το αποτέλεσμα της ανακατανομής είναι η καθίζηση στην επιφάνεια της γης, η οποία δημιουργεί ανεπιθύμητες συνέπειες για τη λειτουργία των κατασκευών. (Εικ. 1-1).

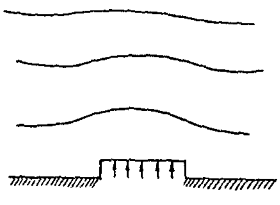


Εικ. 1-1 Συνέπειες καθιζήσεων

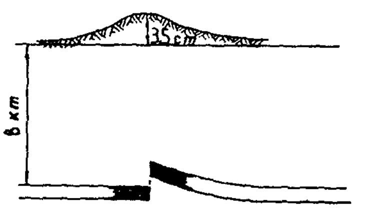
Οι παραπάνω συλλογισμοί δημιουργούν τα ακόλουθα ερωτήματα:

- Πώς να προβλεφθεί η επίδραση των υπόγειων εργασιών στην επιφάνεια της γης;
- Πώς να εκτελεστούν οι υπόγειες εργασίες (σχήματα και διαστάσεις των έργων) έτσι ώστε τα υπάρχοντα κτίρια και εξοπλισμοί στην επιφάνεια να μπορούν να διατηρήσουν την ύπαρξη και την λειτουργία τους;

Αυτά είναι τα προβλήματα τα οποία θα μελετηθούν σε αυτή την εργασία. Οι λύσεις των προβλημάτων που δίνονται παρακάτω μπορεί να χρησιμοποιηθούν για τις ποσοτικές και τις ποιοτικές μελέτες μερικών φυσικών φαινομένων. Για παράδειγμα, όταν η λάβα εκρήγνυται από τον κρατήρα ενός ηφαιστείου, σχηματίζονται κενά στη μάζα της λάβας, σαν αποτέλεσμα της εξάπλωσης του αερίου.

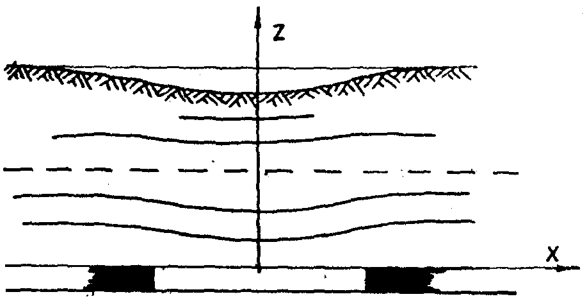


Εικ. 1-2 Εδαφική ανύψωση – 1



Εικ. 1-3 Εδαφική ανύψωση – 2

Ακολούθως, κάτω από το βάρος των υπερκείμενων βράχων αυτά τα κενά μπορεί να καταρρεύσουν προκαλώντας έτσι καταπτώσεις στην επιφάνεια της γης που οι γεωλόγοι ονομάζουν «calderas». Η πτύχωση που δημιουργείται στην επιφάνεια της γης κάτω από την επίδραση των κατακόρυφων (προς τα πάνω) κινήσεων στη βάση, επίσης ανήκει σε αυτή την σειρά των φαινομένων που ανάγονται στα παραπάνω περιγραφόμενα θέματα προς μελέτη (Εικ. 1-2). Οι σεισμοί συνοδεύονται από μετακινήσεις εδαφικών στρωμάτων άρα και μετακινήσεων στην επιφάνεια της γης. Από το μέγεθος τους κάποιος μπορεί να κρίνει σχετικά με μερικά φαινόμενα τα οποία έχουν συμβεί στην σεισμική εστία ή μπορούν να χρησιμεύσουν σαν σημάδια επερχόμενης καταστροφής (Εικ. 1-3).
Επίσης αξίζει να αναφερθεί ότι οι επιχειρήσεις διάσωσης στο Τσερνομπίλ περιελάμβαναν τη κατασκευή σήραγγας κάτω από το σταθμό του πυρηνικού σταθμού, ο οποίος τότε ήταν γεμάτος με σκυρόδεμα (συμπαγής - άκαμπτο). Η έλλειψη γνώσης σχετικά με την επίδραση της σήραγγας (υπόγειος δρόμος) στην επιφάνεια της γης θα μπορούσε να οδηγήσει σε ακόμα περισσότερο καταστροφικές συνέπειες. Αυτό το γεγονός μόνο τονίζει την σπουδαιότητα των προβλημάτων που μελετούνται σε αυτή την εργασία.



Εικ. 1-4 Τομή εδάφους υπό καθίζηση

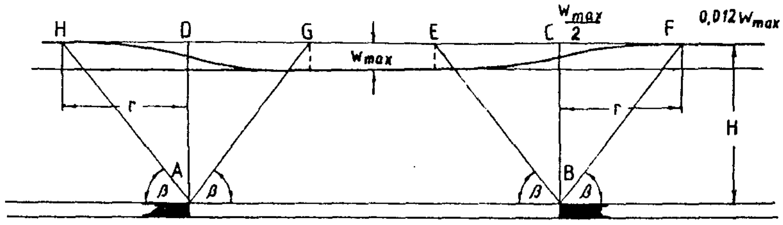
Στις γεωκατασκευές παρατηρούνται οι ζώνες, που εμφανίζονται στην Εικόνα 1-4 (η κάθετη όψη στην Εικόνα υποθέτεται να είναι απείρως μακριά). Πρέπει να σημειωθεί ότι

- Όταν η κατάπτωση συμβαίνει σε μικρό βάθος από την επιφάνεια της γης ζώνη κατάπτωσης μπορεί να φτάσει την επιφάνεια όπου σχηματίζονται τάφροι.
- Όταν η κατάπτωση συμβαίνει σε μεγάλο βάθος εμφανίζεται η ζώνη καθίζησης.

Όταν οι υπόγειες εργασίες εκτελούνται κάτω από τα 150μ., η εικόνα της επιρροής των υπογείων εργασιών στην κατάσταση της μάζας της γεωκατασκευής και την επιφάνεια της παρουσιάζεται στην Εικ. 1-5. Τρεις ζώνες διακρίνονται [1]:

1. Κεντρική ζώνη (ανάμεσα στα σημεία E και G) - η καθίζηση είναι μέγιστη (w_{max}), αλλά ομοιόμορφη και ασφαλής για τα κτίρια και τον εξοπλισμό.
2. Εσωτερική συνοριακή γραμμή (EC, DG) - η καθίζηση είναι μικρότερη $\left(\frac{w_{max}}{2} < w < w_{max}\right)$, αλλά ανομοιόμορφη και επικίνδυνη για τα σημεία της

επιφάνειας οι οποίες υποβάλλονται σε ένταση: διασυνδετικοί αγωγοί, σιδηροδρομικές γραμμές κ.λ.π. υπόκεινται σε παραμορφώσεις - μετακινήσεις.



Εικ. 1-5 Ζώνες επιφανειακής καθίζησης

3. Εξωτερική συνοριακή γραμμή (CF, DH) - η κατάπτωση δεν είναι αξιοσημείωτη $\left(\frac{W_{max}}{2} > w > 0\right)$, αλλά είναι ανώμαλη, η καμπύλη είναι κυρτή και το έδαφος υποβάλλεται σε ένταση που δημιουργεί κίνδυνο για τα σημεία της επιφάνειας.

Για να χαρακτηρίσουμε τις παραμορφώσεις του εδάφους (μέγιστη καθίζηση, απότομη κλίση, μεγάλη καμπυλότητα, οριζόντιες παραμορφώσεις - μετακινήσεις κ.λ.π.) είναι απαραίτητο να γνωρίζουμε την καμπύλη κατανομής των κατακόρυφων μετακινήσεων $W = W(x, y)$ (μονοδιάστατο πρόβλημα) ή $W = W(x, y, z)$ (τρισδιάστατο πρόβλημα).

2. ΕΥΘΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑ – ΚΛΑΣΙΚΕΣ ΘΕΩΡΙΕΣ

2.1. Η θεωρία του Litwiniszyn– Ευθύ πρόβλημα

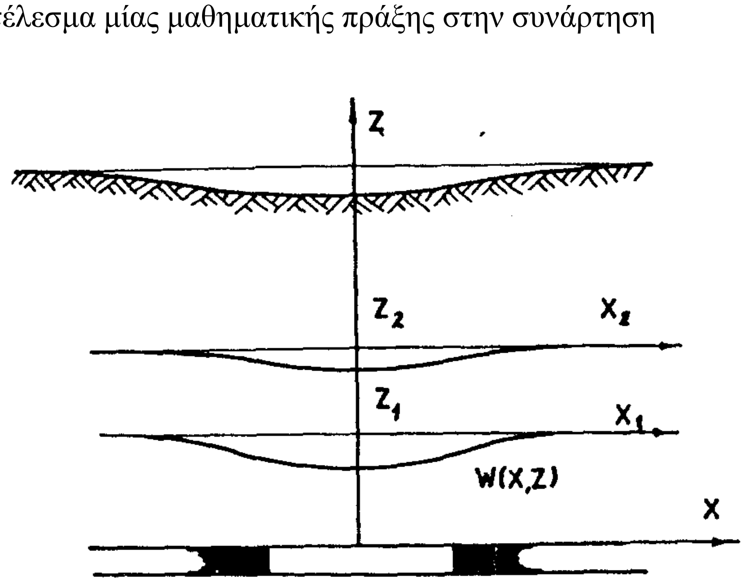
Στην Εικόνα 1.6 εμφανίζεται μία κάθετη τομή του φλοιού της γης το οποίο έχει υποστεί κατάπτωση στη βάση[1] μίας περιοχής του σε μεγάλο βάθος από την επιφάνεια, το ονομαζόμενο ως πρόβλημα θυροπετάσματος καθίζησης[2]. Θεωρώντας τον άξονα z παράλληλο στην διεύθυνση της βαρυτικής δύναμης, με αντίθετη φορά από αυτήν, τότε κατά μήκος του άξονα z σχηματίζονται ζώνες καθίζησης, τις οποίες θα μελετήσουμε. Θεωρούμε στο επίπεδο $z=z_1$ τη καμπύλη

$$z = z_1 - w(x_1, z_1) \tag{1.1}$$

όπου η συνάρτηση $w(x_1, z_1)$ υπολογίζει την καθίζηση (κατακόρυφες μετακινήσεις) ή την ονομαζόμενη καμπύλη των καθιζήσεων[3] ως προς το επίπεδο $z = z_1$. Η καμπύλη καθιζήσεων M_1 προκαλεί στο επίπεδο $z = z_2 > z_1$ το συμβάν της καμπύλης M_2 με

[1] Αγγλ. *trap – door subsidence*
[2] Αγγλ. *trap – door problem*
[3] Αγγλ. *subsidence trough*

άγνωστες συντεταγμένες $w(z_2, x_2)$. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $w = w(z_2, x_2)$ είναι το αποτέλεσμα μίας μαθηματικής πράξης στην συνάρτηση



Εικ. 1.6 Επίπεδα καθίζησης

$$w(z_2, x_2) = T_{z_1}^{z_2} w(z_1, x_1) \qquad (1.2)$$

Σύμφωνα με τη θεωρία του Litwiniszyn [2] υποθέτουμε ότι ο τελεστής T ικανοποιεί τα ακόλουθα αξιώματα:

Αξίωμα 1. Ο τελεστής T είναι γραμμικός, δηλ.

$$T[aw(x_1, z_1) + bw(x_2, z_2)] = aTw(x_1, z_1) + bTw(z_2, x_2) \qquad (1.3)$$

Αξίωμα 2. Ο τελεστής T είναι μη-αρνητικός και συνεχής.
Αξίωμα 3. Ο τελεστής T είναι μοναδικός.
Αξίωμα 4. Ο τελεστής T ικανοποιεί την προϋπόθεση για σύγκλιση στις αρχικές συνθήκες, δηλ.

$$\lim_{x_2 \to x_1} Tw(x_2, z_2) = w(x_1, z_1) \qquad (1.4)$$

Από το Αξίωμα 3 η εξίσωση συναρτησιακών (μεταβατικότητα του τελεστή) προκύπτει

$$T_{z_2}^{z_3} T_{z_1}^{z_2} w(x_1, z_1) = T_{z_1}^{z_3} w(x_1, z_1) \qquad (1.5)$$

Χρησιμοποιώντας τα αξιώματα 1 και 2 και τη θεωρία των κατανομών [3] μπορούμε να αποδείξουμε τα ακόλουθα

Θεώρημα [1]. ΈστωT ένας ολοκληρωτικός τελεστής της μορφής

$$w(x_2, z_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} w(z_1, x_1)\ \ (z_1, x_1; z_2, x_2) dx_1 \tag{1.6}$$

όπου $\varphi = \varphi(z_1, x_1; z_2, x_2)$ είναι συνάρτηση κατανομής πυκνότητας. Από τις δύο τελευταίες εξισώσεις η ολοκληρωτική εξίσωση των στοχαστικών μεθόδων (Smoluchowski-Einstein-Kolmogorov) προκύπτει

$$\varphi = \varphi(z_1, x_1, z_3, x_3) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(z_2, x_2; z_3, x_3) \varphi(z_1, x_1; z_2, x_2) dx_2 \tag{1.7}$$

όπου

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x_1, z_1; x_2, z_2) dx_2 = 1 \tag{1.8}$$

Υπό προϋποθέσεις που περιγράφονται σε επόμενη παράγραφο τα παραπάνω οδηγούν στην μερική διαφορική εξίσωση Einstein – Kolmogorov [2]:

$$\frac{\partial w}{\partial z}(x, z) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}[B(z, x) w(z, x)] - \frac{\partial}{\partial x}[A(z, x) w(z, x)] \tag{1.9}$$

Οι συντελεστές $A(z, x)$ και $B(z, x)$ χαρακτηρίζουν τις ιδιότητες των γεωϋλικών. Έτσι, όταν το συνεχές μέσο είναι ετερογενές μόνο κατά μήκος του άξονα z η τελευταία εξίσωση παίρνει τη μορφή (εξίσωση θερμότητας δι' αγωγής του Fourier):

$$\frac{\partial w}{\partial z}(z, x) = B(z) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(z, x) \tag{1.10}$$

κατά την οποία, όταν λύνουμε συγκεκριμένα προβλήματα πρέπει να προσθέτονται κατάλληλες αρχικές και συνοριακές συνθήκες. Στην τριδιαστατική περίπτωση η τελευταία εξίσωση παίρνει τη μορφή

$$\frac{\partial w}{\partial z}(z, x, y) = B(z) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(z, x, y) + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}(z, x, y) \right] \tag{1.11}$$

Προτείνεται για πεπερασμένες κατακόρυφες μετακινήσεις, οι οριζόντιες $u(x, z)$ και $\upsilon(x, z)$ να υπολογίζονται από τις εμπειρικές εξαρτημένες σχέσεις του S. G. Aversin [1]

$$u(x, y, z) = -B(z) \frac{\partial w}{\partial x} \tag{1.12}$$

$$\upsilon(x, y, z) = -B(z) \frac{\partial w}{\partial y} \tag{1.13}$$

Είναι ενδιαφέρον ότι η ολοκληρωτική εξίσωση του M.Smoluchowski είναι μη γραμμική ενώ η αντίστοιχη διαφορική εξίσωση των Einstein-Kolmogorov είναι γραμμική, όπως επίσης ότι ενώ όλες οι λύσεις στην εξίσωση των Einstein-Kolmogorov είναι λύσεις της ολοκληρωτικής εξίσωση του M.Smoluchowski, το αντίθετο δεν συμβαίνει γενικά. Χρησιμοποιώντας τους παραπάνω συλλογισμούς ο J.Litwiniszyn απέδειξε [2] ότι η συνάρτηση

$$\varphi(\rho, z) = \frac{1}{2}(\pi z)^{-\frac{1}{2}} . \exp\left[-\frac{\rho}{z}\right]^2 \tag{1.14}$$

είναι και λύση στην ολοκληρωτική εξίσωση του M.Smoluchowski και θεμελιώδης λύση στο πρόβλημα του Cauchy για την εξίσωση θερμικής αγωγιμότητας δηλαδή περιέχεται στην κλάση των λύσεων της εξίσωσης των Einstein-Kolmogorov, ενώ η συνάρτηση

$$\varphi(\rho, z) = \frac{1}{\pi} \frac{z^2}{z^2 + \rho^{2\cdot}} \frac{1}{z} \tag{1.15}$$

είναι μία λύση στην ολοκληρωτική εξίσωση του M.Smoluchowski αλλά δεν περιέχεται στην κλάση των λύσεων της εξίσωσης των Einstein-Kolmogorov. Αυτή η συνάρτηση είναι ο πυρήνας της λύσης του προβλήματος συνοριακών τιμών Dirichlet για την διαφορική εξίσωση Laplace.

2.2. Η θεωρία των J. Litwiniszyn – S.G.Aversin

Υποθέτουμε τα παρακάτω αξιώματα [1]:

Αξίωμα 1. Τα γεωϋλικά είναι ασυμπίεστα συνεχή μέσα, δηλαδή ισχύει

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, z) + \frac{\partial w}{\partial z}(x, z) = 0 \tag{1.16}$$

Αξίωμα 2. Η ακόλουθη σχέση υπάρχει ανάμεσα στις μετατοπίσεις οριζόντια (u) και κάθετη (w) (S.G.Aversin)

$$u(x, z) = -B(z)\frac{\partial w}{\partial x}(x, z) \tag{1.17}$$

όπου $B = B(z)$ είναι ένα χαρακτηριστικό μέγεθος των γεωϋλικών το οποίο μπορεί να υπολογιστεί από τοπολογικές παρατηρήσεις. Από τα αξιώματα 1 και 2 προκύπτει η εξίσωση που πρέπει να ικανοποιεί τις κάθετες μετατοπίσεις – καθιζήσεις

$$\frac{\partial w}{\partial z} = B(z)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \tag{1.18}$$

η οποία είναι γνωστή ως εξίσωση S.G. Aversin – J.Litwiniszyn. Με αυτόν τον τρόπο, το πρόβλημα του προσδιορισμού εξίσωσης για τις καμπύλες καθιζήσεων για μια δεδομένη κατάπτωση στη βάση[1].

$$w(x,0) = \varphi(x) \tag{1.19}$$

και δεδομένη $B = B(z)$, μετατρέπεται στο πρόβλημα του Cauchy για την εξίσωση του Fourier.
Πρέπει να σημειώσουμε ότι υπάρχουν διάφορες προτάσεις σχετικά με τη μορφή της συνάρτησης $B = B(z)$. Έτσι, σύμφωνα με τον S.G.Aversin είναι μία γραμμική συνάρτηση σύμφωνα με τον W.Budryk είναι παραβολή. Σε αυτή την εργασία για λόγους απλοποίησης των προβλημάτων που ακολουθούν λαμβάνεται ως σταθερά.

3. ΜΗ-ΚΑΛΩΣ ΟΡΙΣΜΕΝΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ-ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

3.1. Εισαγωγή – Μη-καλώς ορισμένα προβλήματα[2]

Οι απαιτήσεις οι οποίες έθεσε ο J. Hadamard στις λύσεις των προβλημάτων αρχικών και συνοριακών τιμών της μαθηματικής φύσης είναι:

1. Η λύση πρέπει να υπάρχει
2. Η λύση πρέπει να είναι μοναδική
3. Η λύση πρέπει να είναι ευσταθής

Προβλήματα των οποίων οι λύσεις ικανοποιούν τις ανωτέρω αναφερόμενες συνθήκες ονομάζονται καλώς ορισμένα[3] σύμφωνα με τον Hadamard. Αν κάποια από τις παραπάνω αναφερόμενες συνθήκες δεν ισχύει τότε ονομάζουμε το πρόβλημα μη καλώς ορισμένο σύμφωνα με τον Hadamard.

Θα μπορούσε να ειπωθεί, για παράδειγμα, ότι το πρόβλημα του Cauchy για την εξίσωση Laplace

$$u = u(x, y), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad y > 0 \tag{1.20}$$

$$u(x,0) = 0, \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial y} = a \sin(nx), \quad x \in [0, \pi] \tag{1.21}$$

είναι μη-καλώς ορισμένο επειδή υπάρχει μία μοναδική λύση

---

[1] Αγγλ. *trap – door subsidence*
[2] Αγγλ. *ill-posed problems (improperly posed problems)*
[3] Αγγλ. *well-posed*

$$u(x,y)=\frac{a}{n}\sinh(ny).\sin(nx) \quad a,n\text{ - const.} \tag{1.22}$$

αλλά δεν είναι σταθερή. Για την ακρίβεια, για κάθε $\varepsilon>0$, $c>0$ και $y>0$ μπορεί να επιλεγεί με τέτοιο τρόπο ώστε οι ανισότητες

$$\|a\sin nx\|<\varepsilon, \quad \left\|\frac{a}{n}\sinh(ny).\sin(nx)\right\|>c \tag{1.23}$$

να ισχύουν.

Μέχρι τα μέσα της δεκαετίας του 1970, υποθέτονταν ότι τα μη-καλώς ορισμένα προβλήματα δεν έχουν φυσική έννοια, ότι η δεύτερη αρχή της θερμοδυναμικής παραβλέπεται κ.λ.π. Κατά τη διάρκεια της τελευταίας δεκαετίας, κυρίως οφειλόμενο στις έρευνες του A.N.Tychonoff, έγινε ξεκάθαρο ότι τα μη καλώς ορισμένα προβλήματα μπορεί να έχουν σημασία και η σπουδαιότητά τους είναι αξιοσημείωτη επειδή υπάρχουν σημαντικά προβλήματα της φυσικής όπου η λύση τους ανάγεται στην επίλυση μη καλώς ορισμένων προβλημάτων (π.χ. γεωφυσικά). Ιδιαίτερη σημασίας έχουν τα ονομαζόμενα αντίστροφα προβλήματα[1], στα οποία, το αποτέλεσμα δίνεται και αυτό που ζητείται είναι το αίτιο. Αυτά τα προβλήματα είναι συνήθως μη-καλώς ορισμένα.

Σε αυτό τη παράγραφο, δίνουμε, μετά από μια γενική εξέταση του ζητήματος των «αντίστροφων προβλημάτων», παραδείγματα διαφόρων τάξεων αντίστροφων προβλημάτων που αναπτύσσονται σε ποικίλα πεδία εφαρμογών. Όπως θα δούμε, *γραμμικά αντίστροφα προβλήματα* τείνουν σε *ολοκληρωτικές εξισώσεις πρώτου τύπου*, το οποίο είναι ο λόγος που τέτοιες εξισώσεις παίζουν σημαντικό ρόλο στην μελέτη των αντίστροφων προβλημάτων. Από την άλλη μεριά, πολλά βασικά *αντίστροφα προβλήματα* είναι ισχυρώς μη γραμμικά ακόμα και όταν η αντιστοιχία σε *ευθύ πρόβλημα* είναι γραμμική.

Όταν χρησιμοποιείτε ο όρος *αντίστροφο πρόβλημα*, αμέσως μας προκαλείται η ερώτηση «ως προς τι αντίστροφο;». Ακολουθώντας τον J.B.Keller [3], κάποιος αποκαλεί *δύο* προβλήματα αντίστροφα μεταξύ τους όταν η διατύπωση του ενός λύνει το άλλο. Κυρίως για ιστορικούς λόγους, αποκαλούμε το ένα πρόβλημα (συνήθως το απλούστερο ή αυτό το οποίο μελετήθηκε πρώτο) *ευθύ πρόβλημα* και το άλλο *αντίστροφο πρόβλημα*. Αν υπάρχει ένα πραγματικό πρόβλημα πίσω από το υπό εξέταση μαθηματικό πρόβλημα τότε στις περισσότερες περιπτώσεις υπάρχει μια σαφής διάκριση στο ευθύ και το αντίστροφο πρόβλημα. Για παράδειγμα, εάν κάποιος θέλει να προβλέψει την μελλοντική συμπεριφορά ενός φυσικού συστήματος από την γνώση της παρούσας κατάστασης και των φυσικών νόμων (συμπεριλαμβανομένων συγκεκριμένων αξιών όλων των σχετικών φυσικών παραμέτρων), κάποιος θα το ονόμαζε αυτό *ευθύ πρόβλημα*. Πιθανόν τα *αντίστροφα προβλήματα* είναι ο προσδιορισμός της παρούσας κατάστασης του συστήματος από μελλοντικές παρατηρήσεις (δηλ. παλιότερα ο υπολογισμός της εξέλιξης του συστήματος) ή η αναγνώριση των φυσικών παραμέτρων από παρατηρήσεις της εξέλιξης του συστήματος (*υπολογισμός παραμέτρου).*

Υπάρχουν, από άποψη εφαρμογής, δύο διαφορετικοί τρόποι μελέτης τέτοιων αντίστροφων προβλημάτων: α) θα πρέπει να *γνωρίζουμε* παλαιότερες καταστάσεις ή παραμέτρους ενός φυσικού συστήματος. β) θα πρέπει να ανακαλύψουμε πως

[1] Αγγλ. *Inverse problems*

μπορούμε να επηρεάσουμε ένα σύστημα μέσω της παρούσας κατάστασης του ή μέσω παραμέτρων ώστε να μπορέσουμε να το *εξετάσουμε* καλύτερα σε ένα επιθυμητό επίπεδο στο μέλλον. Έτσι, κάποιος θα μπορούσε να πει ότι τα *αντίστροφα προβλήματα συνδέονται με την εύρεση αιτιών για ένα παρατηρούμενο αποτέλεσμα.*
Τα αντίστροφα προβλήματα τις περισσότερες φορές δεν ικανοποιούν την *ορθότητα*[1] κατά Hadamard. Είναι πιθανό να μην έχουν μια λύση με την ακριβή έννοια του όρου, μπορεί να μην υπάρχει μια και μοναδική λύση ή/και μπορεί να μην εξαρτώνται συνεχώς από τα δεδομένα. Τα μαθηματικά προβλήματα που έχουν αυτά τα μη επιθυμητά στοιχεία ονομάζονται *μη καλώς ορισμένα προβλήματα* και δημιουργούν (περισσότερο λόγω της μη εξάρτησης των λύσεων από τα δεδομένα) μεγάλες αριθμητικές δυσκολίες. Όσο η μελέτη των συγκεκριμένων αντίστροφων προβλημάτων συχνά εμπλέκει το ερώτημα πώς να ενδυναμωθεί η μοναδικότητα με πρόσθετες πληροφορίες ή υποθέσεις, δεν μπορούν να λεχθούν πολλά σχετικά με αυτό σε ένα γενικό αντικείμενο. Η άποψη της έλλειψης της ευστάθειας και της αποκατάστασης της με κατάλληλες μεθόδους (μέθοδοι κανονικοποίησης), παρόλα αυτά, μπορεί να αντιμετωπιστεί γενικά. Η θεωρία των μεθόδων κανονικοποίησης είναι καλά ανεπτυγμένη για τα γραμμικά αντίστροφα προβλήματα και ελάχιστα για τα μη γραμμικά προβλήματα.
Παρακάτω, παρουσιάζονται ενδεικτικά μέθοδοι για να λύνουμε μη-καλώς ορισμένα προβλήματα όπως η μέθοδος της οιονεί-αντιστροφής κ.λ.π..

3.2. Αντίστροφα προβλήματα στη Θεωρία των J. Litwiniszyn – S. Aversin

Όταν είναι απαραίτητη η κατασκευή ενός υπογείου έργου κάτω από κατοικημένες περιοχές ή περιοχές σημαντικών υλικών ή μηχανημάτων, τότε η καμπύλη καθίζησης στην επιφάνεια της γης καθορίζεται αυστηρά από τους κατασκευαστικούς κανονισμούς. Τότε η ερώτηση που τίθεται είναι πώς θα βρεθεί μία τέτοια μέθοδος υποσκαφής, έτσι ώστε η επιθυμητή καμπύλη καθιζήσεων να πραγματοποιηθεί. Αυτό το πρόβλημα μπορεί να διατυπωθεί με έννοιες της θεωρίας των Litwiniszyn-Aversin [1], ως ακολούθως: Ανασχηματίζουμε την αρχική συνθήκη

$$w(x,0)=\varphi(x) \tag{1.24}$$

του προβλήματος (1.18)-(1.19) και χρησιμοποιούμε το παρακάτω πρόβλημα για επίλυση

$$\frac{\partial w}{\partial z}=B(z)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \tag{1.25}$$

$$w(x,H)=f(x) \tag{1.26}$$

που είναι ισοδύναμο στο πρόβλημα του προσδιορισμού της κατανομής $\varphi(x)$ από την ολοκληρωτική εξίσωση Fredholm πρώτου είδους:

[1] Με τον όρο Ορθότητα ονομάζεται ο έλεγχος ενός μαθηματικού προβλήματος ως προς την τοποθέτηση του δηλ. αν είναι καλώς ορισμένο ή μη-καλώς ορισμένο

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi\int_0^H B(s)ds}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left[-\frac{(x-s)^2}{4\int_0^H B(s)ds}\right]\varphi(s)ds = f(x) \qquad (1.27)$$

για δεδομένες συναρτήσεις $f = f(x)$ και $B = B(z)$.
Το πρόβλημα (1.25)-(1.26) και το ισοδύναμο του για τον προσδιορισμό του $\varphi = \varphi(x)$ από την σχέση (1.27) είναι μη-καλώς ορισμένο σύμφωνα με τον Hadamard και λύνεται από τη μέθοδο της οιονεί-αντιστροφής [4].

3.3. Η μέθοδος των οιονεί-λύσεων[1]

Ορισμός. Λέμε ότι η εξίσωση του τελεστή

$$Af = F \qquad (1.28)$$

έχει στο σύνολο $M' \subset M$, μία οιονεί-λύση $f' \in M'$ αν για το λύση f' ισχύουν τα παρακάτω

$$\rho_2(Af', F) = \inf_{f \in M'} {}_{\rho 1}(Az, F) \qquad (1.29)$$

Αν μπορεί να δειχθεί ότι το f' είναι ένα τέτοιο στοιχείο του M' του οποίου η εικόνα Af' είναι το πιο «κοντινό» στοιχείο στο F πάνω στο σύνολο AM', τότε ισχύουν τα ακόλουθα θεωρήματα:

Θεώρημα 1 [1] . Έστω οι χώροι Banach E_1 και E_2, όπου το E_2 κυρτό και A ένας συνεχής ένα προς ένα, γραμμικός τελεστής. Τότε το πρόβλημα εύρεσης οιονεί-λύσης στην εξίσωση του τελεστή (1.28) στο κυρτό συνεκτικό M' είναι καλώς ορισμένο σύμφωνα με τον Hadamard.

Θεώρημα 2 [1]. Αν κάτω από τις συνθήκες του θεωρήματος 1 επιλέξουμε ένα σύστημα κυρτών συνεκτικών, έτσι ώστε

$$\overline{\bigcup} M_i = M_0 \qquad (1.30)$$

(η ένωση σημαίνει την κάλυψη του συνόλου), τότε οι οιονεί-λύσεις $f^{(i)} = f(F, M_0)$ τείνουν στην οιονεί-λύση $f = f(F, M_0)$ για $n \to \infty$.

Παράδειγμα. Πρέπει να εφαρμόσουμε την μέθοδο που περιγράφεται για να επιτύχουμε μία λύση στην εξίσωση του τελεστή.

$$Af = F \qquad (1.31)$$

[1] Αγγλ. *quasi-solution*

Ας θεωρήσουμε μέσα στο χώρο L_2 ένα ορθοκανονικό σύστημα συναρτήσεων

$$\varphi_1(t),...,\varphi_n(t) \tag{1.32}$$

Ζητάμε μία λύση πάνω στο συνεκτικό M:

$$M = \left\{ f : f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \varphi_k(t), |\alpha_k| \le \frac{c}{k} \right\} \tag{1.33}$$

όπου το c είναι σταθερό.

Κατά μήκος του συνεκτικού M, μελετάμε το συνεκτικό

$$M_n = \left\{ f : f(t) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k(t), |\alpha_k| \le \frac{c}{k} \right\} \tag{1.34}$$

Σύμφωνα με το Θεώρημα 1, η οιονεί-λύση $f(F, M_n)$ για μεγάλο n προσεγγίζει τη λύση $f(F, M)$ και μπορεί να ληφθεί ως λύση της αρχικής εξίσωσης.

3.4. Η μέθοδος του J.Lions της οιονεί-αντιστροφής[1]

Έστω η περιοχή D είναι πεπερασμένη μέσα στο τριδιάστατο Ευκλείδειο χώρο και t ο χρόνος, θεωρούμε τη λύση $u = u(x, y, z, t)$ του προβλήματος (ευθύ πρόβλημα).

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0 \qquad G = \{x \in D, \quad t > 0\} \tag{1.35α}$$

$$u(x, t) = 0 \qquad x \in S \tag{1.35β}$$

$$u(x,0) = \varphi(x) \tag{1.35γ}$$

όπου S είναι η επιφάνεια-σύνορο του χώρου D και ο τελεστής Laplace $\Delta u = \partial^2 u/\partial x^2 + \partial^2 u/\partial y^2 + \partial^2 u/\partial z^2$. Η λύση $u = u(x, y, z, t)$ στο ευθύ πρόβλημα υπάρχει, είναι μοναδική και ευσταθής.

Η λύση του αντίστροφου προβλήματος, με αρχικές συνθήκες τη λύση $u(x, y, z, t)$ υπολογίζοντας την $\varphi(x)$, μπορεί να μην υπάρχει καν. Ονομάζουμε «γενικευμένη λύση» του αντίστροφου προβλήματος, τη συνάρτηση $\varphi(x)$ ως προς την οποία επιτυγχάνεται

$$f_0 = \inf_{\varphi \in C}(\phi) \tag{1.36}$$

[1] Αγγλ. *quasi-reversibility*

όπου

$$f(\varphi)=\int_D \left|u(x,t;\varphi)-\psi(x)\right|^2 dx \tag{1.37}$$

για καθορισμένο $T>0$ και $\psi(x)$ (ορισμένο στο D), $\psi(x)\in L_2$.
Από την ύπαρξη της κλάσης των γενικευμένων συναρτήσεων $\varphi(x)$ στις οποίες $f_0=0$, το πρόβλημα εύρεσης προσεγγιστικής τιμής f_0 με ένα καθορισμένο λάθος προσέγγισης μπορεί να αντιμετωπισθεί.
Το πρόβλημα τότε διατυπώνεται ως ακολούθως: για ένα δεδομένο αριθμό ε>0, να βρεθεί συνάρτηση $\varphi_\varepsilon(x)$ για την οποία να ισχύει $f(\varphi_\varepsilon)\le\varepsilon$. Στη λύση αυτού του προβλήματος αναφέρεται η μέθοδος της οιονεί-αντιστροφής του Lions [5].
Το πρόβλημα ανάγεται στο να βρεθεί ένας τελεστής B_α κοντά στον τελεστή $\partial(\ )/\partial t-\Delta(\ )$ για τον οποίο (πρόβλημα με αντίστροφο χρόνο)

$$B_\alpha u_\alpha=0,\quad x\in D,\quad t<T,\quad \alpha>0 \tag{1.38α}$$

$$u_\alpha(x,T)=\psi(x) \tag{1.38β}$$

$$u_\alpha(x,t)=0,\quad x\in S,\quad t<T \tag{1.38γ}$$

Το παραπάνω πρόβλημα είναι καλώς ορισμένο κατά Hadamard. Η επίλυση του παραπάνω προβλήματος αναφέρεται σύμφωνα με τα προηγούμενα σε $\varphi(x)=u_\alpha(x,0)$.
Συνήθως ο B_α λαμβάνεται στην μορφή $\partial/\partial t-\Delta-\alpha\Delta^2$ και το «ευθύ» πρόβλημα είναι

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial t}-\Delta u_\alpha-\alpha\Delta^2 u_\alpha=0,\ \ x\in D,\quad t<T,\quad \alpha>0 \tag{1.39α}$$

$$u_\alpha(x,T)=\psi(x) \tag{1.39β}$$

$$u_\alpha(x,t)=0,\quad x\in S,\quad 0<t\le T \tag{1.39γ}$$

$$\Delta u_\alpha=0,\quad x\in S,\quad 0<t\le T \tag{1.39δ}$$

θέτοντας $\varphi(x)=u_\alpha(x,0)$.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 1

1. **Dimova, V.L.**, *Some Direct and Inverse Problems in Applied Geomechanics*, University of Mining & Geology, Sofia, 1990.
2. **Litwiniszyn, J.**, *Stochastic Methods in the Mechanics of Granular Bodies*. Springer-Verlag, Wien, 1974.
3. **Carleman, T.**, *Les Functions quasi analytics,* Paris 1920
4. **Keller, J.**, *Inverse problems*, Amer. Math. Monthly 83, 1976
5. **Lattés, R. and Lions, J.L.** *The method of quasi-reversibility.* American Elsevier Pub. Co., New York, 1969